

文章编号: 1000-0887(2003) 09-0892-07

可压超弹性材料组合球体 中心的空穴生成*

任九生^{1,2}, 程昌钧^{1,2}, 朱正佑^{1,3}

(1. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2 上海大学 力学系, 上海 200436;

3 上海大学 数学系, 上海 200436)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 研究了一种可压超弹性材料组合球体中的空穴生成问题, 得到了组合球体在径向拉伸作用下空穴生成时分叉问题的解, 包括均匀变形的平凡解和有内部空穴生成的分叉解。给出了空穴生成时的分叉曲线和球体中的应力分布, 观察到了右分叉和左分叉现象及应力间断和应力集中现象。通过能量的比较分析了解的稳定性。

关键词: 可压超弹性材料; 空穴分叉; 应力间断和应力集中; 能量分析

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

引 言

Horgan^[1]对超弹性材料中的空穴生成问题的研究进展做了一个综述, 其中, 不仅包括了均匀的、各向同性材料, 还包括了非均匀、各向异性材料。关于不可压超弹性材料, Horgan 和 Pence^[2,3]讨论了材料的组合对材料中空穴生成问题的影响, 得到了两种 neo-Hookean 材料组合球体中空穴生成问题的解析解, 发现这种组合球体不仅可以发生右分叉, 还可以发生左分叉, 且分叉的稳定性和应力分布有显著的差异。关于均匀的可压超弹性材料, Horgan 和 Abeyaraine^[4], Horgan^[5], 尚新春和程昌钧^[6,7]等曾得到过一些特定材料的解, 但关于组合的可压超弹性材料尚未见报导。在文[8,9]中, 作者曾分析了不可压超弹性材料中的空穴生成问题, 本文的目的是研究组合可压超弹性材料中的空穴生成问题。文中分析了一个由两种可压超弹性材料组合的球体在表面均布拉伸作用下空穴生成的分叉问题。求得了空穴生成时的分叉解和临界拉伸值, 并给出了空穴生成的分叉曲线, 发现这类材料的组合球体可以发生右分叉, 也可以发生左分叉, 发生分叉的条件和球体的两个组合部分的几何尺寸和材料性质有关。给出了空穴生成时的应力分布曲线, 讨论了空穴生成时组合球体中的应力间断和应力集中现象。通过能量比较讨论了解的稳定性, 发现右分叉和左分叉的稳定性有显著的差异。

* 收稿日期: 2002_04_15; 修订日期: 2003_03_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272069); 上海市重点学科建设资助项目

作者简介: 任九生(1970—), 男, 河南济源人, 博士(E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn)。

1 问题的数学描述

考察一个半径为 b , 且在半径为 a ($a < b$) 处由两种可压材料组合而成的球体在表面均匀径向拉伸 $\lambda \geq 1$ 作用下的有限变形问题. 设变形前后组合球体在 $R = a$ 处总粘合在一起, 并满足径向位移和径向应力的连续性条件. 对整个球体分别取物质坐标系和空间坐标系为 (R, Θ, Φ) 和 (r, θ, φ) , 设球体的变形是球对称的, 即其变形模式为

$$r^{[ij]} = r^{[ij]}(R) > 0, \quad \theta^{[ij]} = \Theta^{[ij]}, \quad \varphi^{[ij]} = \Phi^{[ij]} \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

式中, $r^{[ij]}(R)$ 为两个待定函数. 在本文中如不做特殊声明, 当 $0 \leq R \leq a$ 时, 上标 $[ij]$ 取为 1, 表示与内球体相应的量, 当 $a \leq R \leq b$ 时, 上标 $[ij]$ 取为 2, 表示与外球壳相应的量.

相应的变形梯度张量 $F^{[ij]}$ 及右伸长张量 $U^{[ij]}$ 为

$$F^{[ij]} = U^{[ij]} = \text{diag}(\lambda^{[ij]}, \lambda^{[ij]}, \lambda^{[ij]}), \quad (2)$$

式中, 主伸长

$$\lambda^{[ij]} = r^{[ij]}(R) = \frac{dr^{[ij]}}{dR}, \quad \lambda_2^{[ij]} = \lambda_3^{[ij]} = \frac{r^{[ij]}(R)}{R}. \quad (3)$$

取组合球体的材料均为具有如下形式的应变能函数的可压缩超弹性材料^{[7], [9]}

$$W^{[ij]} = C_1^{[ij]}(j_1^{[ij]} - 3) + C_2^{[ij]}(j_2^{[ij]} - 3) + C_3^{[ij]}(j_3^{[ij]} - 1) \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

式中, $j_1^{[ij]}, j_2^{[ij]}, j_3^{[ij]}$ ($i = 1, 2$) 分别为其右伸长张量 $U^{[ij]}$ 的不变量,

$$\begin{cases} j_1^{[ij]} = \text{tr} U^{[ij]} = \lambda^{[ij]} + \lambda_2^{[ij]} + \lambda_3^{[ij]}, \\ j_2^{[ij]} = \text{tr}(U^{[ij]})^{-1} = \frac{1}{\lambda^{[ij]}} + \frac{1}{\lambda_2^{[ij]}} + \frac{1}{\lambda_3^{[ij]}}, \\ j_3^{[ij]} = \det U^{[ij]} = \lambda^{[ij]} \lambda_2^{[ij]} \lambda_3^{[ij]}. \end{cases} \quad (5)$$

$C_1^{[ij]}, C_2^{[ij]}, C_3^{[ij]}$, ($i = 1, 2$) 分别为材料常数,

$$C_1^{[ij]} = \mu^{[ij]} \frac{1 - 3\nu^{[ij]}}{1 - 2\nu^{[ij]}}, \quad C_2^{[ij]} = \mu^{[ij]} \frac{1 - \nu^{[ij]}}{1 - 2\nu^{[ij]}}, \quad C_3^{[ij]} = \mu^{[ij]} \frac{2\nu^{[ij]}}{1 - 2\nu^{[ij]}}. \quad (6)$$

其中, $\mu^{[ij]} > 0, 0 < \nu^{[ij]} < 1/3$ ($i = 1, 2$), 分别为材料在小应变状态时的剪切模量和泊松比.

相应的 Cauchy 应力张量的各非零分量为

$$\begin{cases} \tau_1^{[ij]} = \frac{1}{\lambda_2^{[ij]} \lambda_3^{[ij]}} \frac{\partial W^{[ij]}}{\partial \lambda_1^{[ij]}} = \frac{1}{\lambda_1^{[ij]} \lambda_2^{[ij]} \lambda_3^{[ij]}} \left[C_1^{[ij]} \lambda_1^{[ij]} - \frac{C_2^{[ij]}}{\lambda_1^{[ij]}} \right] + C_3^{[ij]}, \\ \tau_2^{[ij]} = \tau_3^{[ij]} = \frac{1}{\lambda_1^{[ij]} \lambda_2^{[ij]}} \frac{\partial W^{[ij]}}{\partial \lambda_2^{[ij]}} = \frac{1}{\lambda_1^{[ij]} \lambda_2^{[ij]} \lambda_3^{[ij]}} \left[C_1^{[ij]} \lambda_2^{[ij]} - \frac{C_2^{[ij]}}{\lambda_2^{[ij]}} \right] + C_3^{[ij]}. \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

忽略体积力时, 球体应力分量应满足的平衡方程为

$$\frac{d\tau_1^{[ij]}}{dR} + 2 \frac{r^{[ij]}(R)}{r^{[ij]}(R)} (\tau_1^{[ij]} - \tau_2^{[ij]}) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

在给定球体外表面上的均匀位移时, 边界条件为

$$r^{[2]}(b) = \lambda, \quad (9)$$

式中 $\lambda \geq 1$ 为给定的外加径向拉伸. 如有空穴生成, 则由于空穴边界自由, 故边界条件为

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} r^{[1]}(R) = \delta > 0 \quad \text{且} \quad \lim_{R \rightarrow 0^+} \tau_1^{[1]}(0) = 0. \quad (10)$$

两球体分界面 $R = a$ 处的径向位移和径向应力的连续性条件要求

$$r^{[1]}(a) = r^{[2]}(a), \quad \tau^{[1]}(a) = \tau^{[2]}(a). \quad (11)$$

2 问题的求解

对任意的 $\lambda \geq 1$, 设问题总存在一个平凡解

$$\begin{cases} r(R) = a_1 R + b_1 & (0 \leq R \leq a), \\ r(R) = a_2 R + b_2 & (a \leq R \leq b). \end{cases} \quad (12)$$

代入边界条件及连续性条件(9)、(10)、(11)可得 $b_1 = 0$ 及 a_1, a_2, b_2 满足的方程组

$$\begin{cases} a_2 b + b_2 = \lambda b, \quad a_1 a = a_2 a + b_2, \\ \frac{1}{a_1} \left(C_1^{[1]} - \frac{C_2^{[1]}}{a_1} \right) + C_3^{[1]} = \frac{a^2}{a_2(a_2 a + b_2)^2} \left(C_1^{[2]} a_2 - \frac{C_2^{[2]}}{a_2} \right) + C_3^{[2]}. \end{cases} \quad (13)$$

对给定的 $\lambda \geq 1$, 由(13)可求得相应的 a_1, a_2, b_2 的值. 相应的在组合球体中心有 $r(0) = 0$, 即此时球体在空间坐标系中仍为一个实心球体, 其中没有空穴生成. 球体中心相应的应力分量为

$$\tau_{1h}(0) = \tau_{2h}(0) = \frac{1}{a_1} \left(C_1^{[1]} - \frac{C_2^{[1]}}{a_1} \right) + C_3^{[1]}. \quad (14)$$

由平衡方程(8)和应变能函数(4)可得

$$r^{[i]} - \frac{1}{R} r^{[i]} + \frac{R r^{[i]3}}{r^{[i]2}} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (15)$$

引入变换

$$R^{[i]} = R^{[i]}(t^{[i]}), \quad r^{[i]} = r^{[i]}(t^{[i]}), \quad t^{[i]} = \frac{\chi_1^{[i]}}{\chi_2^{[i]}} = \frac{R^{[i]} r^{[i]}}{r^{[i]}} \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

可得

$$\begin{cases} \frac{dR^{[i]}(t^{[i]})}{dt^{[i]}} = \frac{R^{[i]}(t^{[i]})}{t^{[i]}(1-t^{[i]})(2+t^{[i]})}, \\ \frac{dr^{[i]}(t^{[i]})}{dt^{[i]}} = \frac{r^{[i]}(t^{[i]})}{(1-t^{[i]})(2+t^{[i]})} \end{cases} \quad (17)$$

对(17)积分可得

$$R^{[i]}(t^{[i]}) = C^{[i]} \frac{t^{[i]V/2}}{(1-t^{[i]})^{1/3}(2+t^{[i]})^{V/6}}, \quad r^{[i]}(t^{[i]}) = D^{[i]} \left(\frac{2+t^{[i]}}{1-t^{[i]}} \right)^{V/3}, \quad (18)$$

式中, $C^{[i]}, D^{[i]} (i = 1, 2)$ 为待定积分常数, 将(18)代入(7)及边界条件和连续性条件(9)、(10)、(11)可得

$$\begin{cases} C^{[1]} = \frac{a(1-t_a^{[1]})^{1/3}(2+t_a^{[1]})^{V/6}}{t_a^{[1]V/2}}, \\ D^{[1]} = 4 \frac{\sqrt{C_2^{[1]}}}{\sqrt[4]{4C_3^{[1]}}} \frac{a(1-t_a^{[1]})^{V/3}(2+t_a^{[1]})^{V/6}}{t_a^{[1]V/2}}. \end{cases} \quad (19)$$

$$C^{[2]} = \frac{a(1-t_a^{[2]})^{1/3}(2+t_a^{[2]})^{V/6}}{t_a^{[2]V/2}}, \quad D^{[2]} = \lambda \left(\frac{1-t_b}{2+t_b} \right)^{V/3}, \quad (20)$$

式中, $t_a^{[1]}, t_a^{[2]}, t_b$ 待定, 满足方程组

$$\left\{ \begin{aligned} a^4 \frac{\sqrt{C_2^{[1]}}}{\sqrt{4C_3^{[1]}}} \left(\frac{2+t_a^{[1]}}{t_a^{[1]}} \right)^{1/2} &= \mathcal{X} \left(\frac{1-t_b}{2+t_b} \right)^{1/3} \left(\frac{2+t_a^{[2]}}{1-t_a^{[2]}} \right)^{1/3}, \\ \frac{a(1-t_a^{[2]})^{1/3} (2+t_a^{[2]})^{1/6}}{t_a^{[2]1/2}} &= \frac{b(1-t_b)^{1/3} (2+t_b)^{1/6}}{t_b^{1/2}}, \\ \sqrt{\frac{4C_3^{[1]}}{C_2^{[1]}}} \frac{C_1^{[1]} t_a^{[1]}}{2+t_a^{[1]}} - \frac{4C_3^{[1]}}{C_2^{[1]}} \frac{C_2^{[1]}}{(2+t_a^{[1]})^2} + C_3^{[1]} &= \\ \frac{2+t_b}{\lambda^2 t_b} \frac{C_1^{[1]} t_a^{[2]}}{2+t_a^{[2]}} - \left(\frac{2+t_b}{\lambda^2 t_b} \right)^2 \frac{C_2^{[2]}}{(2+t_a^{[2]})^2} + C_3^{[2]} &\cdot \end{aligned} \right. \quad (21)$$

对给定的 $\lambda \geq 1$, 由(21) 可求得相应的 $t_a^{[1]}, t_a^{[2]}, t_b$ 的值, 再代入(20) 可求得相应的积分常数 $C^{[i]}, D^{[i]} (i = 1, 2)$ 。同时, 由边界条件(10) 可得空穴的增长

$$\delta(\lambda) = \lim_{t \rightarrow 0} r^{[1]}(t) = \sqrt[4]{2} \frac{\sqrt{C_2^{[1]}}}{\sqrt{4C_3^{[1]}}} \frac{a(1-t_a^{[1]})^{1/3} (2+t_a^{[1]})^{1/6}}{t_a^{[1]1/2}} \quad (22)$$

由(22) 计算 δ 值时, 让 λ 从一个充分大的数开始逐渐减小直到 $\delta = 0$, 此时得到的 λ 值即为生成空穴的拉伸的临界值, 同时也获得了球体的分叉曲线。 $\nu^{[2]} = \nu^{[1]} = \nu, \mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}$ 时的分叉曲线示于图 1, $\nu^{[2]} = \nu^{[1]} = \nu, \mu^{[2]} = 0.25\mu^{[1]}$ 时的分叉曲线示于图 2。由图可见, 当 $\nu^{[2]} = \nu^{[1]} = \nu, \mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}$ 时, 组合球体发生右分叉, 外加位移的临界值为 $\lambda_{cr} = 1.28 (\nu = 0.2)$ 。当 $\nu^{[2]} = \nu^{[1]} = \nu, \mu^{[2]} = 0.25\mu^{[1]}$ 时, 组合球体发生左分叉, 外加位移的临界值为 $\lambda_{cr} = 2.95 (\nu = 0.2)$ 。发生左分叉或右分叉的条件和组合球体的两部分的几何尺寸和材料性质有关。此处组合球体可以发生右分叉, 也可以发生左分叉, 和不可压超弹性组合球体的情况相似。

当 $\mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}, \nu = 0.2$ 时, 球体中的位移分布示于图 3。当 $\lambda \leq \lambda_{cr}$ 时, 组合球体处于均匀分布的变形状态, 径向位移在空穴表面处为零, 其大小随 R/b 的增加而增加, 在 $R \geq a$ 时随 R/b 的增加而减少。当 $\lambda \geq \lambda_{cr}$ 时, 径向位移在空穴表面处为一个有限的值, 随球体半径 R 的增加而减少, 在 $R \geq a$ 时随 R/b 的增加而增加。

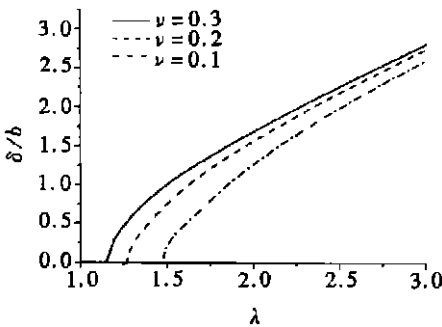


图 1 不同泊松比下球体的分叉曲线
($\mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}$)

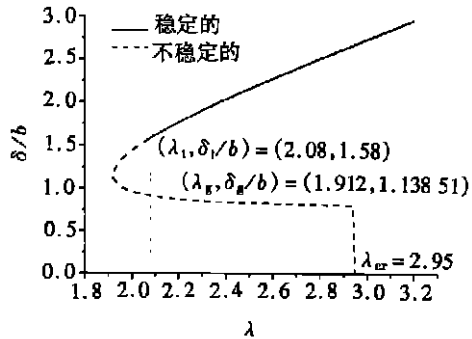


图 2 球体的分叉曲线及其稳定性示意图
($\mu^{[2]} = 0.25\mu^{[1]}$)

3 应力间断及应力集中

将(18) 式及所得参数值代入应力分量(7) 式可得

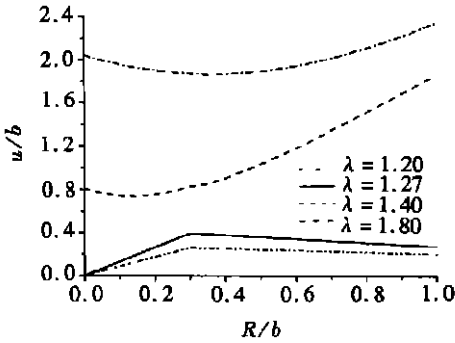


图3 $u(r)$ 随 R/b 的分布曲线

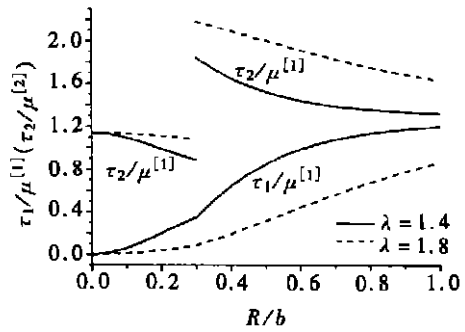


图4 τ_1, τ_2 随 R/b 的分布曲线

$$\begin{cases} \tau_1^{[ij]}(R) = \left(\frac{C^{[ij]}}{D^{[ij]}} \right)^2 \frac{C_1^{[ij]} t}{2+t} - \left(\frac{C^{[ij]}}{D^{[ij]}} \right)^4 \frac{C_2^{[ij]}}{(2+t)^2} + C_3^{[ij]}, \\ \tau_2^{[ij]}(R) = \tau_3^{[ij]} = \left(\frac{C^{[ij]}}{D^{[ij]}} \right)^2 \frac{C_1^{[ij]}}{2+t} - \left(\frac{C^{[ij]}}{D^{[ij]}} \right)^4 \frac{C_2^{[ij]} t}{(2+t)^2} + C_3^{[ij]}, \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (23)$$

式中, t 满足方程

$$\begin{cases} R(t) = C^{[1j]} \frac{t^{1/2}}{(1-t)^{1/3}(2+t)^{1/6}} & (0 \leq R \leq a), \\ R(t) = C^{[2j]} \frac{t^{1/2}}{(1-t)^{1/3}(2+t)^{1/6}} & (a \leq R \leq b). \end{cases} \quad (24)$$

对给定的 $\lambda \geq \lambda_{cr}$, 球体中半径为 R 处相应的 t 值由(24) 给出, 则应力分量由(23) 式给出. $\lambda < \lambda_{cr}$ 时, 平凡解对应的应力分布由(7)、(12) 式给出. 当 $\mu^{[2j]} = 2\mu^{[1j]}$, $\nu = 0.2$ 时, 球体中的应力分布示于图4. 当 $\lambda \leq \lambda_{cr}$ 时, 组合球体处于均匀分布的变形状态, 应力的大小随 λ 的增加而增加. 当 $\lambda \geq \lambda_{cr}$ 时, 径向应力 τ_1 在空穴表面处为零, 且随球体半径 R 的增加而增加; 环向应力 τ_2 在空穴表面处为一个有限的值, 且随球体半径 R 的增加而减少; 在材料的界面处径向应力 τ_1 是连续的, 环向应力是不连续的, 发生一定量的跳跃, $\mu^{[2j]} > \mu^{[1j]}$ 时, 其跳变值为正, $\mu^{[2j]} < \mu^{[1j]}$ 时, 其跳变值为负.

当 $\lambda \leq \lambda_{cr}$ 时, $\tau_{1h}(0) = \tau_{2h}(0) = \frac{1}{a_1^2(\lambda)} \left(C_1^{[1j]} - \frac{C_2^{[1j]}}{a_1^2(\lambda)} \right) + C_3^{[1j]}$;

当 $\lambda > \lambda_{cr}$ 时, $\tau_{2c}(0) = \left(\frac{C^{[1j]}}{D^{[1j]}} \right) \frac{C_1^{[1j]}}{2} + C_3^{[1j]}$, $\tau_{1c}(0) = 0$.

显然可见, 在 $\lambda \geq \lambda_{cr}$ 时, 球体中应力随 λ 的变化有一个明显的间断现象, 在靠近空穴边缘处尤为明显, 但随球体半径 R 的增加而减少. 空穴边缘的应力间断现象示意于图5. 由图可见, 和不可压组合材料相比较^[2], 不同的是当 $\lambda \leq \lambda_{cr}$ 时, $\tau_{1h}(0)$, $\tau_{2h}(0)$ 随 λ 的增加形式是非线性的, 而当 $\lambda > \lambda_{cr}$ 时, $\tau_{2c}(0)$ 是一个有限的值. 同时也可以看到, 球体中应力 $\tau_{2c}(R)$ 在靠近空穴边缘处有明显的应力集中现象, 在空穴边缘处最大, 其值为 $K_{max} = \tau_{2c}(0) / \tau_{2h}(0)$ (当 $\mu^{[2j]} = 1.2\mu^{[1j]}$, $\nu = 0.2$ 时 $K_{max} = 1.54$), 但随球体半径 R 的增加而减弱.

4 能量分析

由前面的分析可见, 组合球体在 $\lambda \geq \lambda_{cr}$ 时可以发生右分叉, 相应的有两个平衡解; 也可以发生左分叉, 在 $\lambda_g \leq \lambda \leq \lambda_{cr}$ (λ_g, δ_g 为分叉曲线上的拐点, 如图2所示) 时相应的有三个平衡

解, 在 $\lambda \geq \lambda_{cr}$ 时有两个平衡解. 为了判断平衡解的稳定性有必要比较两种变形状态下球体的能量. 不难得到球体的总能量为

$$E = \int_V W dV = 4\pi \int_0^a R^2 W dR \quad (25)$$

应用[5]和[7]中的变换方法, 对于平凡解, 由(25)、(4) 可得能量的表达式

$$E_h(p_0) = \frac{4}{3}\pi a^3 [W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)]|_{R=a^-} - \frac{4}{3}\pi a^3 \left[W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right] |_{R=a^+} + \frac{4}{3}\pi b^3 \left[W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right] |_{R=b} \quad (26)$$

式中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 对应于 λ , 由(3)和(12) 确定. 对于空穴分叉解, 能量的表达式为

$$E_c(p_0) = \frac{4}{3}\pi a^3 \left\{ W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right\} |_{t=t_a^{[1]}} - \frac{4}{3}\pi a^3 \left\{ W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right\} |_{t=t_a^{[2]}} + \frac{4}{3}\pi b^3 \left\{ W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right\} |_{t=t_b} \quad (27)$$

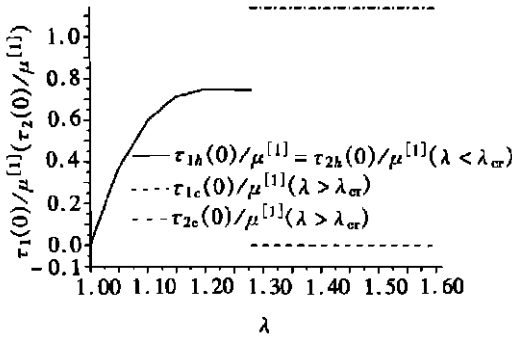


图 5 空穴边缘应力间断示意图

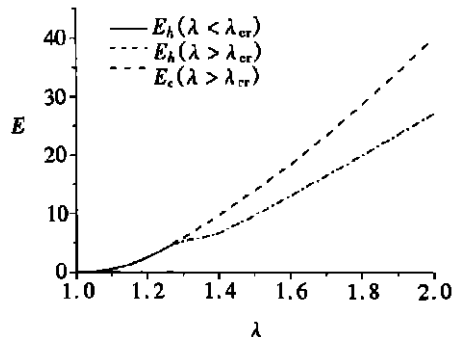


图 6 球体的能量曲线 ($\mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}$)

式中, $t_a^{[1]}, t_a^{[2]}, t_b$ 对应于 λ 由(21) 确定. 由(26) 和(27) 所得球体的能量比较曲线示于图 6 和图 7. 可见对右分叉曲线而言, 当 $\lambda > \lambda_{cr}$ 时, 总有 $E_c(\lambda) < E_h(\lambda)$ 成立, 即分叉解的能量总是小于平凡解的能量, 因此当 $\lambda > \lambda_{cr}$ 时, 分叉解是稳定的. 对左分叉曲线而言, 当 $\lambda > \lambda_{cr}$ 时, 对于 $\delta \leq \delta_g$ (λ_g, δ_g 为分叉曲线上的拐点, 如图 2 所示) 的分叉曲线总有 $E_c(\lambda) > E_h(\lambda)$ 成立, 即该部分分叉解的能量总是大于平凡解的能量, 分叉解是不稳定的; 对于 $\delta > \delta_g$ 的分叉曲线, 当 $\delta > \delta_c(\lambda, E_t)$ 为能量曲线上分叉解的能量等于平凡解的能量的点) 时, 有 $E_c(\lambda) < E_h(\lambda)$ 成立, 即该部分分叉解的能量小于平凡解的能量, 分叉解是稳定的. 因此, 当 $\delta > \delta_c$ 时, 分叉解是稳定的. 对右分叉曲线而言, 组合球体中的空穴是从零开始连续性的增长的, 而对左分叉曲线而言, 组合球体中的空穴是以一个有限的值突然出

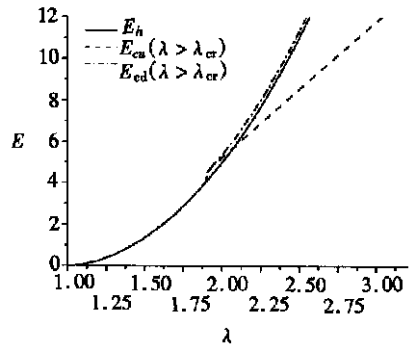


图 7 球体的能量曲线 ($\mu^{[2]} = 0.25\mu^{[1]}$)

现的。左分叉曲线的稳定性也可见图 2 所示。

[参 考 文 献]

- [1] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinearly elastic solids: A review[J]. Appl Mech Rev, 1995, **48**(8): 471—485.
- [2] Horgan C O, Pence T J. Void nucleation in tensile dead loading of a composite incompressible nonlinearly elastic sphere[J]. J Elasticity, 1989, **21**(1): 61—82.
- [3] Horgan C O, Pence T J. Cavity formation at the center of a composite incompressible nonlinearly elastic sphere[J]. J Appl Mech, 1989, **56**(2): 302—308.
- [4] Horgan C O, Abeyaratne R. A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of a microvoid[J]. J Elasticity, 1986, **16**(1): 189—200.
- [5] Horgan C O, Void nucleation and growth for compressible nonlinearly elastic materials: An example [J]. Int J Solids Structures, 1992, **29**(2): 279—291.
- [6] 尚新春, 程昌钧. 超弹性材料中的球形空穴分叉[J]. 力学学报, 1996, **28**(6): 751—756.
- [7] SHANG Xin_Chun, CHENG Chang_jun. Exact solution for cavitating bifurcation for compressible hyperelastic materials[J]. Int J Engineering Science, 2001, **39**(9): 1101—1117.
- [8] 任九生, 程昌钧. 不可压超弹材料中的空穴分叉[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(8): 783—789.
- [9] REN Jiu_sheng, CHENG Chang_jun. Cavitating bifurcation for incompressible transverse isotropic hyperelastic materials[J]. J Engineering Mech, 2002, **44**(2): 245—257.

Cavity Formation at the Center of a Sphere Composed of Two Compressible Hyper_Elastic Materials

REN Jiu_sheng^{1,2}, CHENG Chang_jun^{1,2}, ZHU Zhengyou^{1,3}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,

Shanghai 200072, P. R. China ;

2. Department of Mechanics, Shanghai University,

Shanghai 200436, P. R. China ;

3. Department of Mathematics, Shanghai University,

Shanghai 200436, P. R. China)

Abstract: The cavitating bifurcation problem in a solid sphere composed of two compressible hyperelastic materials under a uniform boundary radial stretch was examined. The solutions, including the trivial solution and the cavitating solutions, were obtained. The bifurcation curves and the stress contributions subsequent to cavitation were discussed. The phenomena of the right and the left bifurcations as well as the catastrophe and concentration of stresses are observed. The stability of solutions is discussed through the energy comparison.

Key words: compressible hyper_elastic material; cavitating bifurcation; catastrophe and concentration of stress; energy comparison