应用数学和力学, 第 24 卷 第 9 期(2003 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 09_0899_07

乘积 G _凸空间内的 G_B _优化映象的极大元及其应用(II)*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委丁协平来稿)

摘要: 通过应用 G _凸空间的乘积空间内一族 G_B _优化映象的极大元的存在定理, 在 G _凸空间的非紧设置下证明了某些重合点定理, Fan_Browder 型不动点定理和极小极大不等式组的解的存在性定理• 这些定理改进和推广了文献中许多重要的已知结果•

关 键 词: 极大元; G_B _优化映象族; 重合定理; 极小极大不等式; G _凸空间的乘积空间

中图分类号: O177.92 文献标识码: A

引 言

本文是作者[1]前一文章继续• 对广义凸(或 G _凸) 空间, CG _凸空间, 最佳容许映象类 $B(Y, X)$, G_B _映象, G_B _优化映象等相关概念和记号, 读者可参见文献[1] •

本文目的是给出作者[1]获得的极大元存在性定理的某些应用• 由应用我们在[1] 中得到的结果, 给出了重合点定理和 Fan_Browder 型不动点定理的分量变型• 对涉及定义在 G _凸空间的乘积空间上的 G_B _优化映象族的Ky Fan 型极小极大不等式组证明了解的某些存在性定理• 这些结果改进和推广了文献中许多已知结果•

1 预 备 知 识

为了证明我们的主要结果, 我需要文献[1] 中对 G_B _优化映象和 G_B _映象族的极大元存在定理• 为方便起见, 我们陈述这些定理如下•

定理 1 设 X 是拓扑空间和 I 是任何指标集• 对每一 $i \in I$, 设 (Y_i, Γ_i) 是 CG _凸空间和令 $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ 使得 (Y, Γ) 是如在[1] 中定义的 CG _凸空间• 令 $F \in B(Y, X)$ 是紧映象使得对每一 $i \in I$,

(i) $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 是 G_B _优化映象,

(ii) $\bigcup_{i\in I}\left\{x \in X: A_i(x) \neq \phi\right\} = \bigcup_{i\in I}\mathrm{int}\left\{x \in X: A_i(x) \neq \phi\right\}$•

---

* 收稿日期: 2002_03_19; 修订日期: 2003_02_19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059) ; 四川省教育厅重点科研资助项目([2000] 25)
作者简介: 丁协平(1938—) , 男, 四川自贡人, 教授(E_mail: dingxip@ sicnu. edu. cn)•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \phi$.

证明　对每一 $x \in X$, 令 $I(x) = \{i \in I: A_i(x) \neq \phi\}$. 定义 $A: X \to 2^Y$ 如下:

$$A(x) = \begin{cases} \bigcap_{i \in I(x)} \pi_i^{-1}(A_i(x)) & (\text{如果 } I(x) \neq \phi), \\ \phi & (\text{如果 } I(x) = \phi), \end{cases}$$

则对每一 $x \in X$, $A(x) \neq \phi$ 当且仅当 $I(x) \neq \phi$. 由[1] 中定理 2.5 的证明, 我们能证明 $A: X \to 2^Y$ 是一 G_B_优化映象. 由应用[1] 中系 2.4, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $A(\hat{x}) = \phi$ 且因此 $I(\hat{x}) = \phi$. 因此我们有对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \phi$.

注 1　定理 1 在下列方式下改进和推广了 Deguire 等人[2] 的定理 3: 1) 从拓扑矢量空间的凸子集到无线性结构的 CG_凸空间; 2) 从 L_S_优化映象族到 G_B_优化映象族.

下面结果是[1] 中的定理 2.6 和定理 2.7.

定理 2　设 X 是拓扑空间, K 是 X 的非空子集和 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 设 (Y_i, Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是如在[1] 中定义的 G_凸空间. 设 $F \in B(Y, X)$ 和对每一 $i \in I$, $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 是 G_B_映象使得

(i) 对每一 $i \in I$ 和 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的非空紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 且对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$, 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \phi$.

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \phi$.

定理 3　设 X 是仿紧拓扑空间和 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 设 (Y_i, Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是如在[1] 中定义的 G_凸空间. 令 $F \in B(Y, X)$ 和对每一 $i \in I$, $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 是 G_B_优化映象, 假设存在 X 的非空紧子集 K, 和对每一 $i \in I$ 和 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 使得对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \phi$. 则存在 $\hat{x} \in X$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \phi$.

2　乘积空间内的不动点和重合点

作为定理 1, 2 和 3 的应用, 我们有 G_凸空间和乘积空间内的下面分量形式的重合点定理和 Fan_Browder 型不动点定理.

定理 4　设 X 是拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 设 (Y_i, Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是如在[1] 中定义的 G_凸空间. 令 $F \in B(Y, X)$ 和对每一 $i \in I$, $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 是 G_凸值的. 假设

(i) 对每一 $i \in I$, 和 $y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的,

(ii) 对每一 $i \in I$ 和 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的非空紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 使得对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \phi$.

(iii) 对每一 $x \in K$, 存在 $i \in I$, 使得 $A_i(x) \neq \phi$,

则存在 $i_0 \in I$ 和 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ 使得 $\hat{x} \in F(\hat{y})$ 和 $\hat{y}_{i_0} = \pi_{i_0}(\hat{y}) \in A_{i_0}(\hat{x})$. 而且如果 $F = S$ 是一单值连续映象, 则我们有 $\hat{y}_{i_0} = \pi_{i_0}(\hat{y}) \in A_{i_0}(S(\hat{y}))$.

证明　由(iii), 定理 2 的结论不成立. 由定理 2 知存在 $i_0 \in I$ 使得 $A_{i_0}: X \to 2^{Y_{i_0}}$ 不满足 G_B_映象定义中的条件(a), 即是存在 $N \in \mathscr{F}(Y)$ 使得

$$F(\Gamma(N)) \cap \Big(\bigcap_{y\in N}(A_{i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y)))\Big) \neq \phi\cdot$$

由此推得存在 $(\hat{x},\hat{y}) \in X\times Y$ 使得 $\hat{y} \in \Gamma(N)$, $\hat{x} \in F(\hat{y})$ 和 $\hat{x} \in \bigcap_{y\in N}A_{i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))$• 因此有 $\pi_{i_0} \subset A_{i_0}(\hat{x})$• 因 $A_{i_0}(\hat{x})$ 是 G _凸的, 我们有

$$\hat{y}_{i_0} = \pi_{i_0}(\hat{y}) \in \pi_{i_0}(\Gamma(N)) = \Gamma_{i_0}(\pi_{i_0}(N)) \subset A_{i_0}(\hat{x})\cdot$$

更进一步如果 $F = S$ 是一单值连续映象, 则 $S \in B(Y,X)$ 且因此我们有 $\hat{y}_{i_0} \in A_{i_0}(S(\hat{y}))$•

注 2 1) 定理 4 在下列方式下改进和推广了 Deguire 等人[2]的定理 6 和定理 9: (a) 从拓扑矢量空间内的非空凸子集的乘积空间到 G _凸空间的乘积空间; (b) 从 S 是单值连续映象到 $F \in B(Y,X)$•

2) 定理 4 顺次推广了 Deguire 和 Lassonde[3]的定理 5.1, Deguire[4]的定理 3.1, 和 Ben_El_Mechaiekh 等[5,6], Lassonde[7,8], Tarafdar[9,10], Ding 和 Tarafdar[11,12], Ding[13,14]的相应结果•

3) 我们希望指出定理 4 的结论一般不能保证对每一 $i \in I$, $\hat{y}_i \in A_i(\hat{x})$, 因为我们仅能保证存在 $i_0 \in I$ 和 $(\hat{x},\hat{y}) \in X\times Y$ 使得 $\hat{x} \in F(\hat{y})$ 和 $\hat{y}_{i_0} \in A_{i_0}(\hat{x})$•

定理 5 设 I 是任何指标集• 对每一 $i \in I$, 令 (X_i, Γ_i') 和 (Y_i, Γ_i) 是 G _凸空间, 和 $X = \prod_{i\in I}X_i$ 和 $Y = \prod_{i\in I}Y_i$ 如在[1] 中定义的乘积 G _凸空间• 对每一 $i \in I$, 令 $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 和 $B_i: Y \to 2^{X_i}$ 是具有 G _凸值的集值映象• 设存在 X 的非空紧子集 K 和 Y 的非空紧子集 L 使得

(ⅰ) 对每一 $i \in I$, 和 $(x_i, y_i) \in X_i\times Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 和 $B_i^{-1}(x_i)$ 分别在 X 和 Y 中是紧开的,

(ⅱ) 对每一 $i \in I$, $M_i \in \mathscr{F}(X_i)$ 和 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 X_i 的非空紧 G _凸子集 L_{M_i} 包含 M_i 和 Y_i 的非空紧 G _凸子集 L_{N_i} 包含 N_i, 且对每一 $(x,y) \in X\times Y\setminus(K\times L)$, 存在 $i \in I$ 使得 $A_i(x) \cap L_{N_i} \neq \phi$ 和 $B_i(y) \cap L_{M_i} \neq \phi$•

(ⅲ) 对每一 $(x,y) \in K\times L$, 存在 $i \in I$, 使得 $A_i(x) \neq \phi$ 和 $B_i(y) \neq \phi$•

则存在 $i_0 \in I$ 和 $(\hat{x},\hat{y}) \in X\times Y$ 使得 $\hat{y}_{i_0} \in A_{i_0}(\hat{x})$ 和 $\hat{x}_{i_0} \in B_{i_0}(\hat{y})$•

证明 令 $C = K\times L$, 则 C 是 $X\times Y$ 的非空紧子集• 显然对每一 $i \in I$, $Y_i\times X_i$ 也是 G _凸空间和 $Y\times X = \prod_{i\in I}(Y_i\times X_i)$ 也是 G _凸空间• 由(ⅱ), 对每一 $i \in I$ 和 $N_i\times M_i \in \mathscr{F}(Y_i\times M_i)$, 存在 $Y\times X$ 的紧凸子集 $L_{N_i}\times L_{M_i}$ 包含 $N_i\times M_i$• 定义 $F: Y\times X \to 2^{(X\times Y)}$ 为 $F(y,x) = \{(x,y)\}$, 则 $F \in B(Y\times X, X\times Y)$• 定义 $W_i: X\times Y \to 2^{(Y_i\times X_i)}$ 为

$$W_i(x,y) = A_i(x)\times B_i(y) \qquad (\forall (x,y) \in X\times Y)\cdot$$

则容易检验定理 4 的一切条件被满足• 由定理 4, 存在 $i_0 \in I$ 和 $(\hat{x},\hat{y}) \in Y\times X$ 使得

$$(\hat{y}_{i_0}, \hat{x}_{i_0}) \in W_{i_0}(F(\hat{y},\hat{x})) = W_{i_0}(\hat{x},\hat{y}) = A_{i_0}(\hat{x})\times B_{i_0}(\hat{y})\cdot$$

且因此我们得到 $\hat{y}_{i_0} \in A_{i_0}(\hat{x})$ 和 $\hat{x}_{i_0} \in B_{i_0}(\hat{y})$•

注 3 定理 5 推广了 Deguire 等人[2]的定理 10 和 Deguire 和 Lassonde[3]的定理 4.3 从拓扑矢量空间无线性结构的 G _凸空间•

3 极小极大不等式组

在本节中, 应用我们的极大元存在定理, 对 Ky Fan 型极小极大不等式组解的某些存在定理将在很弱的假设下被证明• 特别我们的结果改进和推广了在[2, 15, 16]中熟知的 Ky Fan 极小极大不等式到无线性结构的非紧 G _凸空间的乘积空间• 在研究实值函数族的 Ky Fan 型极小极大不等式组之前我们需要下面定义•

设 X 是拓扑空间和 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在[1] 中定义的 G_凸空间. 令 $F\in B(Y,X)$ 是容许映象族和对每一 $i\in I$, $f_i:X\times Y_i\to\mathbf{R}$ 是实值函数.

1) 对每一给定的 $x\in X$, 称函数 $y_i\mapsto f_i(x,y_i)$ 是 G_拟凹的如果对每一给定的 $\lambda\in\mathbf{R}$, 集 $\{y_i\in Y_i: f_i(x,y_i)>\lambda\}$ 是 G_凸的,

2) $f_i(x,y_i)$ 被说成是 G_B_优化的如果下列条件被满足: 对每一给定的 $\lambda\in\mathbf{R}$, 如果存在 $(x,y_i)\in X\times Y_i$ 使得 $f_i(x,y_i)>\lambda$, 则存在 x 在 X 内的非空开邻域 $N(x)$ 和实值函数 $f_{i,x}:X\times Y_i\to\mathbf{R}$ 使得:

(a₁) 对一切 $(z,y_i)\in N(x)\times Y_i$, $f_i(z,y_i)\leqslant f_{i,x}(z,y_i)$,

(a₂) 对每一 $y_i\in Y_i$, $z\mapsto f_{i,x}(z,y_i)$ 在 X 的每一紧子集上是下半连续的,

(a₃) 对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, $y\in\Gamma(N)$ 和 $z\in F(y)$, $f_i(z,\pi_i(y))\leqslant\lambda$ 蕴含存在 $y'\in N$ 使得 $f_{i,x}(z,\pi_i(y'))\leqslant\lambda$.

定理 6 设 X 是拓扑空间和 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,Γ_i) 是 CG_凸空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$, 使得 (Y,Γ) 是如在[1] 中定义的 CG_凸空间, 假设 $F\in B(Y,X)$ 是紧映象和对每一 $i\in I$, 函数 $f_i:X\times Y_i\to\mathbf{R}$ 满足对每一 $y_i\in Y_i$, $x\mapsto f_i(x,y_i)$ 在 X 上是下半连续的. 则至少下列陈述之一成立:

1) 对每一 $\lambda\in\mathbf{R}$, 存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i}f_i(\hat{x},y_i)\leqslant\lambda$,

2) 存在 $i\in I$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $N\in\mathscr{F}(Y)$ 使得 $\bigcap_{y\in N}\{x\in F(\Gamma(N)): f_i(x,\pi_i(y))>\lambda\}\neq\varPhi$.

证明 如果结论 2) 不成立, 则对任意 $\lambda\in\mathbf{R}$, $i\in I$ 和 $N\in\mathscr{F}(Y)$, 有

$$F(\Gamma(N))\cap\Big(\bigcap_{y\in N}\{x\in X: f_i(x,\pi_i(y))>\lambda\}\Big)=\varPhi.$$

对每一 $i\in I$, 定义 $A_i:X\to 2^{Y_i}$: $A_i(x)=\{y_i\in Y_i: f_i(x,y_i)>\lambda\}$ $(\forall x\in X)$.

因此我们有 $F(\Gamma(N))\cap\big(\bigcap_{y\in N}A_i^{-1}(\pi_i(y))\big)=\varPhi$.

由函数 $x\mapsto f_i(x,y_i)$ 的下半连续性, 我们有对每一 $y_i\in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)=\{x\in X: f_i(x,y_i)>\lambda\}$ 在 X 内是开的. 因此对每一 $i\in I$, A_i 是 G_B_映象且定理 1 的条件(ii)也被满足. 由定理 1, 存在 $\hat{x}\in X$ 使得对一切 $i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varPhi$. 因此有

$$\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i}f_i(\hat{x},y_i)\leqslant\lambda,$$

即陈述 1) 成立.

定理 7 设 X 是拓扑空间和 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,Γ_i) 是 CG_凸空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在[1] 中定义的 CG_凸空间, 假设 $F\in B(Y,X)$ 是紧映象和对每一 $i\in I$, 函数 $f_i:X\times Y_i\to\mathbf{R}$ 满足

(i) 对每一 $x\in X$, $y_i\mapsto f_i(x,y_i)$ 是 G_拟凹的,

(ii) 对每一 $y_i\in Y_i$, $x\mapsto f_i(x,y_i)$ 在 X 上是下半连续的.

则我们有

(A) 对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$, 至少下列陈述之一成立:

1) 存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i}f_i(\hat{x},y_i)\leqslant\lambda$,

2) 存在 $i\in I$, $N\in\mathscr{F}(Y)$, $\hat{y}\in\Gamma(N)$ 和 $\hat{x}\in F(\hat{y})$ 使得 $f_i(\hat{x},\pi_i(\hat{y}))>\lambda$.

(B) 下面极小极大不等式成立:

$$\inf_{x\in X}\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i} f_i(x,y_i)\leqslant \sup_{i\in I}\sup_{N\in\mathscr{F}(Y)}\sup_{x\in F(y)}\sup_{y\in\Gamma(N)} f_i(x,\pi_i(y))\text{•}$$

证明 (A) 对任何 $i\in I$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 定义 $A_i: X\to 2^{Y_i}$ 如下,

$$A_i(x)=\{y_i\in Y_i: f_i(x,y_i)>\lambda\}\qquad(\forall x\in X)\text{•}$$

则由(ⅰ)对每一 $x\in X$, $A_i(x)$ 是 G_凸的, 和由(ⅱ)对每一 $y_i\in Y_i$ 集 $A_i^{-1}(y_i)=\{x\in X: f_i(x,y_i)>\lambda\}$ 在 X 内是开的• 现在假设陈述(A) 2) 不成立, 我们主张 A_i 是 G_B_映象• 的确如果 A_i 不是 G_B_映象, 则存在 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 使得

$$F(\Gamma(N))\cap(\bigcap_{y\in N}A_i^{-1}(\pi_i(y)))\neq\phi\text{•}$$

由此推得存在 $\hat{y}\in\Gamma(N)$, $\hat{x}\in F(\hat{y})$ 使得 $\pi_i(N)\subset A_i(\hat{x})$, 因 $A_i(\hat{x})$ 是 G_凸的, 我们有 $\Gamma_i(\pi_i(N))\subset A_i(\hat{x})$• 注意到 $\hat{y}\in\Gamma(N)=\prod_{i\in I}\Gamma_i(\pi_i(N))$, 我们得到

$$\pi_i(\hat{y})\in\Gamma_i(\pi_i(N))\subset A_i(\hat{x}),$$

即是 $f_i(\hat{x},\pi_i(\hat{y}))>\lambda$• 这与假设(A) 2) 不成立相矛盾• 所以 A_i 是 G_B_映象• 注意到每一 $A_i^{-1}(y_i)$ 是开的, 定理1的条件(ⅱ)也被满足• 由定理1, 存在 $\hat{x}\in X$ 使得对一切 $i\in I$, $A_i(\hat{x})=\phi$• 因此对一切 $i\in I$ 和 $y_i\in Y_i$, $f_i(\hat{x},y_i)\leqslant\lambda$, 故陈述(A) 1) 成立•

(B) 令 $\lambda_0=\sup_{i\in I}\sup_{N\in\mathscr{F}(Y)}\sup_{x\in F(y)}\sup_{y\in\Gamma(N)} f_i(x,\pi_i(y))$, 结论(A) 2) 不真, 从而(A) 1) 必成立, 即存在 $\hat{x}\in X$ 使得

$$\inf_{x\in X}\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i} f_i(x,y_i)\leqslant \sup_{i\in I}\sup_{N\in\mathscr{F}(Y)}\sup_{x\in F(y)}\sup_{y\in\Gamma(N)} f_i(x,\pi_i(y))\text{•}$$

注4 定理6和7在几方面改进和推广了 Deguire 等人[2]的定理11•

定理8 设 X 是拓扑空间, K 是 X 的非空子集和 I 是任何指标集• 对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在[1]中定义的 G_凸空间, 设 $F\in B(Y,X)$ 和对每一 $i\in I$, $f_i: X\times Y_i\to\mathbf{R}$ 使得

(ⅰ) 对每一 $x\in X$, $y_i\mapsto f_i(x,y_i)$ 是 G_拟凹的,

(ⅱ) 对每一 $y_i\in Y_i$, $x\mapsto f_i(x,y_i)$ 在 X 上是下半连续的•

(ⅲ) 对每一 $N_i\in\mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的非空紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 且对每一 $\lambda\in\mathbf{R}$ 和 $x\in X\setminus K$, 存在 $i\in I$ 和 $y_i\in L_{N_i}$ 使得 $f_i(x,y_i)>\lambda$•

则我们有

(A) 对每一 $\lambda\in\mathbf{R}$, 至少下列陈述之一成立:

1) 存在 $\hat{x}\in K$ 使得 $\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i} f_i(\hat{x},y_i)\leqslant\lambda$, 或

2) 存在 $i\in I$, $N\in\mathscr{F}(Y)$, $\hat{y}\in\Gamma(N)$ 和 $\hat{x}\in F(\hat{y})$ 使得 $f_i(\hat{x},\pi_i(\hat{y}))>\lambda$•

(B) 下面极小极大不等式成立:

$$\inf_{x\in K}\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i} f_i(x,y_i)\leqslant \sup_{i\in I}\sup_{N\in\mathscr{F}(Y)}\sup_{x\in F(y)}\sup_{y\in\Gamma(N)} f_i(x,\pi_i(y))\text{•}$$

证明 使用定理2和定理7证明中类似的论证, 容易证明定理8的结论成立•

注5 定理8在几面改进和推广了 Deguire 等人[2]的定理12•

定理9 设 X 是拓扑空间和 I 是任何指标集• 对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,Γ_i) 是 G_凸空间和

$Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是如在[1] 中定义的 G_凸空间, 假设 $F \in B(Y, X)$ 是紧映象和对每一 $i \in I$,

(ⅰ) $f_i: X \times Y_i \to \mathbf{R}$ 是 G_B_优化的,

(ⅱ) 假设存在 X 的非空紧子集 K 和对每一 $i \in I$, $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 使得对任何 $\lambda \in \mathbf{R}$ 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 和 $y_i \in L_{N_i}$, 满足 $f_i(x, y_i) > \lambda$. 则我们有

(A) 对每一 $\lambda \in \mathbf{R}$, 至少下列陈述之一成立:

1) 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\sup_{i \in I} \sup_{y_i \in Y_i} f_i(\hat{x}, y_i) \leqslant \lambda$,

2) 存在 $i \in I$, $N \in \mathscr{F}(Y)$, $\hat{y} \in \Gamma(N)$ 和 $\hat{x} \in F(\hat{y})$ 使得 $f_i(\hat{x}, \pi_i(\hat{y})) > \lambda$.

(B) 下面极小极大不等式成立:

$$\inf_{x \in K} \sup_{i \in I} \sup_{y_i \in Y_i} f_i(x, y_i) \leqslant \sup_{i \in I} \sup_{N \in \mathscr{F}(Y)} \sup_{x \in F(y)} \sup_{y \in \Gamma(N)} f_i(x, \pi_i(y)).$$

证明 (A) 对任何 $i \in I$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 定义 $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 如下,

$$A_i(x) = \left\{ y_i \in Y_i : f_i(x, y_i) > \lambda \right\} \ (\forall x \in X).$$

因为 $f_i(x, y_i)$ 是 G_B_优化的, 对每一给定的 $x \in X$, 如果 $A_i(x) \neq \phi$, 则存在 x 的一开邻域 $N(x)$ 和映象 $f_{i,x}: X \times Y_i \to \mathbf{R}$ 有性质(a_1) ~ (a_3). 现在定义映象 $A_{i,x}: X \to 2^{Y_i}$ 如下,

$$A_{i,x}(z) = \left\{ y_i \in Y_i : f_i(x, y_i) > \lambda \right\}.$$

则我们有

(a) 由(a_1), 对每一 $z \in N(x)$, $A_i(z) \subset A_{i,x}(z)$,

(b) 由(a_2), 对每一 $y_i \in Y_i$, $A_{i,x}^{-1}(y_i)$ 在 X 上是紧开的.

如果陈述(A) 2) 不成立, 则对任何 $i \in I$, $N \in \mathscr{F}(Y)$, $y \in \Gamma(N)$ 和 $z \in F(y)$, 有 $f_i(z, \pi_i(y)) \leqslant \lambda$. 由($a_3$) 存在 $y' \in N$ 使得 $f_{i,x}(z, \pi_i(y')) \leqslant \lambda$. 因此有 $z \notin \bigcap_{y \in N} \left\{ z \in X : f_{i,x}(z, \pi_i(y) > \lambda \right\} = \bigcap_{y \in N} A_{i,x}^{-1}(\pi_i(y))$. 由此推得对每一 $i \in I$ 和 $N \in \mathscr{F}(Y)$, $F(\Gamma(N)) \cap (\bigcap_{y \in N} A_{i,x}^{-1}(\pi_i(y))) = \phi$. 所以 $A_{i,x}$ 是 A_i 在 x 点的 G_B_优化映象和 A_i 是 G_B_优化的. 由条件(ⅱ), 容易看出定理 3 的一切条件被满足. 由定理 3, 存在 $\hat{x} \in K$ 使得对一切 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \phi$. 因此我们有 $f_i(\hat{x}, y_i) \leqslant \lambda$ 对一切 $i \in I$ 和 $y_i \in Y_i$ 成立, 即是陈述(A) 1) 成立. 陈述(B) 的证明与定理 7 的证明是相同的.

注 6 定理 9 在几方面改进和推广了 Deguire 等人[2] 的定理 14. 我们也能推广 Deguire 等人[2] 的系 15~ 18 到无线性结构的 G_凸空间的乘积空间, 我们省略.

[参 考 文 献]

[1] 丁协平. 乘积 G _凸空间内的 G_B_优化映象的极大元及其应用(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(6): 583—594.

[2] Deguire P, Tan K K, Yuan X Z. The study of maximal elements, fixed points for L_S_majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**(8): 933—951.

[3] Deguire P, Lassonde M. Familles s lectantes[J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 1995, **5**: 261—269.

[4] Deguire P. Brewder_Fan fixed point theorem and relatd results[J]. Discuss Math Differential Incl, 1995, **15**: 149—162.

[5] Ben_El_Mechaiekh H, Deguire P, Granas A. Points fixes et coincidences pour les applications multivo-

ques(applications de Ky Fan) [J]. C R Acad Sci Paris, 1982, **295**: 337—340.

[6] Ben_El_Mechaiekh H, Deguire P, Granas A. Points fixes et coincidences pour les applications multivoques(applications de Φ and Φ^*)[J]. C R Acad Sci Paris, 1982, **295**: 381—384.

[7] Lassonde M. On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics[J]. J Math Anal Appl, 1983, **97**: 151—201.

[8] Lassdone M. Fixed point for Kakutani factorizable multifunctions[J]. J Math Anal Appl, 1990, **152**: 46—60.

[9] Tarafdar E. A fixed points theorem and equilibrium point of abstract economy[J]. J Math Econom, 1991, **20**(2): 211—218.

[10] Tarafdar E. Fixed point theorems in H_ spaces and equilibrium points of abstract economics[J]. J Austral Math Soc, Ser A, 1992, **53**: 252—260.

[11] DING Xie_ping. Tarafdar E. Some coincidence theorems and applications[J]. Bull Austral Math Soc, 1994, **50**: 73—80.

[12] DING Xie_ping, Tarafdar E. Fixed point theorem and existence of equilibrium points of noncompact abstract economies[J]. Nonlinear World, 1994, **1**: 319—340.

[13] DING Xie_ping. New H_KKM theorems and their applications to gemectric property, coincidence theorems, minimax inequality and maximal elements[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, **26**(1): 1—19.

[14] DING Xie_ping. Fixed points, minimax inequalities and equilibria of noncompact abstract economies [J]. Taiwanese J Math, 1998, **2**(1): 25—55.

[15] Fan Ky. A minimax inequality and applications[A]. In: Shisha O Ed. Inequality III[C]. New York: Academic Press, 1972.

[16] Fan Ky. Some properties of convex sets related to fixed point theorems[J]. Math Ann, 1984, **266**: 519—537.

Maximal Elements for G_B _ Majorized Mappings in Product G _ Convex Spaces and Applications(Ⅱ)

DING Xie_ping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University,
Chengdu 610066, P. R. China)

Abstract: By applying existence theorems of maximal elements for a family of G_B_majorized mappings in a product space of G _convex spaces, some coincidence theorem, Fan_Browder type fixed point theorem and some existence theorems of solutions for a system of minimax inequalities are proved under noncompact setting of G _convex spaces. These theorems improve and generalize many important known results in literature.

Key words: maximal element; family of G_B _ majorized mappings; coincidence theorem; minimax inequalities; product space of G _ convex spaces