应用数学和力学, 第 24 卷 第 7 期(2003 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 07_0669_06

带状态约束的抛物型变分不等式的最优控制*

郭兴明, 周世兴

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委郭兴明来稿)

摘要: 利用非光滑分析和半变分不等式的一些方法和结果, 研究了一类带状态约束的具有非线性、不连续以及非单调多值项的抛物型变分不等式的优化控制问题以及它的逼近等, 推广了一些已有的结果•

关 键 词: 状态约束; 变分不等式; 不连续非单调多值映射; 优化控制与逼近
中图分类号: O175.26; O178 文献标识码: A

1 引言及问题提出

本文我们将研究有如下非线性抛物型变分不等式表征的最优控制问题

$$\begin{cases} y' + Ay + \beta(y) \in Bu + f\,(\text{a. e.}\,(x, t) \in Q = \Omega \times [0, t]), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{*}$$

其状态约束为 $F(y) \subset S$, 目标函数设为 I• 这里 β 是一个不连续、非单调和非线性的多值映射•

关于微分系统的最优控制问题的研究已有很长的历史• 包括上述形式在内的变分不等式的最优控制问题, 许多学者, 如 J. L. Lions, V. Barbu, D. Tiba, 及 F. Mignog 等也进行了研究[1~5]• 但是绝大多数人的成果都是基于 β 是一个极大单调算子的情形• 本文中我们将讨论 β 是一个非单调算子的情形, 同时也带有状态约束• 研究此类问题的物理背景部分源于连续统力学、工程科学和(非凸)优化等•

一般说来, 当 β 是一个非单调的多值映射时, 用单调性的方法处理上述变分不等式的控制问题是难以奏效的• 我们将采用文献[6, 7]中的方法来解决本篇所讨论的问题• 相关的非光滑分析与优化基础理论参见[8~10]•

设 Ω 是 R^n 空间的一个有界开子集, 其边界 Γ 是李普希兹的• 我们定义一个希尔伯特空间 V, 满足 $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$, 记 $H = L^2(\Omega)$• 另外, 控制空间 U 也是一个希尔伯特空间, U_{ad} 是 U 一个非空闭凸子集•

现在我们给出如下几个假设:

(H₁) $A: V \to V'$ 是一个对称的线性连续算子, 满足如下的强制性条件:

* 收稿日期: 2002_01_03; 修订日期: 2003_04_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19802012); 上海市重点学科建设基金资助项目
作者简介: 郭兴明(1964—), 男, 湖南常德人, 博士, 教授, 博导(E_mail: xmguo@mail.shu.edu.cn)•

$$\langle Ay, y\rangle \geqslant \omega\|y\|_V^2 - \alpha\|y\|_H^2 \qquad (\forall y \in V),$$

这里 $\omega > 0$ 且 $\alpha \in \mathbf{R}$•

(H$_2$) β 是一个不连续的多值映射•

设 $b(\xi) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, 对任意的 $\rho > 0$, 设

$$\underline{b}_\rho(\xi) = \operatorname*{ess\,inf}_{|\xi_1-\xi|\leqslant\rho} b(\xi_1), \quad \bar{b}_\rho(\xi) = \operatorname*{ess\,sup}_{|\xi_1-\xi|\leqslant\rho} b(\xi_1),$$

$$\underline{b}(\xi) = \lim_{\rho\to 0+} \underline{b}_\rho(\xi), \quad \bar{b}(\xi) = \lim_{\rho\to 0+} \bar{b}_\rho(\xi), \quad \beta(y) = [\underline{b}(y), \bar{b}(y)]\,•$$

此外, 还假设 $|b(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)$, $C > 0$•

(H$_3$) Z 是一个 Banach 空间, $S \subset Z$ 是一个闭凸子集•

$F: L^2(0, T; V) \to Z$ 是连续的•

(H$_4$) B 是一个从 U 到 H 的线性连续算子•

(H$_5$) 目标函数 $I: V\times U \to \mathbf{R}$ 满足如下条件:

(i) $I(y, u)$ 弱下半连续的(weakly l. s. c.);

(ii) $\forall k > 0$, $\exists r > 0$ 使得

$\forall \|u\| \geqslant r$, $u \in U_{ad}$, 以及 $\forall y \in V$, $I(y, u) \geqslant k$•

定义 $Y(u)$ 为对应于每个 $u \in U_{ad}$ 的满足如下命题 1 中条件(T) 的控制方程$(*)$ 的解集•

我们首先来证明本文问题的解的存在性• 为此, 我们需要考虑如下两个问题•

问题(P(u)):

求解 $y \in Y(u)$ 使得 $I(y, u) \leqslant I(y, u)$ 并且 $F(y) \subset S$•

当 $y \in Y(u)$ 是问题(P(u)) 的解时, 记 $E(u) = I(y, u)$•

问题(P) :

求解 $u^* \in U_{ad}$ 使得 $E(u^*) \leqslant E(u) \qquad (\forall u \in U_{ad})$•

2　主 要 结 果

命题 1　设 $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u \in U_{ad}$, 则状态方程$(*)$ 存在一个解 $y \in Y(u)$ 使得

$$\begin{cases} y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \\ y' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))• \end{cases} \tag{T}$$

本命题的证明完全类似[6] 中的定理 1• 这里不累述•

命题 2　给定 $u \in U_{ad}$, 任意的解序列$\{y_n\} \subset Y(u)$ 都有一个子序列$\{y_n\}$(标记不变), 使得 y_n 强收敛于 y 且 $y \in Y(u)$•

证明　我们有

$$\begin{cases} y_n' + Ay_n + g_n = Bu + f, \\ g_n \in \beta(y_n), \\ y_n(0) = y_0, \end{cases} \tag{1a, b, c}$$

将(1a) 中的方程两端与 y_n 作内积并沿$(0, t)$ 作积分, 则依据假设(H$_1$), (H$_2$), 我们得到

$$\|y_n\|_H^2 + 2\omega\int_0^t \|y_n\|_V^2 \mathrm{d}s - 2\alpha\int_0^t \|y_n\|_H^2 \mathrm{d}s + 2\int_0^t \langle g_n, y_n\rangle\, \mathrm{d}s \leqslant$$
$$2\int_0^t \langle Bu + f, y_n\rangle\, \mathrm{d}s,$$

注意到 $|g_n(y_n)| < C(1+\|y_n\|_H)$, $Bu+f$ 是有界的, V 是连续嵌入 H 中的, 于是我们有

$$\|y_n\|_H^2 \leqslant C_1 + C_2\int_0^t \|y_n\|_H^2 \mathrm{d}s \qquad (C_1, C_2 > 0). \tag{2}$$

利用 Gronwall 不等式并且注意到 $y_n = y_n(0) + \int_0^t y_n' \mathrm{d}s$, 可以得到

$$\|y_n\|_H \leqslant C_3, \quad \|y_n'\|_H \leqslant C_4 \qquad (C_3, C_4 > 0).$$

这里 C_1, C_2, C_3, C_4 都是不依赖 n 和 t 的常数.

依据 Ascoli_arzela 定理, 我们得到以下结果:

y_n 强收敛于 y, $y_n, y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$,

y_n' 弱收敛于 y', $y_n', y' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

下面我们来证明 $y \in Y(u)$.

很显然, $Ay, Ay_n \in L^\infty(0, T; V')$, 且 Ay_n 弱收敛于 Ay.

此外, g_n 是有界的(这可由假设(H_2) 以及前面证明的结果得来的). 因此, 我们假定 g_n 弱收敛于 g. 根据命题 1, 存在连续函数 y, $y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, y_n 强收敛于 y.

类似[6]的做法, 容易验证:

$y_n(x, t) \to y(x, t) \qquad (n \to \infty$, a. e. $(x, t) \in Q)$.

根据 Egorov 定理, 对于任给的 $\delta > 0$, 存在一个子集 $Q_\delta \subseteq Q = \Omega \times [0, T]$ 且 $|Q_\delta| \leqslant \delta$, 使得在 $Q \setminus Q_\delta$ 上, $y_n(x, t)$ 一致收敛于 $y(x, t)$.

也就是: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在一个正整数 N, 当 $n > N$ 时有,

$$|y_n(x, t) - y(x, t)| \leqslant \varepsilon \qquad (\forall (x, t) \in Q \setminus Q_\delta).$$

设 χ 是一个磨光子, 满足 $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\chi \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\chi \subset (-1, 1)$, 以及 $\int_R \chi(\xi)\mathrm{d}\xi = 1$.

设 $b_\varepsilon(\xi) = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \chi\left(\frac{\xi - z}{\varepsilon}\right) b(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z| = 1} \chi(z)\, b(\xi - \varepsilon z)\,\mathrm{d}z$.

为方便计, 记 b_n 为 $b_{1/n}$(n 是任意的正整数).

对几乎所有的 $(x, t) \in Q \setminus Q_\delta$, 当 $1/n \leqslant \varepsilon$ 和 $n > N$ 时, 显然有

$$\underline{b}_n(y_n(x, t)) = b_n(y_n(x, t)) = b(y_n(x, t)) \leqslant b_\varepsilon(y_n(x, t)) \leqslant b_{2\varepsilon}(y(x, t)).$$

因此, 对所有的 $\mu \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $\mu \leqslant 0$, 可以得到

$$\int_{Q \setminus Q_\delta} g(x, t)\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty}\int_{Q \setminus Q_\delta} b_n(y_n(x, t))\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_{Q \setminus Q_\delta} b_{2\varepsilon}(y(x, t))\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_{Q \setminus Q_\delta} g(x, t)\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup\int_{Q \setminus Q_\delta} b_{2\varepsilon}(y(x, t))\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_{Q \setminus Q_\delta} b(y(x, t))\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

类似地, 还可以得到:

$$\int_{Q \setminus Q_\delta} g(x, t)\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{Q \setminus Q_\delta} \underline{b}(y(x, t))\,\mu(x, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

因此, 我们得到:

$$g(x, t) \in \beta(y(x, t)) \qquad (\text{a. e. } (x, t) \in Q \setminus Q_\delta).$$

当 $\delta \to 0_+$, 进一步有:

$$b(x,t)\in\beta(y,(x,t))\cdot$$

此外,我们还注意到: $y_n(0)\to y_0=y(0)\cdot$

这样,我们完成了命题 2 的证明•

定理 1 对任一 $u\in U_{ad}$, 问题$(\mathrm{P}(u))$ 至少有一个解•

证明 任给 $u\in U_{ad}$, 设 $p=\inf\left\{I(y,u):y\in Y(u),F(y)\in S\right\}$, 则存在一个极小化序列

$$\left\{y_n,\ y_n\in Y(u),\ F(y_n)\in S\right\}\text{使得}I(y_n,u)<p+1/n\cdot$$

从定理 2 的证明过程中,我们可以推知 $\{y_n\}$ 是有界的, 且存在一个子序列$\{y_n\}$(标记不变), 使得 y_n 弱收敛于y, $y_n, y\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, y_n 强收敛于y, $y_n, y\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap C([0,T]:L^2(\Omega))$, 并且 $y\in Y(u)$•

依(H_5), 我们得到 $I(y,u)\leqslant I(y_n,u)<p+1/n$•

现在我们来考虑 $F(y)$ 和 S 的关系•

由(H_3), 当 $F(y_n)\in S$ 时, 我们容易推得 $F(y)\in S$• 定理证毕•

命题 3 如果 u_n 弱收敛于u, $u_n, u\in U_{ad}$, $y_n\in Y(u_n)$, 那么必存在一个子序列$\{y_n\}$(标记不变) 使得:

y_n 弱收敛于y; $y_n, y\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$;

y_n 强收敛于y; $y_n, y\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap C([0,T]:L^2(\Omega))$

且 $y\in Y(u)$•

证明 命题 3 的证明与命题 2 的类似• 只需在命题 2 的证明过程中以 u_n 代替u 且注意u_n 是有界的•

定理 2 最优控制问题(P) 至少有一个解•

证明 设

$$q=\inf\left\{E(u):u\in U_{ad}\right\}=\inf\left\{I(y(u),u):u\in U_{ad},y\in Y(u),F(y)\in S\right\}\cdot$$

如果 $\{u_n\}(u_n\in U_{ad})$ 是问题(P) 的一个极小化序列, 那么我们假定 $E(u_n)<q+1/n$• 由假设(H_5) 的(ii) 推知 $\{u_n\}$ 是有界的• 因此, 其存在一个子序列$\{u_n\}$(标示不变) 使得 u_n 弱收敛于 u_*, $u_n, u_*\in U$• 又因为 U_{ad} 是闭凸集, 所以有 $u_*\in U_{ad}$•

我们来考虑问题$(\mathrm{P}(u_n))$ 的解 $y(u_n)$• 容易推知 $y(u_n)$ 是有界的, 因此其存在一个子序列$\{y(u_n)\}$(标示不变) 使得 $y(u_n)$ 弱收敛于 y_*, $y(u_n), y_*\in V$• 这样, 由命题 3, 我们得到 $y_*\in Y(u)$•

此外, 依假设(H_5), 我们有 $q=I(y_*,u_*)$•

显而易见, 由命题 3 我们还得到: 当 $F(y_n)\in S$ 时, $F(y)\in S$• 证毕•

下面将考虑该问题的逼近•

设 h 是一个离散参数, $V_h\subset V\subset L^\infty(\Omega)$, $U_h\subset U$ 分别是V和U的有限维子空间• U_{ad}^h 是 U_h 的凸闭子集但不必包含于 U_{ad}•

为了更好地讨论逼近问题, 我们给出另外两个假设•

(H_6) $\forall v\in V\cap L^\infty(\Omega)$, $\exists\, v_h\in V_h$ 使得v_h 强收敛于v, $v_k, v\in L^\infty(\Omega)$, V; $\forall\, u\in U_{ad}$, $\exists\, u_h\in U_{ad}$ 使得u_k 弱收敛于u, $u_k, u\in U$•

(H_7) $V_h\in y_h$ 弱收敛于y, y_k, $y\in V$, $U_{ad}^h\in$ 弱收敛于 u, u_k, $u\in U\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0+}I(y_h,u_h)=$

$I(y, u)$

我们定义 $Y_h(u_h)$ 为 $(*)_h$ 的解集•

$$\begin{cases} y_h' + Ay_h + \beta(y_h) \in Bu_h + f, \\ y_h(0) = y_{0,h}\text{•} \end{cases} \qquad (*)_h$$

问题$(P_h(u_h))$:

求解 $y_h \in Y_h(u_h)$ 使得 $I(y_h, u_h) \leqslant I(y_h, u_h)$, $\forall y_h \in Y_h(u_h)$ 且 $F(y_h) \subset S$•

我们用 $E(u_h)$ 来表示 $I(y_h, u_h)$, 这里 $y_h \in Y_h(u_h)$ 是问题$(P_h(u_h))$ 的解•

问题(P_h):

求解 $u_h^* \in U_{ad}^h$ 使得 $E(u_h^*) \leqslant E(u_h) \quad (\forall u_h \in U_{ad}^h)$•

像前面命题、定理的证明, 我们可以得到以下结果•

引理 1 设 $u_h \in U_{ad}^h \cup U_{ad}$, 则存在$(*)_h$ 的一个解 $y_h \in V_h$ 使得

$$\begin{cases} y_h \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \\ y_h' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\text{•} \end{cases}$$

引理 2 给定 $u_h \in U_{ad}^h \cup U_{ad}$, 任一序列$\{y_{h,l}\} \subset Y_h(u_h)$ 均有一个子序列$\{y_{h,l}\}$(标示不变) 使得 $y_{h,l}$ 强收敛于 $y_k(l \to \infty)$ 且 $y_h \in Y_h(u_h)$•

定理 3 对所有的 $u_h \in U_{ad}^h \cup U_{ad}$, 问题$(P_h(u_h))$ 至少有一个解•

引理 3 如果 $u_{h,k}$ 弱收敛于 u_h, $u_{h,k}, u_h \in U_{ad}^h \cup U_{ad}$, 则其存在一个子序列 $y_{h,l} \in Y_h(u_h)$(标示不变) 使得 $y_{h,l}$ 弱收敛于 $y_h(l \to \infty)$, $y_{h,l}, y_h \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $y_{h,l}$ 强收敛于 $y_h(l \to \infty)$, $y_{h,l}, y_h \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ 且 $y_h \in Y_h(u_h)$•

定理 4 问题(P_h) 至少有一个解•

命题 4 设 $u_h \in U_{ad}^h$ 且 u_k 弱收敛于 $u(h \to 0+)$, $u_k, u \in U$ 且 $y_h \in Y_h(u_h)$• 则其存在一个子序列$\{y_h\}$(标示不变) 及 $y \in Y(u)$ 使得 y_h 弱收敛于 $y(h \to 0+)$, $y_h, y \in V$•

证明 依假设(H_5)_(ⅱ), 我们知道 u_h 是有界的• 从命题 2 的证明知道 y_h 也是有界的• 因此, 存在子序列$\{u_h\}$、$\{y_h\}$ 使得 u_h 弱收敛于 u, y_h 弱收敛于 $y(h \to 0+)$•

类似于命题 2 的证明, 我们只需将 n 替换为 h 即可证得• 命题得证•

我们用 $Y(u)$ 表示集合

$Y(u) = \{y \in V: \exists \{u_h\}, u_h \in U_{ad}^h$, 满足 $u_h \to u$ 在 U 中弱, $y_h(u_h) \to y$ 在 V 中弱, $y_h(u_h) \in Y_h(u_h)\}$

显然 $\phi \neq Y(u) \subset Y(u)$, $\forall u \in U_{ad}$•

定理 5 设 u_h^* 是问题(P_h) 的一个解, $y_h^* \in V_h$ 是对应其问题$(P_h(u_h^*))$ 的解• 则存在它们子序列$\{u_h^*\}$ 和$\{y_h^*\}$, 使得

$$u_h^* \text{ 弱收敛于 } u_*,\ u_h^*, u_* \in U, \qquad (3)$$

$$y_h^* \text{ 弱收敛于 } y_*,\ y_h^*, y_* \in V\text{•} \qquad (4)$$

这里 u_h^* 是问题$(P(u_*))$ 的解•

注: 问题$(P(u))$ 定义为当 $y \in Y(u)$ 时的 $P(u)$• 类似地, 我们也可定义问题(P)•

证明 序列$\{u_h^*\}$ 和$\{y_h^*\}$ 是有界的• 因此存在子序列满足(3) 和(4)• 由命题 4 及 $Y(u)$ 的定义, 我们有 $y_* \in Y(u_*)$• 此外, 问题(P_h) 表明

$$I(y_h^*, u_h^*) \leqslant I(y_h, u_h), \forall u_h \in U_{ad}^h, \forall y_h \in Y_h(u_h) \cdot \tag{5}$$

给定 $u \in U_{ad}$ 和 $y \in Y(u)$, 依集合 $Y(u)$ 的定义, 可以推得存在一个序列 $\{u_h\}$, $u_h \in U_{ad}^h$, 使得 u_h 弱收敛于 u, $u_h, u \in U$, 并且对所有的 $y \in Y_h(u_h)$ 有 y_h 弱收敛于 y, $y_h, y \in V$・

在(5)式的右端置 $y_h = y_h$, $u_h = u_h$, 当 $h \to 0^+$ 时, 由假设(H7)推知

$$I(y^*, u^*) \leqslant I(y, u) \quad (\forall u \in U_{ad}^h, \forall y \in Y_h(u_h)) \cdot$$

即 u^* 是问题(P)的解, y^* 是对应问题(P(u^*))的解・ 定理得证・

[参 考 文 献]

[1] Barbu V. Optimal Control of Variational Inequalities[M]. London: Pitman, 1983.

[2] Tiba D. Optimality conditions for distributed control problems with nonlinear state equation[J]. SIAM J Control Optim, 1985, **23**(1): 85—110.

[3] Barbu V. Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems[M]. Boston: Academic Press, Inc, 1993.

[4] WANG Geng_sheng. Optimal control of parabolic variational inequality involving state constraint[J]. Nonlinear Anal, 2000, **42**: 789—801.

[5] Mignot F, Puel J P. Optimal control in some variational inequalities[J]. SIAM Control and Optim, 1984, **22**: 466—476.

[6] GUO Xing_ming. On existence and uniqueness of solution of hyperbolic differential inclusion with discontinuous nonlinearity[J]. J Math Anal Appl, 2000, **241**: 198—213.

[7] Haslinger J, Panagiotopoulos P D. Optimal control of systems governed by hemivariational inequalities existence and approximation results[J]. Nonlinear Anal, 1995, **24**(1): 105—119.

[8] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York: Wiley, 1983.

[9] Eberhard Zeidler. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications_II/A: Linear Monotone Operators[M]. New York: Springer_Verlag, 1990.

[10] Eberhard Zeidler. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications_II/B: Nonlinear Monotone Operators[M]. New York: Springer_Verlag, 1990.

Optimal Control of Parabolic Variational Inequalities With Stat Constraint

GUO Xing_ming, ZHOU Shi_xing

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,

Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract: The optimal control problem of parabolic variational inequalities with the state constraint and nonlinear, discontinuous nonmonotone multivalued mapping term and its approximating problem are studied, which generalizes some obtained results.

Key words: state constraint; variational inequality; discontinuous and nononotone nonlinear multivalued mapping; optimal control