

文章编号: 1000-0887(2003) 09-0906-13

# 有限深度两层流体系统中运动点源生成的内波及其与自由面的相互作用\*

魏 岗<sup>1,2</sup>, 乐嘉春<sup>1</sup>, 戴世强<sup>1</sup>

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海, 200072;  
2. 解放军理工大学 理学院, 南京 211101)

(本刊编委戴世强来稿)

**摘要:** 基于水波动力学势流理论, 以二流体系统中点源运动为基本模型, 采用 Green 函数法, 研究了分层流体中内部扰动诱生的内波对自由面的影响, 探讨对合成孔径雷达成像起重要作用的自由面辐散场的变化规律. 研究表明: 当上下层流体密度跃变较大、源接近密跃层且 Froude 数  $Fr$  接近内波模式的临界值  $Fr_2$  时, 内波模式导致的自由面辐散场强度与表面波模式的贡献相当, 两者具有强烈的耦合作用, 理论分析与实验结果定性一致.

**关键词:** 内波; 表面波; 分层流体; 辐散场; 波-波相互作用  
**中图分类号:** O353      **文献标识码:** A

## 引 言

在海洋内部, 当出现温度或密度跃层时, 内波现象极为明显<sup>[1, 2]</sup>. 激励内波的因素可以来自海面、海底或海水内部, 或兼而有之, 如: 风应力, 不平海底, 水面或水下物体的运动等. 无限深静止水面上匀速运动的点源生成的液面波动被限制在半角为  $\theta_c = 19.5^\circ$  的 V 型域内, 这就是所谓的 Kelvin 船行波<sup>[3]</sup>. 水下运动物体诱生的波亦被称为 Kelvin 波<sup>[4]</sup>. 在实验室中, 当物体在分层流体中运动时能从自由面观察到内波现象, 一定条件下它是一种可分辨的船行波的 V 型尾迹<sup>[5, 6]</sup>, 上述现象能否为合成孔径雷达(SAR)遥测提供有效的海洋表面信息是一个值得探讨的问题.

Lighthill<sup>[7]</sup>是较早系统建立连续分层流体中点源运动(包括水平运动、垂直运动、振荡运动等)理论的学者之一. [8]讨论了在一定厚度的密跃层中点源运动的近场和远场的波形问题. [9]研究了偶极子运动诱生的内波的表面效应. [10]借助 Phillips<sup>[11]</sup>的理论, 解析地证明了表面 Kelvin 波只存在一种模式, 而内部 Kelvin 波存在无穷多模式. [12]证明了无论是自由面生成的深水波、有限深水波、毛细波还是流体内部生成的内波, Kelvin 波波形只取决于色散关系.

Hudimac<sup>[13]</sup>将海洋中的密度跃层结构简化为两层流体, 在线化基础上研究了在两层无限

\* 收稿日期: 2002\_02\_01; 修订日期: 2003\_03\_21  
基金项目: 上海市教委博士点基金资助项目; 国防水动力预研基金资助项目  
作者简介: 魏岗(1962—), 男, 南京人, 副教授, 博士(E-mail: gwei@mail.shu.edu.cn).

深海洋模型中点源在上层运动的问题,证明了当内 Froude 数  $Fr = U/(Nh) > 1$  时仅存在侧向波系,而当  $Fr < 1$  时既存在侧向波系也存在横向波系,这里  $U$  为点源运动速度,  $h$  为特征水深,  $N$  为 Brunt\_Vaisala 频率。[14] 将点源置于自由面上,简化了[13]的数学问题,明确了两层流体中存在两种模式的波,其一为表面波模式,其二为界面波模式。上述两层流体模型的研究侧重于界面波本身,而对于系统中各种波模式之间的相互作用没有建立较为明确的关系,因此对特殊条件下各种波模式之间的相互作用,以及可能对自由面产生的影响缺乏细致的研究。文献[15]在有限深的两层海洋模型中推导了点源在上层流体中水平匀速运动的 Green 函数,明确地给出了这两种主要波模式之间的相互作用及其对自由表面的影响,分析侧重于自由面和界面的波幅变化规律,但结果尚缺乏实验支持。

理论和观测研究<sup>[16-20]</sup>认为:内波在自由面产生的辐合辐散导致海洋表面流的变化,引起对表面短波的调制,进而产生 SAR 能够分辨的信号。这种能被 SAR 成像的典型辐散(或辐合)强度为  $10^{-3} \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 。[21, 22] 证实了尾迹坍塌诱生的内波在自由面的辐散(或辐合)强度可达  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ,该模型仅反映一种内波机制对自由面的影响,对内波多模式之间的相互作用导致自由表面辐散场的变化机理尚未作深入探究。

本文在文献[15]的基础上讨论了点源在两层有限深海洋的下层作匀速运动产生的内波,分析了由此产生的两种模式波之间的相互作用,以及这种作用对自由表面辐散场的影响,所得结果与实验<sup>[6]</sup>定性一致。

## 1 基本模型

假设以水平匀速运动的点源相对于直角坐标系  $Oxyz$  静止,如图 1 所示,它等价于两层流系统中存在一个速度为  $-U$  的基本流动。取  $xOy$  平面与两层流体系统未扰界面重合,  $z$  轴向上为正,点源位于下层流体,用坐标  $(\xi, \eta, \zeta)$  表示(注意这里  $\zeta < 0$ )。上、下流体层的深度分别用  $\rho_1, h_1$  和  $\rho_2, h_2$  表示,并设未扰情况下两层流体处于静力稳定状态即令  $\rho_2 > \rho_1$ 。

考虑定常、无旋、线性化模型,借助 Rayleigh<sup>[3]</sup> 确定积分形式解中奇点位置的方法,引入正比于扰动速度的虚拟耗散力,比例系数  $\mu > 0$ 。引入速度势  $\Phi^{(m)}(x, y, z)$ ,  $m = 1, 2$  分别代表上、下流体层,控制方程为

$$\nabla^2 \Phi^{(1)} = 0 \quad (1a)$$

和

$$\nabla^2 \Phi^{(2)} = \delta(x - \xi, y - \eta, z - \zeta), \quad (1b)$$

式中  $\delta(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$  为 Dirac delta 函数,自由面和界面上线性化的边界条件为<sup>[3, 14]</sup>

$$\sigma_0 \Phi_z^{(1)} + \Phi_{xx}^{(1)} - \mu \Phi_x^{(1)} = 0 \quad (z = h_1), \quad (2)$$

$$\gamma(\sigma_0 \Phi_z^{(1)} + \Phi_{xx}^{(1)} - \mu \Phi_x^{(1)}) = \sigma_0 \Phi_z^{(2)} + \Phi_{xx}^{(2)} - \mu \Phi_x^{(2)} \quad (z = 0), \quad (3)$$

$$\Phi_z^{(1)} = \Phi_z^{(2)} \quad (z = 0), \quad (4)$$

$$\Phi_z^{(2)} = 0 \quad (z = -h_2), \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi^{(m)} = 0 \quad (6)$$

上述方程中系数  $\gamma = \rho_1 / \rho_2$ ,  $\sigma_0 = g / U^2$ ,  $g$  为重力加速度,最后结果中可令  $\mu = 0$ 。

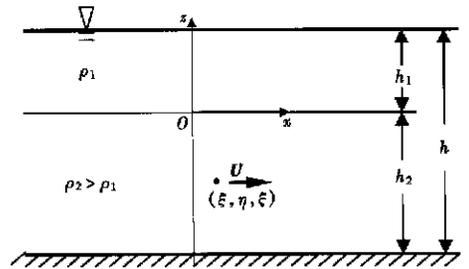


图 1 点源在两层有限深海洋下层运动的坐标系

## 2 Green 函数法与形式解

### 2.1 Green 函数

假设方程(1)的解具有如下形式

$$\Phi^{(1)} = \Phi_0^{(1)} \text{ 和 } \Phi^{(2)} = \frac{1}{r} + \Phi_0^{(2)}, \quad (7a, b)$$

其中  $\frac{1}{r^2} = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$  是任意点至点源的距离, 未知函数  $\Phi_0^{(m)}$  ( $m = 1, 2$ ) 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \Phi_0^{(m)} = 0 \quad (m = 1, 2). \quad (8)$$

作 Fourier 变换,

$$\Phi(k_1, k_2, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, z) \exp[-i(k_1 x + k_2 y)] dx dy, \quad (9)$$

$$\Phi(x, y, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_1, k_2, z) \exp[-i(k_1 x + k_2 y)] dk_1 dk_2. \quad (10)$$

方程(8)可写为

$$\Phi_{0,zz}^{(m)} - (k_1^2 + k_2^2) \Phi_0^{(m)} = 0 \quad (m = 1, 2), \quad (11)$$

其解为

$$\Phi_0^{(m)}(k_1, k_2, z) = B_+^{(m)}(k_1, k_2) e^{kz} + B_-^{(m)}(k_1, k_2) e^{-kz}, \quad (12)$$

式中  $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{i} + k_2 \mathbf{j}$  为波矢,  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  为其幅值. 边界条件可写为

$$\sigma_0 \varphi_z^{(1)} - k_1^2 \varphi^{(1)} - i\mu k_1 \varphi^{(1)} = 0 \quad (z = h_1), \quad (13)$$

$$\gamma(\sigma_0 \varphi_z^{(1)} - k_1^2 \varphi^{(1)} - i\mu k_1 \varphi^{(1)}) = \sigma_0 \varphi_z^{(2)} - k_1^2 \varphi^{(2)} - i\mu k_1 \varphi_x^{(2)} \quad (z = 0), \quad (14)$$

$$\varphi_z^{(1)} = \varphi_z^{(2)} \quad (z = 0), \quad (15)$$

$$\varphi_z^{(2)} = 0 \quad (z = -h_2), \quad (16)$$

上述方程中  $\varphi^{(1)} = \Phi_0^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)} = \exp[-k|z - \zeta|]/k + \Phi_0^{(2)}$ , 将解(12)代入边界条件, 就得到系数  $B_+^{(m)}(k_1, k_2)$  和  $B_-^{(m)}(k_1, k_2)$  ( $m = 1, 2$ ) 应满足的代数方程组

$$\begin{pmatrix} b & a e^{-k(h+d)} & 0 & 0 \\ \gamma b & \gamma a & -b & -a \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -e^{k(h-d)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_+^{(1)} \\ B_-^{(1)} \\ B_+^{(2)} \\ B_-^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a e^{k\zeta}/k \\ -e^{k\zeta}/k \\ -e^{-k\zeta}/k \end{pmatrix}, \quad (17)$$

式中  $h = h_1 + h_2$ ,  $d = h_1 - h_2$ ,  $\varepsilon = 1 - \gamma$ ,  $(a, b) = k \pm \sigma_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta$ ,

$$\Delta(k, \theta) = 2\varepsilon ab \cosh kd + b(\gamma a + b) e^{kh} + a(a + \gamma b) e^{-kh}. \quad (18)$$

分析上述方程, 我们有如下结论:

1) 当波数  $k \rightarrow \infty$  时, 方程(18)只有平凡解, 这种情况应排除, 因此本文只讨论较长的波.

2) 当  $\Delta = 0$  时, 方程(18)无解, Fourier 积分(10)出现奇性, 比较文献[15]的讨论, 点源置于下层流体与置于上层流体的  $\Delta(k, \theta)$  是相同的, 故极点值  $k$  与点源是否置于上层流体或下层流体无关.

### 2.2 $k$ 平面的围道积分

令<sup>[15]</sup>  $\kappa = k + i\mu \sec \theta$ ,  $t_n = \tanh kh_n$ ,  $n = 1, 2$ , 则有

$$\Delta(k, \theta) = 4 \cosh kh_2 \cosh kh_1 \left[ \kappa - \frac{1}{2} \sigma_0 \sec^2 \theta \Omega_1(k) \right] \left[ \kappa - \frac{1}{2} \sigma_0 \sec^2 \theta \Omega_2(k) \right], \quad (19)$$

其中

$$\Omega_n(k) = \frac{t_1 + t_2}{1 + \sqrt{t_1 t_2}} \left[ 1 + (-1)^{n+1} \sqrt{1 - 4(1 - \gamma) \frac{t_1 t_2 (1 + \sqrt{t_1 t_2})}{(t_1 + t_2)^2}} \right] \quad (n = 1, 2) \cdot \quad (20)$$

积分(10)的奇点是

$$k_n = \frac{1}{2} \alpha_0 \sec^2 \theta \Omega_n(k_n) - i \mu \sec \theta \quad (n = 1, 2) \cdot \quad (21)$$

上、下层流体速度势可写成积分

$$\Phi_0^{(1)}(x, y, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} H^{(1)}(k, \theta, z) \frac{e^{ik\omega}}{\Delta(k, \theta)} dk d\theta, \quad (22)$$

$$\Phi_0^{(2)}(x, y, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} H^{(2)}(k, \theta, z) \frac{e^{ik\omega}}{\Delta(k, \theta)} dk d\theta, \quad (23)$$

式中  $H^{(1)}(k, \theta, z)$  和  $H^{(2)}(k, \theta, z)$  分别为

$$\begin{aligned} H^{(1)}(k, \theta, z) &= -a(a+b)e^{kz}(e^{-k(d-\zeta)} + e^{-k(h+\zeta)}) + \\ &\quad b(a+b)e^{-kz}(e^{k(d-\zeta)} + e^{k(h+\zeta)}); \\ H^{(2)}(k, \theta, z) &= -e^{kz}[a(e^{-k(d-\zeta)} + e^{-k(h+\zeta)}(a+b\gamma) + ab(e^{k(d-\zeta)} + \\ &\quad e^{k(h+\zeta)})\xi] + e^{-kz}[b(e^{k(d-\zeta)}(b+a\gamma) - ae^{-k(h-\zeta)}(a+b\gamma) + \\ &\quad ab(e^{-k(h+\zeta)} - e^{k(d+\zeta)})\xi], \end{aligned}$$

而

$$\omega = -r \cos(\theta + \phi) = (x - \xi) \cos \theta + (y - \eta) \sin \theta, \quad (24)$$

$\theta, \phi$  分别为波矢  $k(k_1, k_2)$  和平面位矢  $r(x, y)$  与  $x$  方向的夹角, 如图2所示. 若令  $\gamma = 1$ , 容易验证方程(23)即为均匀有限深水中的 Green 函数. 将(22), (23)写为

$$\Phi_0^{(m)}(x, y, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} H^{(m)}(k, \theta, z) \frac{e^{ik\omega}}{\Delta(k, \theta)} dk d\theta \right\}. \quad (25)$$

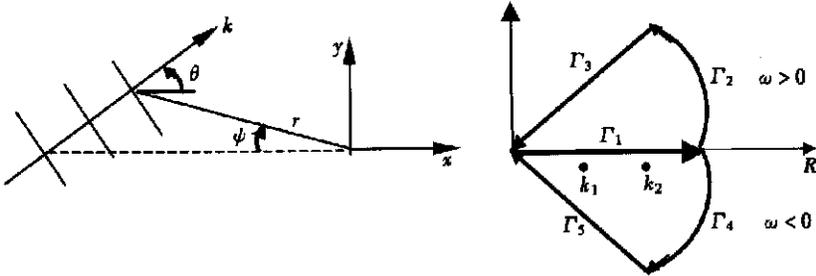


图2 平面坐标系统和  $k$  平面的围道积分

为计算上式, 取图2所示的围道,  $\Gamma_3, \Gamma_5$  与实轴成  $45^\circ$  角. 考虑 Kelvin 波的对称性, 限制  $y \geq 0$ , 当  $\pi/2 - \phi < \theta < \pi/2$  时,  $\omega > 0$ , 取对应的围道  $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3$ , 此时围道内无极点; 当  $-\pi/2 < \theta < \pi/2 - \phi$  时,  $\omega < 0$ , 取对应的围道  $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_5$ , 此时围道内有两个极点. 应用留数定理, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H^{(m)}(k, \theta, z) \frac{e^{ik\omega}}{\Delta(k, \theta)} dk &= \int_0^{\infty} \frac{D_+(u, \theta)}{\Delta_+(u, \theta)} du, \\ \int_{-\infty}^{\infty} H^{(m)}(k, \theta, z) \frac{e^{ik\omega}}{\Delta(k, \theta)} dk &= \end{aligned} \quad (26)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{D_-(u, \theta)}{\Delta_-(u, \theta)} du - 2\pi i \sum_{n=1}^2 H^{(m)}(k_n, \theta) \frac{e^{ik_n \omega}}{\Delta'(k_n, \theta)}, \quad (27)$$

式中  $\Delta'(k_n, \theta) = \left. \frac{\partial \Delta}{\partial k} \right|_{k=k_n}$ , 函数  $D_{\pm}(u, \theta)$  和  $\Delta_{\pm}(u, \theta)$  分别为

$$D_{\pm} = (1+i)H^{(m)}[u(1 \pm i), \theta, z]e^{-1 \omega u} e^{\pm i \omega u},$$

$$\Delta_{\pm}(u, \theta) = \Delta(u(1+i), \theta).$$

代入(25)得

$$\Phi_0^{(m)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{D_+ \Delta_+ + D_- \Delta_-\}}{\Delta_+ \Delta_-} du d\theta + \sum_{n=1}^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H^{(m)}(k_n, \theta) \frac{e^{ik_n \omega}}{\Delta'(k_n, \theta)} d\theta \right\}, \quad (28)$$

上式的第一项量级为  $O(1/r)$ , 而第二项量级为  $O(1/\sqrt{r})$ , 考虑  $r \gg h$  的远场效应, 故有

$$\Phi_0^{(m)} \sim \sum_{n=1}^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H^{(m)}(k_n, \theta) \frac{e^{ik_n \omega}}{\Delta'(k_n, \theta)} d\theta \right\}. \quad (29)$$

定义基于总深度的 Froude 数  $Fr = U/(gh)^{1/2}$  和临界 Froude 数<sup>[15]</sup>

$$Fr_n^2 = \frac{1}{2h} \left. \frac{\partial \Omega_n}{\partial k} \right|_{k=0} = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1-\gamma)h_1 h_2}{h^2}}, \quad (30)$$

其中  $n = 1, 2$  分别对应最快的表面波模式和最快的内波模式,  $Fr_1$  恒大于  $Fr_2$ : 表明表面波模式的传播速度总是大于内波模式的传播速度. 对于  $Fr < Fr_n$  的流动, 当  $\theta$  位于  $0 < \theta < \pi/2$  区间, 式(29)的被积函数总存在极点  $k_n$ ; 而对于  $Fr > Fr_n$  的流动, 当且仅当  $\theta > \theta^* = \arccos(Fr_n/Fr)$  时, 极点  $k_n$  才存在, 此时式(29)的积分区间是  $\theta^* < \theta < \pi/2$ .

## 3 辐散场

### 3.1 表面辐散场

辐散场可由下式确定

$$\Theta^{(m)} = \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} = - \frac{\partial w^{(m)}}{\partial z} = - \left. \frac{\partial^2 \Phi^{(m)}}{\partial z^2} \right|_{z=h_1}, \quad (31)$$

考虑源后远场  $r \gg h$  驻相点附近的辐散场, 因  $\partial^2 \Phi_0^{(2)}/\partial z^2 \sim O(1/\sqrt{r})$ , 而  $\partial^2/\partial z^2(1/r^{\xi}) \sim O(1/r^2)$  为高阶小量, 故自由面 ( $m = 1$ ) 和界面 ( $m = 2$ ) 的散度场可统一表示为

$$- \Theta^{(m)}(r, \phi) \sim \sum_{n=1}^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 H^{(m)}(k_n, \theta)}{\partial z^2} \frac{e^{i(r/h)[-hk_n \cos(\theta + \phi)]}}{\Delta'(k_n, \theta)} d\theta \right\} = \sum_{n=1}^2 \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D^{(m)}(k_n, \theta, z) e^{i(r/h)[f_n(\theta + \phi)]} d\theta \right\}, \quad (32)$$

式中  $f_n(\theta, \phi) = -hk_n \cos(\theta, \phi)$ ,  $D^{(m)}(k_n, \theta, z) = \left. \frac{\partial^2 H^{(m)}}{\partial z^2} \right|_{\Delta'(k_n, \theta)} \Big|_{z=h_1}$ . 上式表明, 不论是

自由面辐散场还是界面辐散场, 两者都包括来自表面波模式 ( $n = 1$ ) 和内波模式 ( $n = 2$ ) 的贡献.

### 3.2 驻相点

远场驻相点满足方程

$$\tan \phi = q_n(\theta) = \frac{\sec \theta \tan \theta - 0.5 \sec^2 \theta \sin \theta + 0.25 \sigma_0 \sec^4 \theta \sin \theta (\partial \Omega_n / \partial k)}{\sec \theta \tan^2 \theta + 0.5 \sec^2 \theta \cos \theta - 0.25 \sigma_0 \sec^4 \theta \cos \theta (\partial \Omega_n / \partial k)}, \quad (33)$$

则 Kelvin 船行波的最大半角  $\phi_n = \arctan(q_n(\theta^*))$ ,  $\theta^*$  对应最大半角  $\phi_n$ 。考虑对称性, 取  $\theta \geq 0$ , 对于  $Fr > Fr_n$ , 只存在一个驻相点  $\theta_{n,1}$ ,  $\phi_n = \arcsin(Fr_n/Fr)$  为最大半角; 对于  $Fr < Fr_n$ , 存在两个驻相点  $\theta_{n,1}, \theta_{n,2}$ , 最大半角  $\phi_n$  需由  $d \tan \phi / d \theta = 0$  隐式确定。与经典的 Kelvin 波型类比<sup>[3], [12]</sup>,  $\theta$  在  $[0, \theta^*]$  范围取值即为横向波系,  $\theta$  在  $[\theta^*, \pi/2]$  范围取值即为侧向波系。

### 3.3 辐散场的峰线位置

对于大参数  $r/h \gg 1$ , 根据驻相法, 由方程(32)可得

$$- \Theta^{(m)}(r, \phi) = \sum_{n=1}^2 \sum_{l=1}^2 A_{n,l}^{(m)}(r, \phi) \sin \left[ \left[ \frac{r}{h} \right] f_n(\theta_{n,l}, \phi) + (-1)^{l+1} \frac{\pi}{4} \right], \quad (34)$$

其中

$$A_{n,l}^{(m)}(r, \phi) = D^{(m)}[k_n(\theta)_{n,l}, \theta_{n,l}] \sqrt{\frac{2\pi}{\left| \frac{r}{h} \right| f_n''(\theta_{n,l}, \phi)}} \quad (35a)$$

和

$$f_n'' = \frac{\partial^2 f_n(\theta_{n,l}, \phi)}{\partial \theta^2}. \quad (35b)$$

可以看出表面辐散场  $\Theta^{(1)}(r, \phi)$  通常由四种波系构成: 分别是表面波模式( $n=1$ ) 诱生的侧向波系( $l=1$ ) 和横向波系( $l=2$ ), 及内波模式( $n=2$ ) 诱生的侧向波系( $l=1$ ) 和横向波系( $l=2$ )。辐散场峰线的形状由等位相线方程确定, 即

$$\frac{r}{h} f_n(\theta_{n,l}, \phi) + (-1)^{l+1} \frac{\pi}{4} = \begin{cases} 2j\pi + \frac{\pi}{2} & (\text{当 } A_{n,l}^{(m)} > 0) \\ (2j+1)\pi + \frac{\pi}{2} & (\text{当 } A_{n,l}^{(m)} < 0) \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (36)$$

$A_{n,l}^{(m)}$  的符号取决于  $m$  和  $n$ , 与  $l$  无关。与波峰线比较<sup>[15]</sup>, 两者位相差  $\pi/2$ , 它表明: 在表面波的峰前谷后(或谷前峰后), 辐散场的调整幅度最大。由于峰线的形状与振幅大小无关, 因此辐散场的峰线有类似于 Kelvin 波峰线的形状, 如图 3 所示。

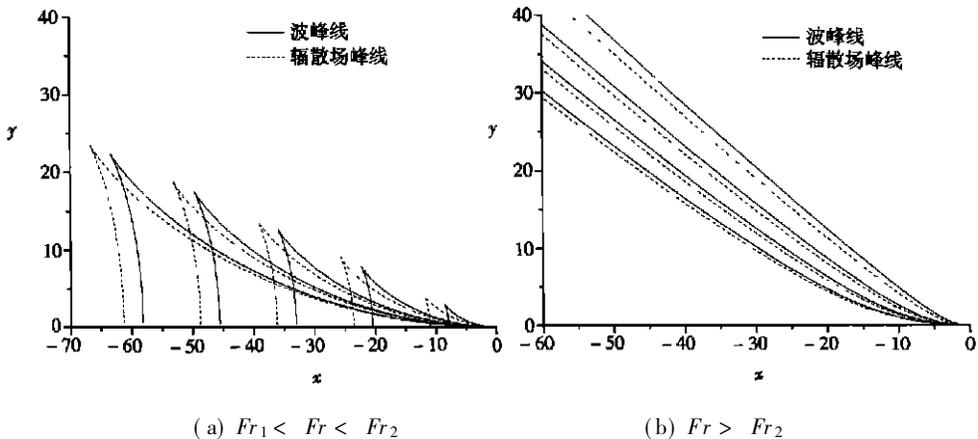


图 3 自由表面的波峰线和辐散场峰线

### 3.4 表面辐散场沿峰线的分布

辐散场振幅函数  $A_{n,l}^{(m)}$  取决于源的位置  $\zeta/h$ 、密跃层的位置  $h_1/h$ 、密度跃变的强度  $\gamma$  以及

描述潜体运动状态的 Froude 数  $Fr$  · 无量纲的振幅函数为

$$A_{n,l}^{(1)}(\phi) = Uh |A_{n,l}^{(1)}| \frac{\sqrt{8j - 2 + c + (-1)^{(l+1)}}}{\sqrt{8}} = D^{(1)}[k_n(\theta_{n,l}), \theta_{n,l}] \frac{\sqrt{-f_n(\theta_{n,l}, \phi)}}{\sqrt{|f_n(\theta_{n,l}, \phi)|}} \quad (37)$$

式中  $D^{(1)}[k_n(\theta_{n,l}), \theta_{n,l}] \equiv UhD^{(m)}[k_n(\theta_{n,l}), \theta_{n,l}]$ , 对于  $A_{n,l}^{(1)} > 0, c = 0$ , 而对于  $A_{n,l}^{(1)} < 0, c = 4$ . 为方便比较, 沿峰线的极角用最大半角  $\phi_n$  归一化, 即取横坐标为  $\phi/\phi_n$ , 纵坐标为  $A_{n,l}^{(m)}$  沿峰线的变化.

1) 源位置的影响

图 4 表示两种波模式对自由面振幅函数  $A_{n,l}^{(1)}$  的影响. 当点源从下层接近密跃层时, 侧向波系 ( $l = 1$ ) 和横向波系 ( $l = 2$ ) 的振幅函数  $A_{n,l}^{(1)}$  均随之增加. 因取  $Fr/Fr_n$  比值一定, 而  $Fr_1 > Fr_2$ , 故表面波模式对自由面辐散场的影响较内波模式要大的多, 即  $A_{1,l}^{(1)} > A_{2,l}^{(1)}$ . 在 V 型尾迹对称轴附近  $\phi/\phi_n < 0.6$ , 自由面的效应主要来自表面波模式横向波系的贡献, 而在 V 型尾迹的边缘附近  $\phi/\phi_n > 0.8$ , 表面波模式侧向波系的贡献明显增强. 在整个 Kelvin 船行波的影响域, 内波模式对自由面的影响主要来自它的横向波系.

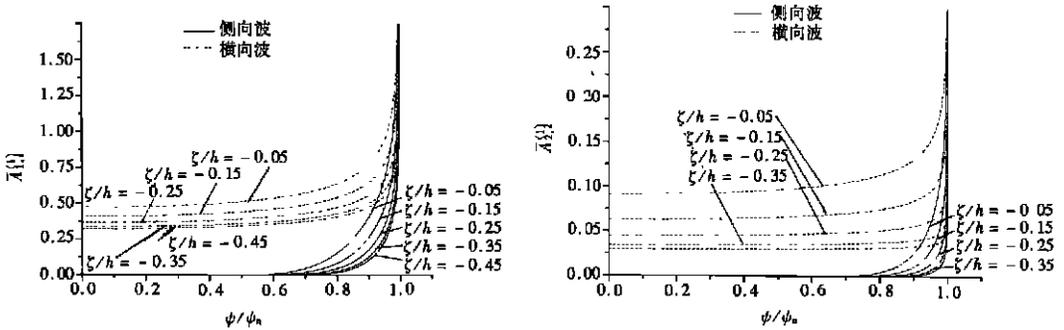


图 4 自由表面辐散(合)场振幅函数 ( $Fr/Fr_n = 0.7, h_1/h = 0.5, \gamma = 0.97$  表面波模式(左), 内波模式(右))

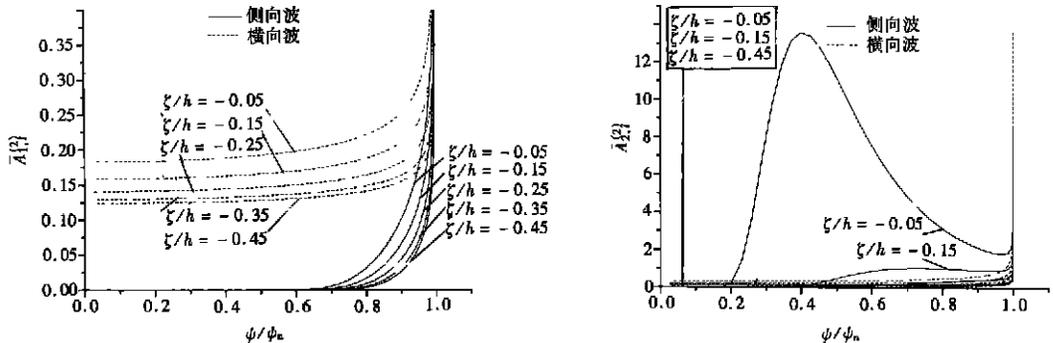


图 5 界面辐散(合)场振幅函数 ( $Fr/Fr_n = 0.7, h_1/h = 0.5, \gamma = 0.97$ , 表面波模式(左), 内波模式(右))

图 5 对应两种波模式对界面振幅函数  $A_{n,l}^{(2)}$  的影响, 因  $A_{2,l}^{(2)} \gg A_{1,l}^{(2)}$ , 故内波模式对界面的影响较表面波模式的影响更为剧烈. 当点源从底部接近密跃层时(例如  $\zeta/h = -0.05$ ), 界面效应完全表现为侧向波系的贡献, 横向波系的影响可以不计. 但从波幅场来看(为省篇幅, 此处

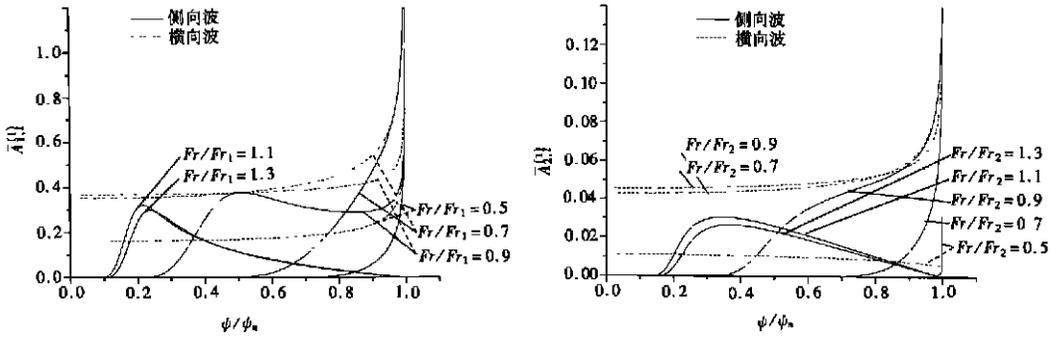


图 6 自由表面辐散(合)场振幅函数 ( $\zeta/h = 0.25, h_1/h = 0.5, \gamma = 0.97$   
表面波模式  $Fr/Fr_1$ (左), 内波模式  $Fr/Fr_2$ (右))

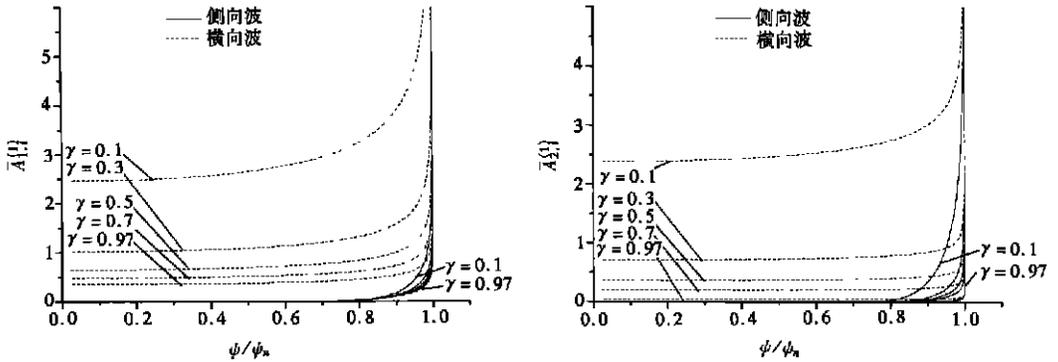


图 7 自由表面辐散(合)场振幅函数 ( $\zeta/h = -0.25, h_1/h = 0.5,$   
表面波模式  $Fr/Fr_1 = 0.7$ (左), 内波模式  $Fr/Fr_2 = 0.7$ (右))

未画出) 侧向波系和横向波系的贡献无量级的差别。可见, 在某种程度上辐散场的描述较波幅场的描述更能刻画问题的特征。

### 2) Froude 数的影响

图 6 表示两种波模式对自由面辐散场振幅函数  $A_{n,l}^{(1)}$  的影响。取  $h_1/h = 0.5, \gamma = 0.97$ , 并将点源置于下层流体的中部。当  $Fr/Fr_n \rightarrow 1$  时, 侧向波系  $A_{n,l}^{(1)}$  的影响域逐渐扩展, 影响程度逐渐变强, 这种现象类似在均匀有限深流体中当运动源的 Froude 数趋近于 1 的情形; 图中, 横向波系  $A_{n,2}^{(1)}$  随  $Fr/Fr_n$  的变化趋势不确定。

### 3) 流体密度比 $\gamma$ 的影响

图 7 显示当密度比  $\gamma = \rho_1/\rho_2$  改变时两种波模式对自由面辐散场振幅函数  $A_{n,l}^{(1)}$  的影响。取  $Fr/Fr_n = 0.7, h_1/h = 0.5, \zeta/h = -0.25$ 。随着  $\gamma$  减小, 各种模式、各种波系的振幅函数  $A_{n,l}^{(1)}$  都呈增加的趋势。事实上, 当  $\gamma$  减小时, 下层流体起的作用类似于固壁, 使总有效深度减小, 故  $A_{n,l}^{(1)}$  增加。图中还表明侧向波系的贡献主要集中在 Kelvin 船行波的边缘。因  $A_{1,l}^{(1)} > A_{2,l}^{(1)}$ , 故表面波模式对自由面辐散场的影响较内波模式大。

根据以上讨论, 一般情况下有  $A_{1,l}^{(1)} \gg A_{2,l}^{(1)}$  和  $A_{2,l}^{(2)} \gg A_{1,l}^{(2)}$ , 即表面波模式主要对表面辐散场产生作用而内波模式主要对界面辐散场产生作用。然而当密度跃变较强(即  $\gamma$  不接近 1)、点源距密度跃层较近(即较大)且  $Fr/Fr_n$  趋近于 1 时, 两种波模式对自由面辐散场有可能产生同等重要的影响, 即  $A_{1,l}^{(1)} \sim A_{2,l}^{(1)}$ 。显而易见, 在适当条件下分层流体中水下运动物体的非声探测

是可能的。例如当  $\gamma = 0.4$ ,  $h_1/h = 0.5$ ,  $\zeta/h = -0.1$ ,  $Fr = 0.37$  时, 对应于  $Fr_1 = 0.903$ ,  $Fr_2 = 0.4287$ , 内波模式导致的自由面辐散场强度与表面波模式的贡献相当, 两者具有强烈的耦合作用, 如图 8 所示。下节从自由面辐散场的水平分布可以更清楚地观察到这种影响。

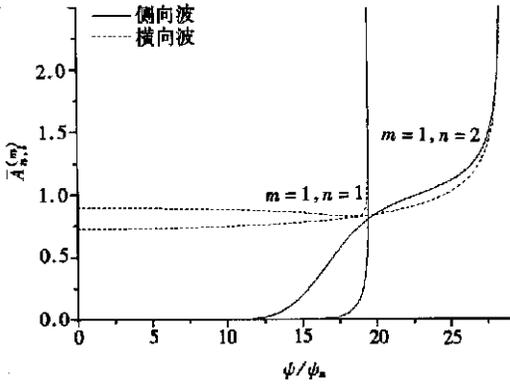


图 8 两种模式对表面辐散的影响

( $Fr = 0.37$ ,  $h_1/h = 0.5$ ,  $\zeta/h = -0.1$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $Fr_1 = 0.903$ ,  $\psi_{max} = 19.48^\circ$ ,  $Fr_2 = 0.4287$ ,  $\psi_{max} = 28.47^\circ$ )



图 9  $Fr < Fr_2$  时自由面辐散场的

水平分布 ( $\gamma = 0.4$ ,  $\zeta/h = -0.1$ ,  $h_2/h = 0.5$ ,  $h_1 = h_2 = 15m$ ,  $Fr = 0.42$ ,  $Fr_1 = 0.903$ ,  $Fr_2 = 0.4287$ ,  $\psi_1 = 19.48^\circ$ ,  $\psi_2 = 59.40^\circ$ 。颜色深浅表示辐散的强弱)

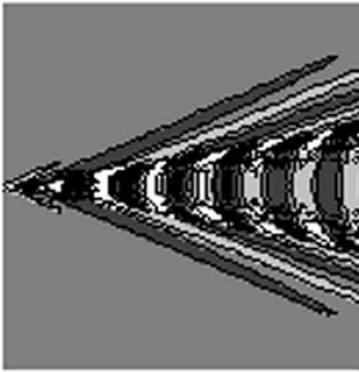


图 10  $Fr_2 < Fr < Fr_1$  时自由

面辐散场的水平分布 ( $\gamma = 0.4$ ,  $\zeta/h = -0.1$ ,  $h_2/h = 0.5$ ,  $Fr = 0.6$ ,  $h_1 = h_2 = 15m$ )

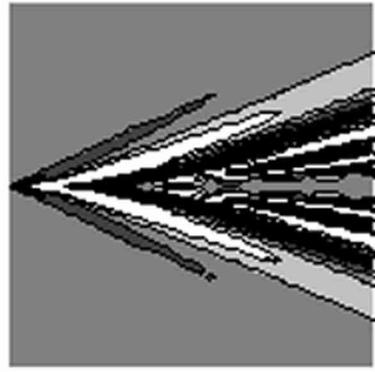


图 11  $Fr > Fr_1$  时自由面辐散

场的水平分布 ( $\gamma = 0.4$ ,  $\zeta/h = -0.1$ ,  $h_2/h = 0.5$ ,  $h_1 = h_2 = 15m$ ,  $Fr = 1.3$ ,  $Fr_1 = 0.903$ ,  $Fr_2 = 0.4287$ ,  $\psi_1 = 44.05^\circ$ )

### 3.5 表面辐散场的水平分布

考虑远场驻点附近, 各种波系对表面辐散场  $\Theta^{(1)}(r, \psi)$  的共同作用, 由于  $Fr_1$  始终大于  $Fr_2$ , 我们讨论了三种典型情况下的自由面辐散场的水平分布, 即 1)  $Fr < Fr_2$ , 2)  $Fr_2 < Fr < Fr_1$  和 3)  $Fr > Fr_1$ 。取  $17h \times 17h$  的矩形计算域, 点源位于下层流体  $\zeta/h = -0.1$  处, 每层深度为  $15m$ , 密度比率  $\gamma = 0.4$ 。

情形 1: 取  $Fr = 0.42$ , 则  $Fr < Fr_2 = 0.4287$ 。

此时,在自由面的辐散场中,两种波模式均产生侧向波系和横向波系,根据上节讨论,两种模式的贡献相当。图 9 中内波模式的显著作用表现为:(a) Kelvin 船行波的最大半角趋近于  $\psi_2 = 59.4^\circ > \psi_1 = 19.48^\circ$ , (b) 内波模式的两种波系的波长大于表面波模式的波长。

情形 2: 取  $Fr = 0.6$ , 则  $0.4287 = Fr_2 < Fr < Fr_1 = 0.903$ 。

此时,自由面辐散场的贡献来自表面波模式的侧向和横向两种波系  $A_{1,1}^{(1)}$  和  $A_{1,2}^{(1)}$ , 以及内波模式的侧向波系  $A_{2,1}^{(1)}$ 。根据上节的讨论,内波模式的影响可以忽略,因此自由表面辐散场呈表面波模式的特征,图 10 中可看到对比度强烈的区域。

情形 3: 取  $Fr = 1.3$ , 则  $Fr > Fr_1 = 0.903$ 。

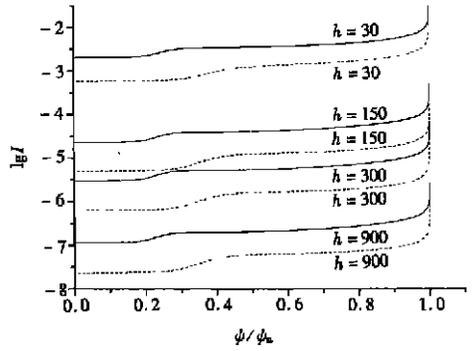
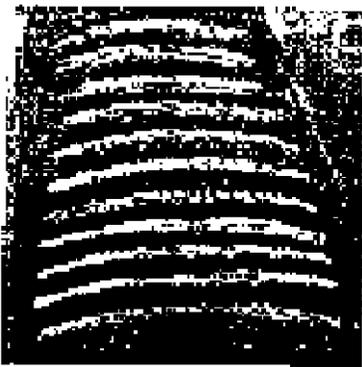


图 12 自由面最大辐散强度随深度的衰减

(实线  $\gamma = 0.4, Fr = 0.42, h_1/h = 0.5, \zeta = -3.0\text{m}$ , 虚线  $\gamma = 0.97, Fr = 0.08, h_1/h = 0.5, \zeta = -3.0\text{m}$ )



(a)



(b)

图 13 小球在下层运动对自由面的影响

( $h_1 = 3.0, h_2 = 15.3, \zeta = -5.0, \psi_1 = 19.48^\circ, \psi_2 = 20.34^\circ$ )



(a)



(b)

图 14 小球在下层运动对密度跃层的影响

( $h_1 = 2.0\text{cm}, h_2 = 16.5\text{cm}, \zeta = -6.0\text{cm}, \psi_1 = 19.48^\circ, \psi_2 = 20.34^\circ$ )

此时,自由面辐散场的贡献来自表面波模式的侧向波系  $A_{1,1}^{(1)}$  和内波模式的侧向波系  $A_{2,1}^{(1)}$ 。图 11 中自由面辐散场主要呈表面波模式的特征。

### 3.6 最大辐散场的量级估算

我们对两种特殊情形作如下估算: 1) 取  $\gamma = 0.4$ ,  $Fr = 0.42$ ,  $h_1/h = 0.5$ ,  $\zeta = -3.0$  m, 对应的  $Fr_1 = 0.903$ ,  $Fr_2 = 0.4287$ , 此时, 内波模式对自由表面辐散场的影响具有与表面波模式的影响同量级; 2) 取  $\gamma = 0.97$ ,  $Fr = 0.08$ ,  $h_1/h = 0.5$ ,  $\zeta = -3.0$  m, 对应的  $Fr_1 = 0.996$ ,  $Fr_2 = 0.087$ , 在这样小的 Froude 数下, 自由面辐散场强度远小于界面辐散场强度, 即  $A_{n,l}^{(1)} \ll A_{n,l}^{(2)}$ , 对应于所谓“死水效应”<sup>[15]</sup>。考虑自由面辐散场峰线上的振幅值, 则有

$$|\Theta^{(1)}| \leq \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}} |A_{1,1}^{(1)}| + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}} |A_{1,2}^{(1)}| + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} |A_{2,1}^{(1)}| + \sqrt{8} |A_{2,2}^{(1)}| = I \quad (38)$$

图 12 表明: 自由面辐散场的幅值随总深度  $h$  增加而减小, 满足 SAR 成像的典型辐散强度  $10^{-3} \sim 10^{-4}$  的海洋深度  $h \approx 100$  m  $\sim$  150 m, 此外, 两层流体密度比  $\gamma$  减小一倍可使表面辐散强度提高约一个数量级。实际的计算表明当总深度  $h \sim O(10)$  (单位: m) 时, 波高的幅值已在 cm 量级, 可见, 随着深度的增大, 探测自由面波高变化的可能性实际很小。

## 4 与实验的比较

马晖扬等人<sup>[6]</sup>在 0.5(高)  $\times$  0.3(宽)  $\times$  3(长) (单位: m) 的静水槽中分别以水/盐水或柴油/盐水为分层介质, 对位于下层的小球运动诱生的重力内波在自由面产生的影响做了实验研究。本文计算了实验数据对应的  $Fr$  数和临界  $Fr_n$  数 ( $n = 1, 2$ ), 并依据上述理论对实验结果作了定性分析。

### 4.1 物体运动对自由面的影响

在水/盐水的分层流体中, 根据实验事实: 当小球距密度跃层约 5.0 cm, 并以 32.4 cm/s 速度运动时, 可观测到自由面发生的变形, 随着小球接近密度跃层, 自由面的变形更加明显, 如图 13(a) 所示。根据实验数据的计算,  $Fr = 0.242$  处于  $Fr_2 < Fr < Fr_1$  范围, 故表面波模式在自由面同时产生侧向波系和横向波系, 而内波模式在自由面仅生成侧向波系。因实验中内波模式的最大临界  $Fr_2 = 0.10136$ ,  $Fr$  数并不是十分接近  $Fr_2$ , 故内波模式对表面波的影响较弱, 自由面的波动主要来自表面波模式的贡献; 而在中心线  $\phi = 0$  附近, 表面波模式的侧向波振幅基本为零, 同时又因水槽较窄, 故自由面主要呈表面波模式横向波系的特征。图 13(b) 给出了自由面辐散场的水平分布, 包括在点源后面 220 cm 处, 宽度约 31 cm 范围的放大图。由图可见, 理论分析与实验结果定性一致。

### 4.2 物体运动对密跃层的影响

在柴油/盐水的分层流体中, 根据实验事实: 当小球距离密度跃层较远时, 密度跃层上可观察到类似 Kelvin 船行波的形状, 照片中反映的主要为侧向波系, 如图 14(a); 当小球距密度跃层较近时, 密跃层上的图案极为复杂, 而当小球运动较快时, 呈湍流尾迹图案。根据实验数据的计算,  $Fr = 0.2406$ , 其值仍在  $Fr_2 < Fr < Fr_1$  区间, 故内波模式在密度跃层仅生成侧向波系, 而表面波模式在密跃层同时生成侧向波系和横向波系。当小球距密跃层较远时(例如  $\zeta = -6.0$  cm, 对应  $Fr_2 = 0.1505$ ), 由于  $Fr$  数并不是十分接近  $Fr_2$ , 表面波模式的作用较弱, 密度跃层上的变形主要来自内波模式的贡献, 此时, 内波模式侧向波系的最大半角  $\phi_n = \arcsin(0.1505/0.2406) \approx 38.7^\circ$ , 理论计算结果与实验照片定性吻合, 参见图 14(b)。当小球

逐渐接近密跃层(例如  $\zeta = -2.0$  cm),  $Fr_2/Fr = 0.2305/0.2406 = 0.958$  接近 1, 内波模式侧向波系的最大半角  $\phi_n = \arcsin 0.958 \approx 73.3^\circ$ , 此时内波模式不仅对密跃层产生较大影响且对自由面的影响也突显出来(实验中未给出照片), 同时随  $Fr_1$  的减少表面波模式对密跃层变形的影响增强。当小球运动较快时, 流动中显现强烈的非线性效应以及湍流尾迹, 这些现象难以在线性势流理论的范畴内讨论。

## 5 主要结论

根据上述理论分析及与实验的比较, 我们有如下主要结论:

- 1) 传统水波动力学的线性理论对本文所讨论的问题是适用的。当上下层流体密度跃变较大, 源接近密跃层, 且  $Fr$  接近内波模式的  $Fr_2$  时, 内波模式导致的自由面辐散场强度与表面波模式的贡献相当, 两者具有强烈的耦合作用。本文结果与实验定性一致。
- 2) 自由面辐散场对海洋表面的卫星遥测可能有重要价值。用本文方法可估算 SAR 对海中物体运动成像的有效海洋极限深度和物体极限深度。点源运动对自由面辐散场的影响随海洋深度的增加而减少, 且密度跃变越强, 影响的深度越深。
- 3) 本文给出了二流体系统中物体在流体上层或下层运动与解的奇性无关的一个简洁证明, 以及利用驻相法给出了辐散场的峰值总是处于峰前谷后(或谷前峰后)的理论证明。

致谢 马晖扬教授为本文研究提供了诸多帮助, 在本文工作中董力耘博士亦给予了友情相助, 在此表示深谢!

### [参 考 文 献]

- [1] MENG Jun\_min. The simulation of the SAR image of internal solitary waves in Alboran seas[J]. J Hydrodynamics, Ser B, 2001, 3: 88—92.
- [2] 戴世强. 一个二流体系统中两对孤立波的相互作用[J]. 中国科学 A 辑, 1983, (11): 1007—1017.
- [3] Lamb H. Hydrodynamics [M]. Sixth Edition. Cambridge University Press, 1932.
- [4] Wehausen J V, Laitone E V. Surface Wave [M]. Handbuch der Physik 9, Berlin, 1960.
- [5] Chomaz J M. The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid[J]. J Fluid Mech, 1993, 254: 1—21.
- [6] 马晖扬. 分层流体中运动物体与自由面相互作用的实验研究[J]. 流体力学实验与测量, 2000, 14(3): 7—11.
- [7] Lighthill J. Waves in Fluid [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- [8] Keller J B, Munk W H. Internal wave wakes of a body moving in a stratified fluid[J]. Phys Fluids, 1970, 13: 1452—1431.
- [9] Miles J W. Internal waves generated by a horizontally moving source[J]. Physical Fluid Dynamics, 1970, 2: 63—87.
- [10] Sharman R D, Wurtele M D. Ship waves and Lee waves[J]. J Atmos Sci, 1983, 40: 396—427.
- [11] Phillips O M. The Dynamics of the Dynamics of Upper Ocean [M]. Cambridge: Cambridge University Press, Second Edition, 1977.
- [12] YIH Chia\_shun, ZHU Song\_ping. Pattern of ship waves[J]. Quar Appl Math, 1989, 47(1): 17—33.
- [13] Hudimac A A. Ship waves in a stratified ocean[J]. J Fluid Mech 1961, 11: 229—243.
- [14] Crapper G D. Ship waves in a stratified ocean[J]. Fluid Mech, 1967, 29: 667—672.

- [15] Yeung R W, Nguyen T C. Waves generated by a moving source in a two\_layer ocean of finite depth [J]. J Eng Math, 1999, 35: 85—107.
- [16] Alpers W, Hemmings I. A theory of the imaging mechanism of underwater bottom topography by real and synthetic aperture radar[J]. J Geophysical Research, 1984, 89(C6): 10529—10546.
- [17] Alpers W. On the detectability of ocean surface waves by real and synthetic aperture radar[J]. J Geophys Res, 1981, 86: 6481—6498.
- [18] Stefanick T. The nonacoustic detection of submarine[J]. Scientific American, 1988, 258: 41—47.
- [19] Stewart R H. Methods of Satellite Oceanography [M]. University of California Press, 1985.
- [20] 郭华东. 雷达对地观测理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [21] Lin J T, Pao Y H. Wakes in stratified fluid[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1979, 11: 317—338.
- [22] Kallen E. Surface effects of vertically propagating gravity waves in a stratified fluid[J]. J Fluid Mech, 1986, 182: 111—125.

## Suurface Effects of Internal Wave Generated by a Moving Source in a Two\_Layer Fluid of Finite Depth

WEI Gang<sup>1,2</sup>, LE Jia\_Chun<sup>1</sup>, DAI Shi\_qiang<sup>1</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics & Mechanics, Shanghai University,  
Shanghai 200072, P. R. China;

2. Institute of Science, University of Science and Technology,  
PLA Nanjing, Nanjing 211101, P. R. China)

**Abstract:** Based on the potential flow theory of water waves, the interaction mechanism between the free\_surface and internal waves generated by a moving point source in the lower layer of a two\_layer fluid was studied. By virtue of the method of Green's function, the properties of the divergence field at the free surface were obtained, which plays an important role in the SAR image. It is shown that the coupling interaction between the surface\_wave mode and internal\_wave mode must be taken into account for the cases of large density difference between two layers, the source approaching to the pycnocline and the total Froude number  $Fr$  close to the critical number  $Fr_2$ . The theoretical analysis is qualitatively consistent with the experimental results presented by Ma Hui\_yang.

**Key words:** internal wave; surface wave; stratified fluid; divergence field; wave\_wave interaction; ship wave