

文章编号: 1000-0887(2003) 10-1090-11

刚性目标形状反演的一种 非线性最优化方法*

尤云祥, 缪国平

(上海交通大学 船舶与海洋工程学院, 上海 200030)

(戴世强推荐)

摘要: 发展了从声散射场的远场分布的信息来再现声刚性目标形状反问题的一种非线性最优化方法, 它是通过独立地求解一个不适定的线性系统和一个适定的非线性最小化问题来实现的。对反问题的非线性和不适定性的这种分离式数值处理, 使所建立方法的数值实现是很容易和快速的, 因为在确定声刚性障碍物形状的非线性最优化步中, 只需求解一个只有一个未知函数的小规模的最小平方问题。该方法的另一个特别的性质是, 只需要远场分布的一个 Fourier 系数, 即可对未知的刚性目标物形设别。进而提出了数值实现该方法的一种两步调整迭代算法。对具有各种形状的二维刚性障碍物的数值试验保证了本算法是有效和实用的。

关键词: 声散射; 反问题; 远场分布

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

引 言

在无损检测、医学成像、遥感遥测和地震成像等许多工程技术领域中, 从声散射波的远场响应来再现散射目标形状的问题是一类十分重要的反问题。然而, 由于其非线性和不适定的性质, 这类反问题的求解是特别困难的^[1]。所幸的是, 在最近 20 多年中, 已有大量求解这类反问题的数值方法。非线性最优化方法和 Newton 型方法是其中最重要的两类方法。实践中, 非线性最优化方法通常要求求解一个规模很大的最优化问题^[2~6]。例如, 在[2, 3]中的方法需要确定两个未知函数, 而[4~6]中的方法则需要确定 $N + 1$ 个未知函数, 其中 N 是入射波的个数。不过, 这类方法有一个特别吸引人的性质, 那就是它们不需求解正问题, 而且已成功地用来求解 3 维问题^[3~6]。原则上, Newton 型方法在其每个迭代步中均需求解正问题, 而且迄今只有二维情形的数值试验^[7~10]。此外, 需要一提的是, 除了[2, 3]中的方法外, 所有其他的方法都需要远场分布在所有观测方向上的信息, 而[2, 3]中的方法要求的是远场分布的所有 Fourier 系数。

然而, 在实践中, 要获得这种全孔径信息通常是很困难的, 人们必须考虑这样的情况, 即远

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_05_09

基金项目: 高等学校全国优秀博士论文作者专项基金资助项目; 上海市教委曙光学者计划基金资助项目

作者简介: 尤云祥(1963—), 男, 江苏人, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: gpmiao@mail.sjtu.edu.cn)。

场分布是在某个有限孔径上若干个观测点上测量得到的。所幸的是, 目前已有许多求解这种有限孔径反问题的数值方法^[11~17]。另一方面, 从远场分布的某些 Fourier 系数来析取障碍物几何特征, 也是一个相当有意义的问题。在文献[2, 3]中已经表明, 从远场分布的所有 Fourier 系数的信息, 来再现声软障碍物的形状是可行的。最近, 我们进一步表明了, 仅从远场分布的某一个 Fourier 系数的信息, 已经足够来获得声软障碍物或可穿透障碍物的形状的一个满意重构了^[18, 19]。由于远场分布的解析性质, 如果它在单位球面的某个具有非空内部的子集中的信息是已知的, 那么由这些信息是可以唯一地恢复其在整个测量空间中的信息的^[1]。因此, 从远场分布在某个有限孔径中的远场测量, 能够析取散射目标的几何特征是并不奇怪的。然而, 仅从远场分布的某一个 Fourier 系数的信息, 要唯一地确定它在整个测量空间中的信息是不可能的。因此, 表征远场分布的某一个 Fourier 系数与散射目标间的联系应当是相当有意义的。

本文将就声刚性目标的形状反演问题继续这一研究。在下一节中, 我们将发展求解这个反问题的一种非线性最优化方法, 并证明仅从远场分布的某一个 Fourier 系数的信息, 来获得声刚性目标的一个理想重构是可能的。最后, 我们将提出数值实现这个最优化方法的一种两步调整迭代算法, 并提供某些数值算例来表明这个算法的有效性。

1 理论分析

考虑时谐声波在横截面为 D 的一个声刚性无限长柱障碍物上的散射。设 $k > 0$ 为波数, 正散射问题就是求解 Helmholtz 方程

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{在 } R^2 \setminus D \text{ 中,} \tag{1}$$

并约束 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上,} \tag{2}$$

其中, ∂D 是 D 的光滑边界, n 是 ∂D 的单位外法线方向。在 $R^2 \setminus D$ 中, 我们有分解 $u = u^s + u^i$, 其中, u^i 是一个入射角为 α 的平面入射波, 它由 $u^i(x) = \exp[ikr \cos(\theta - \alpha)]$ 给定, 式中, (r, θ) 是 $x \in R^2$ 的极坐标, u^s 是散射场, 它要求满足 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right] = 0 \quad r = |x| \cdot \tag{3}$$

由 Sommerfeld 辐射条件(3)可得, u^s 有如下的渐近形式

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} u_\infty(\hat{x}; \alpha) + O(r^{-3/2}), \tag{4}$$

其中 $\hat{x} = x / |x|$ 。

函数 u_∞ 即为熟知的散射场的远场分布。我们用 $u_\infty(\theta; \alpha)$ 表示它对入射角 α 的依赖关系, $(1, \theta)$ 为 \hat{x} 的极坐标。设 p 是一个整数, 记 $u_\infty^p(\alpha)$ 为远场分布 $u_\infty(\theta; \alpha)$ 对观测角 θ 的第 p 个 Fourier 系数, 即

$$u_\infty^p(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_\infty(\theta; \alpha) \exp[-ip\theta] d\theta \tag{5}$$

那么反问题就是: 对某个给定的正波数 k 及 N 个不同入射角 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, 从 $u_\infty^p(\alpha)$ 的信息来确定障碍物 D 的形状。

对 u 在 $R^2 \setminus D$ 中应用 Green 定理, 并由 Hankel 函数 $H_0^{(1)}$ 的渐近性质可得

$$u_{\infty}(\theta; \alpha) = \frac{i}{4} \int_{\partial D} \frac{\partial \exp[-ik\rho \cos(\phi - \theta)]}{\partial n} u(y) ds(y), \quad (6)$$

其中, (ρ, ϕ) 是 $y \in R^2$ 的极坐标, $\gamma = \sqrt{2/(\pi k)} e^{-\pi/4}$. 由(5)和(6)可得

$$u_{\infty}^p(\alpha) = \frac{i}{4} \int_{\partial D} \frac{\partial v_p^i(\gamma)}{\partial n} u(y) ds(y), \quad (7)$$

式中

$$v_p^i(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-ik\rho \cos(\phi - \theta)] \exp[-ip\theta] d\theta \quad (8)$$

将 Jacobi-Anger 展开式

$$e^{-ik\rho \cos(\phi - \theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n(k\rho) e^{in(\theta - \phi)}, \quad (9)$$

代入(8)可得

$$v_p^i(\gamma) = (-i)^p J_p(k\rho) \exp[-ip\phi] \quad (10)$$

对 u^i 在 D 中应用 Green 定理, 可知

$$u^i(x) = -\frac{i}{4} \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial H_0^{(1)}(k|x-y|)}{\partial n} ds(y). \quad (11)$$

由上式可得

$$\int_{\Gamma} \exp[ikr \cos(\theta - \alpha)] g(x) ds(x) = -\int_{\partial D} u(y) \frac{\partial v^s(\gamma)}{\partial n} ds(y), \quad (12)$$

其中, Γ 是包含于障碍物 D 内的一条封闭曲线, $v^s(\gamma)$ 是一个以 $g \in L^2(\Gamma)$ 为密度函数的单势

$$v^s(\gamma) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(k|x-y|) g(x) ds(x). \quad (13)$$

现假定存在一个密度函数 g , 使 v^s 满足

$$\frac{\partial v^s(\gamma)}{\partial n} = -\frac{\partial v_p^i(\gamma)}{\partial n} \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}, \quad (14)$$

那么, 由(7)、(12)和(14), 易得

$$\frac{i}{4} \int_{\Gamma} \exp[ikr \cos(\theta - \alpha)] g(x) ds(x) = u_{\infty}^p(\alpha) \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (15)$$

定义积分算子 $F_0: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$

$$(F_0 g)(\theta) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \exp[-ikr_z \cos(\varphi - \theta)] g(z) ds(z) \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad (16)$$

其中, (r_z, φ) 是 $z \in R^2$ 的极坐标. 易知, (15)可改写为

$$(F_0 g)(\alpha - \pi) = u_{\infty}^p(\alpha) \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (17)$$

当 k^2 不是 Laplace 算子在 Γ 的内部区域 Γ_i 中的 Dirichlet 特征值时, F_0 是一个在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中有稠密值域的单射算子^[1]. 这意味着, 虽然(17)的精确解可以是不存在的, 但它在最大模意义上的近似解总是可以求得的, 而且如果精确解存在, 那么它是唯一的. 不幸的是, 如果 k^2 是 Laplace 算子在内区域 Γ_i 中的 Dirichlet 特征值, 那么 F_0 不再是单射算子而且其值域在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中不再稠密. 由于 Γ 的选择是任意的, 因此我们希望避开这个缺陷. 为此, 我们引进

$$F_e(\theta; z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (-i)^n H_n^{(1)}(kr_z) e^{in(\theta - \varphi)} \quad r_z > 0, \quad (18)$$

其中, $H_n^{(1)}$ 是第一类 n 阶 Hankel 函数, 常数序列 a_n 要求满足

$$|1 + 2a_n| < 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{19}$$

或 $|1 + 2a_n| > 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$,
及

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| (2^n n! / k^n a^n)^2 < \infty, \tag{20}$$

式中, a 是使 $\{x \mid |x| < a\} \subset \Gamma_i$ 的一个常数.

现在, 我们用

$$(Fg)(\alpha - \pi) = u^\infty(\alpha) \quad \alpha \in [0, 2\pi] \tag{21}$$

来取代积分方程(17), 其中积分算子 $F: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(-\pi, \pi)$ 为

$$(Fg)(\theta) = \frac{i\sqrt{\lambda}}{4} \int_{\Gamma} \left\{ \exp[-ikr_z \cos(\varphi - \theta)] + Fe(\theta; z) \right\} g(z) ds(z) \quad \theta \in [-\pi, \pi] \tag{22}$$

在开始我们的分析之前, 我们先作一些注记. 首先, 我们注意到, 由假设(20)和Hankel函数 $H_n^{(1)}$ 的渐近性质

$$H_n^{(1)}(kr_z) = O\left(\frac{2^n n!}{k^n r_z^n}\right) \tag{23}$$

易知, 级数(18)当 $|z| > a$ 是一致收敛的. 因此, 假设(20)对级数(18)的收敛性是必要的. 另一方面, 我们还希望强调的是, 为了保证修改的积分方程(21)的解对所有 $k > 0$ 的唯一性, 假设(19)也是必要的. 最后, 紧跟文献[20], 记 Ω_a 是一个包含于 Γ_i 中的半径为 a 的圆盘, 并且取 a_n 为

$$a_n = - \frac{k J_n'(ka) + i \lambda J_n(ka)}{k H_n^{(1)'}(ka) + i \lambda H_n^{(1)}(ka)} \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \tag{24}$$

其中, λ 是一个正常数. 我们注意到, 那些系数是满足假设(19)和(20)的. 那么, 易知 $Fe(x; \alpha)$ 是下面的散射问题的一个辐射解

$$\Delta w + k^2 w = 0 \quad \text{在 } R^2 \setminus \Omega_a \text{ 中}, \tag{25}$$

$$w(x) = u^i(x; \alpha + \pi) + Fe(x; \alpha) \quad \text{在 } R^2 \setminus \Omega_a \text{ 中}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} + i \lambda w = 0 \quad \text{在 } \partial \Omega_a \text{ 上}, \tag{27}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial w}{\partial r} - i k w \right] = 0 \quad r = |x|. \tag{28}$$

对修改的积分方程(21), 我们可以证明下面的定理

定理 1.1 对所有 $k > 0$, 如果对某个 $g \in L^2(\Gamma)$, $Fg = 0$, 那么 $g = 0$.

证明 定义单层势 u_0

$$u_0(x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left\{ H_0^{(1)}(k|x-z|) + X(x; z) \right\} g(z) ds(z), \tag{29}$$

其中

$$X(x; z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) H_n^{(1)}(kr_z) e^{in(\theta - \varphi)}. \tag{30}$$

由Hankel函数 $H_n^{(1)}$ 的渐近性质易知, 单层势 u_0 是Helmholtz方程在 $R^2 \setminus \Gamma_i$ 中的一个辐射解, 且其远场分布是 $(Fg)(\theta) = 0$. 由此可知, 在 $R^2 \setminus \Gamma_i$ 中, $u_0 = 0$. 从而在 Γ 上, $u_0 = 0$.

现在我们希望证明: 在 Γ_i 中, $u_0 = 0$ 为此, 设 b 是使 $\{x: |x| < b\} \subset \Gamma_i$ 的一个常数. 将 Bessel 函数的加法公式

$$H_0^{(1)}(k|x-z|) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(kr) H_n^{(1)}(kr_z) e^{in(\theta-\varphi)} \quad r < r_z \quad (31)$$

代入(29)可知, 当 $0 < b' \leq |x| < b$ 时

$$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n [J_n(kr) + a_n H_n^{(1)}(kr)] e^{in\theta}, \quad (32)$$

其中 $A_n = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_n^{(1)}(kr_z) e^{-in\varphi} g(z) ds(z)$.

由 Green 公式及 Wronskian 关系式

$$\begin{cases} H_n^{(1)}(t) J_n'(t) - J_n H_n^{(1)'}(t) = -\frac{2i}{\pi t}, \\ H_n^{(1)}(t) H_n^{(2)'}(t) - H_n^{(1)'}(t) H_n^{(2)}(t) = -\frac{4i}{\pi t}, \end{cases} \quad (33)$$

我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \left[u_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] ds = \int_{r=b}^r \left[u_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} \right] ds = \\ &2i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |A_n|^2 (1 - |1 + 2a_n|^2). \end{aligned} \quad (34)$$

由(19), 当 $0 < b' \leq |x| < b$ 时, $u_0 = 0$ 由解析延拓的唯一性可得, 在 Γ_i 中, $u_0 = 0$ 从而, $g = 0$.

上述分析表明, 如果(21)的精确解存在, 那么它是唯一的. 而且我们可以进一步证明: 积分方程(21)的解存在, 当且仅当存在一个函数 $g \in L^2(\Gamma)$, 使由(29)确定的单层势 u_0 是 Helmholtz 方程在 $R^2 \setminus D$ 中的一个辐射解, 且满足边界条件:

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = -\frac{\partial v_p^i}{\partial n} \quad \text{在 } \partial D \text{ 上.} \quad (35)$$

为证明这个结论, 我们用 $u^s(x; \alpha)$ 表示它对入射角 α 的依赖关系, 并记

$$U^s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^s(x; \alpha) \exp[-ip(\alpha + \pi)] d\alpha, \quad (36)$$

那么由(2)易知, 在 ∂D 上, $\partial U^s / \partial n = -\partial v_p^i / \partial n$, 而且由互易原理^[1]易知, U^s 是 Helmholtz 方程在 $R^2 \setminus D$ 中的一个辐射解, 且其远场分布是 $U_{\infty}(\theta) = u_{\infty}^p(\pi + \theta)$. 现在, 让 $g \in L^2(\Gamma)$ 是积分方程(21)的解, 那么 $U_{\infty}(\theta) = (Fg)(\theta)$, 其中, $(Fg)(\theta)$ 是由(29)确定的单层势 u_0 的远场分布. 这表明在 $R^2 \setminus D$ 中, $U^s = u_0$, 从而, 在 ∂D 上, $\partial u_0 / \partial n = -\partial v_p^i / \partial n$. 由此可知, 由(29)确定的单层势 u_0 是 Helmholtz 方程在 $R^2 \setminus D$ 中的一个满足边界条件(35)的辐射解. 另一方面, 如果存在一个函数 $g \in L^2(\Gamma)$, 使由(29)确定的单层势 u_0 满足边界条件(35), 那么完全类似地可以证明, g 是积分方程(21)的解.

不幸的是, (21)的精确解一般地是可以不存在的, 因为通常不存在 Helmholtz 方程在 $R^2 \setminus D$ 中的一个满足边界条件(35)的辐射解, 使它能表示为(29)的形式. 不过, 我们可以证明使(21)近似成立的一个函数 g 总是能够找到的. 为此, 我们定义单层势算子 $S: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\partial D)$

$$(Sg)(x) = \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} \left\{ H_0^{(1)}(k|x-z|) + X(x; z) \right\} g(z) ds(z) \quad x \in \partial D. \quad (37)$$

对修改的单层势 S , 与定理 1.1 的证明是类似地, 我们有

定理 1.2 对任意 $k > 0$, 单层势算子 S 是单射, 且在 $L^2(\partial D)$ 中有稠密的值域.

这个事实表明, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个函数 $g \in L^2(\Gamma)$ 使

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} - \frac{\partial U^g}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial D)} \leq \varepsilon \tag{38}$$

由正散射问题是适定的可知, 存在一个不依赖于 ε 的常数 M 使

$$\max_{\alpha \in [-\pi, \pi]} \|(Fg)(\theta) - u_\infty^g(\pi + \theta)\| \leq M\varepsilon \tag{39}$$

由此可得

$$\max_{\alpha \in [0, 2\pi]} \|(Fg)(\alpha - \pi) - u_\infty^g(\alpha)\| \leq M\varepsilon \tag{40}$$

现在, 从(38)可得

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial v_p^i}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial D)} \leq \varepsilon \tag{41}$$

上述分析建议了求解前面所述反问题的一种非线性最优化方法. 为了更精确地描述这个方法, 我们现在假定 D 对坐标原点是星形的, 即 ∂D 可以用参数形式表示为 $r = r(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, 其中径向函数属于某个紧子集 $V \subset C^{1, \beta}[0, 2\pi]$, $0 < \beta \leq 1$. 那么由(39)和(41), 我们可得, 对所有 $k > 0$, 泛函

$$M(r; g) = \sum_{n=1}^N |(Fg)(\alpha_n - \pi) - u_\infty^g(\alpha_n)|^2 + \sigma \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n} (u_0 + v_p^i)(r(\theta)\hat{x}(\theta)) \right|^2 d\theta, \tag{42}$$

对 $g \in L^2(\Gamma)$, $r \in V$ 的下界是零, 其中, $\sigma > 0$ 是在数值实现时需要合适选择的一个惩罚参数. 这个结果表明, 障碍物 D 的形状的一个近似可以这样来得到, 即寻找一个径向函数 r 和密度函数 g , 使泛函(42) 在 r 和 g 处达到其下确界.

2 数值结果

在基于泛函(42)的最优化方法中, 要求确定两个未知函数. 在实践中, 为了减少运算量, 我们当然希望未知函数的个数能进一步减少. 我们注意到, 由于积分算子 F 是单射且 $L^2[-\pi, \pi]$ 中有稠密的值域, 因此函数 g 实际上是可以从积分方程(21) 独立于径向函数 r 来确定的. 这意味着, 为了进一步减少泛函(42)中未知函数个数的一个两步过程是可能的. 更精确地, 在第一步中, 我们首先由积分方程

$$(Fg)(\alpha_n - \pi) = u_\infty^g(\alpha_n) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \tag{43}$$

来确定 g 的一个近似. 在求得 g 的一个近似后, 在第二步中, 我们寻找一个径向函数 r , 使不等式(41)成立. 这个过程可以通过求解最小化问题

$$M_s(r) = \sigma \min_{r \in V} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial n} (u_0 + v_p^i)(r(\theta)\hat{x}(\theta)) \right|^2 d\theta \tag{44}$$

来实现.

我们注意到, 这种两步处理的一个显著优点是, 它允许我们独立地处理反问题的不适定性和非线性. 这使得在确定我们实际感兴趣的径向函数 r 的非线性最优化步中, 我们只需要求解一个有一个未知函数的适定的最小化问题. 从而, 与组合最优化问题(42)相比, 所导出的算法将更快且更简单.

为了数值处理积分方程(43),我们进一步假设内曲线 Γ 对坐标原点也是星形的,即 Γ 可以用参数形式表示为 $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. 现在,我们用截断 Fourier 级数

$$g(\varphi) \approx g^{(a)}(\varphi) = \sum_{m=-N_g}^{N_g} g_m^{im\varphi} \quad (45)$$

来计算 g 的一个近似. 将(45)代入(43)可得

$$\sum_{m=-N_g}^{N_g} A_m(\alpha_n) g_m = \frac{u_\infty^p(\alpha_n)}{Y} \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (46)$$

其中

$$A_m(\alpha_n) = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \left\{ \exp[ikr \cos(\alpha_n - \varphi)] + F_e(\alpha_n - \pi; r(\varphi) \hat{x}(\varphi)) \right\} \exp[im\varphi] J_r(\varphi) d\varphi, \quad (47)$$

$$J_r(\varphi) = \sqrt{r^2 + r^2 \varphi^2}.$$

由于积分算子 F 的积分核是解析的,因此由它离散而得的代数方程组(46)是不适定的. 为了得到(46)的一个稳定的数值解,我们采用 Tikhonov 正则化方法,即用最小平方问题

$$J(g^{(a)}) = \min_{g^{(a)}} \left\{ \sum_{n=1}^N \left| \sum_{m=-N_g}^{N_g} A_m(\alpha_n) g_m - \frac{u_\infty^p(\alpha_n)}{Y} \right|^2 + \lambda \sum_{m=-N_g}^{N_g} |g_m|^2 \right\} \quad (48)$$

来取代(46),其中 $\lambda > 0$ 是 Tikhonov 正则参数. 对(48)的数值处理及最优正则参数 λ 的选择问题,请参见文献[21].

现在,我们考虑最优化问题(44)的数值实现问题. 为此,我们用有限 Fourier 级数

$$r(\theta) \approx r_a(\theta) = \sum_{n=0}^{N_r} r_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{N_r} r_{n+N_r} \sin n\theta \quad (49)$$

来取代 r , 并将 Bessel 函数的加法公式(31)代入(44),在用梯形法则离散(44)中的积分后,(44)可化为

$$M_s(r_a) = \sigma \frac{2\pi}{M} \sum_{q=1}^M \left| \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \sum_{m=-N_g}^{N_g} A_{n,s} H_n^{(1)}(kr_a(\phi_q)) \exp[in\phi_q] + v_p^i(r_a(\phi_q) \hat{x}(\phi_q)) \right\} \right|^2, \quad (50)$$

其中, $\phi_q = 2\pi q/M$, 而 $A_{n,s}$ 为

$$A_{n,s} = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(kr(\theta)) + a_n H_n^{(1)}(kr(\theta)) \right\} \exp[-in\theta] g^{(a)}(\theta) J_r(\theta) d\theta. \quad (51)$$

我们注意到,在(51)的右端只有一个待定的未知函数,因此这两步算法只需求解一个小规模的完全非线性最小化问题. 计算中我们发现内曲线 Γ 的形状对重构的质量是至关重要的. 一般地,如果内曲线的形状与原障碍物越接近,那么重构越成功. 这个事实启发我们,上述两步算法是能够通过用前一步重构所得信息采用调整迭代的方法来改进的. 现在我们更精确地来描述这个过程如下:

预置步: 首先选择一条内曲线 Γ_0 . 取 $\Gamma = \Gamma_0$, 由(48)计算正则解 $g_0^{(a)}$. 然后,对求得的 $g_0^{(a)}$,以某个径向函数 r_s 为初始猜测,求解最优化问题(50)的最优解 r_0 ;

调整步: 假设 $g_n^{(a)}$ 和 r_n 已经求得. 取 $\Gamma = \Gamma_n$, 由(48)计算正则解 $g_{n+1}^{(a)}$, 其中, $\Gamma_n: r(\varphi)$

$= U_n(\varphi)$, μ 是一个给定的正常数。然后, 对求得的 $g_{n+1}^{(a)}$, 以径向函数 r_n 为初始猜测, 求解最优化问题(50) 的最优解 r_{n+1} 。反复这个过程, 直到得到一个满意的重构为止。

反问题所需的数据是相应于 N 不同的入射角 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 的远场分布的第 p 个 Fourier 系数 $u_\infty^p(\alpha)$, 其中 $\alpha_n = 2\pi n/N$ 。这些数据是通过用最小平方方法求解正问题得到的^[2]。在所有的算例中, M, N_r 和 N_g 分别取为 40、6 和 10, 而 N 和 N_g 分别取为 13 和 6。 a_n 由(24) 给定, 其中, 我们已经取 $\lambda = k, a = 0.3$ 。调整因子 μ 取为 2/3, 开始内曲线 Γ_0 取为半径是 a_0 的圆周。最小化问题(50) 是一个约束非线性最小平方问题, 我们用序列二次规划方法求解这个问题^[22], 其中所用的约束条件是: $-5 \leq r_a \leq 5$ 。初始猜测 r_s 均取为 $r_s = 1$ 。计算中我们发现, 在最小化问题(50) 中引进惩罚参数 σ 是必要的, 它的选择不仅与障碍物的几何形状有关, 还与波数 k 的取值有关。在文献[18] 中, 我们已经就声软障碍物的情况, 建立了一个有效的选取方法, 在此不再赘述。

在下面的图中, 实线均表示精确的边界曲线, 虚线均表示其相应的重构。为了检验算法对噪音误差的稳定性, 对每个入射角 α , 我们分别在 Fourier 系数 $u_\infty^p(\alpha)$ 的实部和虚部加入在区间 $[-\delta, \delta]$ 中均匀分布的随机数。

我们首先考虑花生米形的重构, 其径向函数是 $r = 1.5 \sqrt{\cos^2\theta + 0.25\sin^2\theta}$ 。相应的重构如图 1 所示, 其中 IT 表示调整迭代过程的循环次数。正如我们所希望的那样, 用调整迭代的方法能够很好地改进重构的质量。不过, 一般地, 3 到 4 次循环已能够获得足够好的重构。因此, 在余下的计算中, 在 3 次循环后我们终止调整迭代过程。

在第二个算例中, 我们考虑蛋形的重构, 它的径向函数是: $r = 1 - 0.5\cos\theta$ 。图 2 给出了对某些不同的 Fourier 系数的重构结果。结果表明对低阶 Fourier 系数重构结构均是很满意的。不过, 对高阶 Fourier 系数, 我们只能得到较差的重构。下面, 我们将就此现象给出某些解释。熟知, 对任意 $\rho > R$, 远场分布 u_∞ 的 Fourier 系数必须满足



图 1 当 $k = 1, a_0 = 0.5, p = 0, \delta = 0.0$ 时, 花生米形及其重构

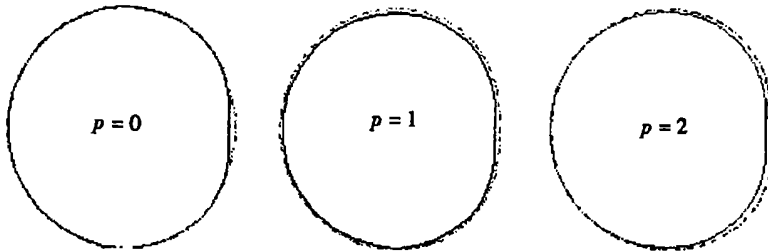


图 2 当 $k = 1, a_0 = 0.4, \delta = 0.0$ 时, 蛋形及其重构

如下的增长性条件^[1]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_\infty^n|^2 (2^n n! / k^n \rho)^2 < \infty, \tag{52}$$

其中, R 是一个中心在坐标原点且把障碍物 D 包含于其内的某个圆的半径。这意味着, 即使在远场数据 u_∞ 中有很小的误差, 其 Fourier 系数 u_∞^p 中的误差也将被以因子 $H_p^{(1)}(k\rho) = O[(2^p p!)/(k^p \rho)]$ 放大。由于密度函数 g 是通过求解一个严重不适定的线性方程组得到的,

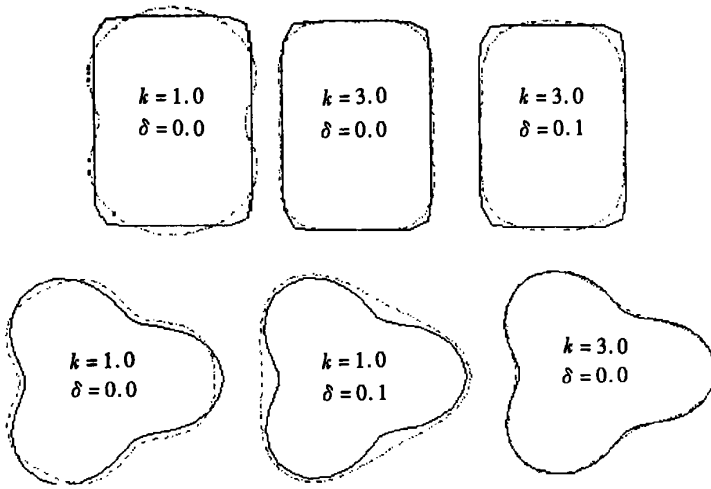


图 3 当 $a_0 = 0.5, p = 0$ 时, 圆角矩形和橡胶形的重构

因此对大的 $|p|$ 值, 在 Fourier 系数 u_∞^p 中的这种被放大的误差将严重限制 g 的求解精度, 从而导致缺少精度的 r_a 。另一方面, 从式(52), 我们还可以观测到, 对大的 $|p|$ 值, 远场分布 u_∞ 的 Fourier 系数 u_∞^p 将是指数地衰减的, 因此密度函数 g 及其作为核函数的单层势 u_0 也将是指数地衰减的。这意味着, 对大的 $|p|$ 值, 基于(50)的非线性最小化问题的数值求解将是特别困难的。事实上, 我们的计算表明, 一般地, 当 $p \geq 6$ 时, $M_s(r_a)$ 及其对 r_n 的导数的值都是非常小的。在这种情况下, 我们的基于泛函(50)的最优化算法已经不能有效地工作了。虽然这个问题可以通过增大惩罚参数 σ 的取值来克服, 但即使如此, 我们也只能得到缺少精度的重构。因此, 在余下的算例中, 我们只考虑 $p = 0$ 的情况。

在最后一个算例中, 我们考察了波数及测量误差水平对重构精度的影响, 所用的障碍物是径向函数为:

$$r = ((\cos\theta)^6 + (2\sin\theta/3)^6)^{-1/6}$$

的圆角矩形和径向函数为

$$r(\theta) = 0.6 \sqrt{17/4 + 2\cos 3\theta}$$

的橡胶形, 相应的重构已在图 3 中画出。结果表明, 当波数增大时, 通常导致一个好的重构。这与我们对声软障碍物的观察结果是一致的^[18]。另一方面, 虽然增加噪音水平 δ , 重构精度也随着有一定程度的减小, 但即使在 Fourier 系数 $u_\infty^p(\alpha)$ 中加入 10% 随机误差, 得到一个合理的重构也是可能的。这表明了, 我们的算法是能够控制数据测量中噪音的影响的, 而且在数据测量中适度量的噪音, 并不会完全破坏我们对未知目标的有效探测。

3 结 论

本研究致力于数值求解从不完全远场数据来再现声刚性障碍物形状的反问题。提出了求解这类反问题的一种非线性最优化方法, 并对这个方法给出了严格的理论分析, 表明了仅从远场分布的一个 Fourier 系数来再现声刚性障碍物的形状是可能的。提出了数值实现该方法的一种在每个循环中包含两步的调整迭代算法。两步过程的应用使在确定障碍物物形的非线性最优化步中, 未知函数的个数减少了 50%, 而在调整迭代过程中, 通过利用前一次循环的信

息,使重构质量得到很大程度的提高。基于这个算法的数值算例表明,对低阶 Fourier 系数重构是满意的,而且即使对有噪音的数据,本算法也能得到一个合理的重构。

[参 考 文 献]

- [1] Colton D, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory [M]. Berlin: Springer, 1992.
- [2] Colton D, Monk P. A novel method for solving inverse scattering problem for time_harmonic acoustic waves in the resonance region II [J]. SIAM Appl Math, 1986, **46**(3): 506—523.
- [3] Colton D, Monk P. The numerical solution of the three_dimensional inverse scattering problem for time harmonic acoustic waves[J]. SIAM J Sci Comput, 1987, **8**(3): 278—291.
- [4] Kress R, Zinn A. On the numerical solution of the three_dimensional inverse obstacle scattering problem[J]. J Comput Appl Math, 1992, **42**: 49—61.
- [5] Angell T S, Kleinman R E, Kok B, et al. A constructive method for identification of an impenetrable scatterer[J]. Wave Motion, 1989, **11**: 185—200.
- [6] Jones D S, Mao X Q. Inverse problems in hard acoustic scattering[J]. Inverse Problems, 1989, **5**: 731—748.
- [7] Murch R D, Tan D C H, Wall D J N. Newton_Kantorovich method applied to two_dimensional inverse scattering for an exterior Helmholtz problem[J]. Inverse Problems, 1988, **4**: 1117—1128.
- [8] Kirsch A. The domain derivative and two applications in inverse scattering theory[J]. Inverse Problems, 1993, **9**: 81—96.
- [9] Munch L A. A Newton method for solving the inverse scattering problem for a sound_hard obstacle [J]. Inverse Problems, 1996, **12**: 309—323.
- [10] Hohag T. Logarithmic convergence rates of the iteratively regularized Gauss_Newton method for an inverse potential and inverse scattering problem[J]. Inverse Problems, 1997, **13**: 1279—1299.
- [11] Oches J R. The limited aperture problem of inverse acoustic scattering: Dirichlet boundary conditions [J]. SIAM J Appl Math, 1987, **47**(6): 1320—1341.
- [12] Zinn A. On an optimization method for the full_and limited_aperture problem in inverse acoustic scattering for a sound_soft obstacle[J]. Inverse Problems, 1989, **5**: 239—253.
- [13] Couchman L S. Inverse Neumann obstacle problem[J]. J Acoust Soc Am, 1998, **104**(5): 2615—2621.
- [14] Kress R, Rundell W. Inverse obstacle scattering using reduced data[J]. SIAM J Appl Math, 1999, **59**(2): 442—454.
- [15] You Y X, Miao G P, Liu Y Z. A fast method for acoustic imaging of multiple three_dimensional objects [J]. J Acoust Soc Am, 2000, **108**(1): 31—37.
- [16] You Y X, Miao G P, Liu Y Z. A simple method for visualizing multiple three_dimensional objects from near_field data with point source excitation[J]. Acta Acustica, 2001, **87**(1): 1—10.
- [17] You Y X, Miao G P, Liu Y Z. A numerical method for solving the limited aperture problem in three_dimensional inverse obstacle scattering[J]. International of Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2001, **2**: 29—42.
- [18] Miao G P, You Y X, Liu Y Z. A numerical method for the shape reconstruction problem in acoustic scattering[J]. Inverse Problems in Engineering, 2000, **8**(3): 229—249.
- [19] You Y X, Miao G P, Liu Y Z. A nonlinear optimization method for an inverse transmission problem [J]. Inverse Problems, 2001, **17**: 421—435.
- [20] Colton D, Monk P. On a class of integral equations of the first kind in inverse scattering theory[J].

- SIAM J Appl Math, 1993, **53**(3): 847—860.
- [21] Reginska T. A regularization parameter in discrete ill posed problems[J]. SIAM J Sci Comput, 1996, **17**(3): 740—749.
- [22] 赵风治. 数值优化中的二次逼近法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

Numerical Method for the Shape Reconstruction of a Hard Target

YOU Yun_xiang, MIAO Guo_ping

(School of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: A nonlinear optimization method was developed to solve the inverse problem of determining the shape of a hard target from the knowledge of the far field pattern of the acoustic scattering wave, it was achieved by solving independently an ill posed linear system and a well posed minimization problem. Such a separate numerical treatment for the ill posedness and nonlinearity of the inverse problem makes the numerical implementation of the proposed method very easy and fast since there only involves the solution of a small scale minimization problem with one unknown function in the nonlinear optimization step for determining the shape of the sound hard obstacle. Another particular feature of the method is that it can reproduce the shape of an unknown hard target efficiently from the knowledge of only one Fourier coefficient of the far field pattern. Moreover, a two step adaptive iteration algorithm was presented to implement numerically the nonlinear optimization scheme. Numerical experiments for several two dimensional sound hard scatterers having a variety of shapes provide an independent verification of the effectiveness and practicality of the inversion scheme.

Key words: acoustic scattering; inverse problem; far field pattern