

文章编号: 1000-0887(2003) 10-1075-08

均布荷载作用下压电材料简支梁的解析解^{*}

张琳楠¹, 石志飞²

(1. 中国农业大学 理学院, 北京 100083;
2. 北方交通大学 土木建筑工程学院 100044)

(王彪推荐)

摘要: 采用逆解法求解了均布荷载作用下压电材料简支梁的解析解。首先给出应力函数和电位移函数的多项式表达式, 进而根据相容方程以及应力和电位移、位移和电势的边界条件, 求得了同时考虑材料弹性参数、密度参数和压电参数呈梯度变化时, 简支梁在均布荷载作用下的解析解。作为特例还得到了常体力以及材料参数为常数时的解答。并对结果进行了讨论。

关键词: 简支梁; FGM; 解析解; 压电材料
中图分类号: O342 **文献标识码:** A

引 言

智能结构是近年来出现的一种新型结构形式。以压电材料作传感元件或驱动元件的智能结构, 由于其反应迅速、信号便于控制等优点, 无论在理论研究还是工程应用方面都得到了研究者的广泛关注^[1]。如借助于傅里叶变换对压电体三维基本解^[2,3]和三维夹杂问题^[4]的研究, 对压电体结构有限元分析方法的研究^[5,6]以及对压电材料微观执行器的研究^[7,8]等, 这些研究成果为进一步研究智能结构的形状感测和控制以及振动控制提供了参考。

然而, 人们同时也发现, 目前在工程中广泛使用的压电元器件还存在着许多缺陷, 如用作为执行器的压电双晶片, 其粘接层在低温时容易开裂, 在高温时又容易产生蠕变, 这在很大程度上限制了它在工程中的应用范围。为解决此问题, 人们试图用梯度功能压电材料取代压电双晶片, 希望取得较理想的效果。目前, 无论是材料制备^[9]、理论分析^[10,11]还是实验研究^[12]均表明, 这一尝试是成功的。对 BaTiO₃ 梯度功能压电陶瓷执行器的研究表明, 虽然执行器的横向位移稍有减小, 但梁内却不会再有应力失配现象出现^[12]。

采用逆解法, 本文研究了均布荷载作用下压电简支梁的解析解。通过假定适当形式的应力函数和电位移函数, 在材料弹性参数、材料密度参数和压电参数同时呈梯度变化的情况下, 得到了简支梁的解析解, 文[13]的解答是本文的特例之一, 而且本文所给解答具有非常简单的

* 收稿日期: 2002_03_12; 修订日期: 2003_05_13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50272003); 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划基金资助项目(教人司 2000[26]号)

作者简介: 张琳楠(1977—), 女, 四川人, 硕士(E-mail: zfsih178@sohu.com)。

本文联系人: 石志飞

表达式。最后, 本文对所得解答进行了讨论。

1 基本方程

设材料沿 z 轴极化, 考虑 xz 面内的平面应变问题, 其线性的力-电耦合本构方程可写为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = S_{11}\alpha_x + S_{13}\alpha_z + g_{31}D_z, & \varepsilon_z = S_{13}\alpha_x + S_{33}\alpha_z + g_{33}D_z, \\ \gamma_{xz} = S_{44}\tau_{xz} + g_{15}D_x, \\ E_x = -g_{15}\tau_{xz} + \zeta_{11}D_x, & E_z = -g_{31}\alpha_x - g_{33}\alpha_z + \zeta_{33}D_z, \end{cases} \quad (1)$$

其中 ε_{ij} 、 σ_{ij} 分别为应变张量和应力张量的分量, D_i 、 E_i 分别为电位移矢量和电场强度矢量, 变量下标 i 、 j 为张量坐标方向, 取值 1, 2; S_{ij} 是平面应变问题的弹性柔度参数, ζ_{ij} 是介电隔离率, g_{ij} 是压电电压参数。不考虑体电荷, 静力平衡方程可写为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0, & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} + F_z = 0, \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

F_i (即 F_x 、 F_z) 为体积力。此外, 用 u 和 w 分别表示沿 x 和 z 方向的位移, ϕ 表示电势, 在小变形情况下几何方程可表示为:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\varepsilon_z, \\ E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, & E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{cases} \quad (3)$$

由几何方程(3), 可导出应变和电场强度表示的协调方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

此外, 协调方程还可通过应力和电位移进一步表示为:

$$\begin{cases} \left[S_{11} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(S_{13} + \frac{S_{44}}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \alpha_x + \left[S_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(S_{13} + \frac{S_{44}}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \alpha_z + \\ g_{31} \frac{\partial^2 D_z}{\partial z^2} + g_{33} \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} - g_{15} \frac{\partial^2 D_z}{\partial x \partial z} = -\frac{S_{44}}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right), \\ (g_{15} + g_{31}) \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + g_{33} \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} + \zeta_{11} \frac{\partial D_x}{\partial z} - \zeta_{33} \frac{\partial D_z}{\partial x} + g_{15} F_x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

对图 1 所示简支梁, 下表面接地, 上表面受集度为 q 的均布荷载作用。考虑体力及材料参数仅沿 z 轴呈梯度变化, 且没有外加电场作用。进一步假设体积力有势, 即 $F_x = 0$, $F_z = -\partial V/\partial z$ (V 是势函数)。由平衡方程引入应力函数 φ 和电位移函数 ψ , 使得

$$\alpha_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \alpha_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad (6a)$$

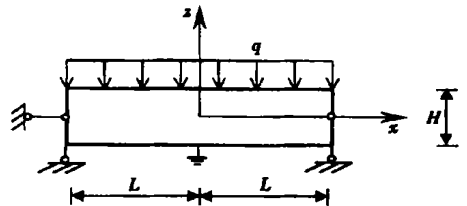


图 1 均布荷载作用下两端简支电梁

$$D_x = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad D_z = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (6b)$$

协调方程(5)可进一步改写为:

$$\begin{cases} S_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + (2S_{13} + S_{44}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} + S_{33} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \\ (g_{15} + g_{31}) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial z^2} + g_{33} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - S_{13} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - S_{33} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ (g_{15} + g_{31}) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z^2} + g_{33} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = -\zeta_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \zeta_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g_{33} \frac{\partial V}{\partial x}. \end{cases} \quad (7)$$

为此, 寻求均布荷载作用下压电简支梁的解析解, 已转化为寻求满足协调方程(7)的应力函数 φ 和电位移函数 ϕ , 并使得由(6)求得的各项值满足问题的所有边界条件。

2 简支梁的解析解

在本文分析中, 假定材料弹性参数 S_{33} 、材料密度参数(势函数) V 和压电参数 g_{33} 同时沿 z 轴呈梯度变化, 即有

$$\begin{cases} V = \gamma_{1z}^3 + \gamma_{2z}^2 + \gamma_{3z} + \gamma_4, \\ S_{33} = \beta_{1z}^2 + \beta_{2z} + \beta_3, \\ g_{33} = \alpha_{1z}^2 + \alpha_{2z} + \alpha_3, \end{cases} \quad (8)$$

其中 γ_i 、 β_i 和 α_i 均为材料常数。采用逆解法, 设应力函数 φ 和电位移函数 ϕ 具有如下形式:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{x^2}{2}(az^3 + dz + e) - \frac{f}{10}z^5 + \frac{1}{4}bz^4 + mz^3 + nz^2, \\ \phi = x(Az^3 + Bz), \end{cases} \quad (9)$$

其中 a 、 d 、 e 、 f 、 b 、 m 、 n 、 A 和 B 为待定常数。将(9)代入相容方程(7), 有:

$$\begin{cases} (2S_{13} + S_{44})a - 2S_{11}f - (g_{15} + g_{31})A + S_{13}\gamma_1 = 0, \\ -3bS_{11} - \gamma_2 S_{13} = 0, \\ (g_{15} + g_{31})a + \zeta_{11}A = 0. \end{cases} \quad (10)$$

对图 1 所示简支梁, 应力和电位移边界条件可表示为:

$$\begin{cases} z = \frac{H}{2}: \sigma_z = -q, \tau_{xz} = 0, D_z = 0, \\ z = -\frac{H}{2}: \sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \\ x = L: \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x dz = \int_{-H/2}^{H/2} D_x dz = 0, \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x z dz = 0, \\ \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xz} dz = \left[q + \frac{\gamma_1 H^3}{4} + H\gamma_3 \right] L, \\ x = -L: \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x dz = \int_{-H/2}^{H/2} D_x dz = 0, \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x z dz = 0, \\ \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xz} dz = -\left[q + \frac{\gamma_1 H^3}{4} + H\gamma_3 \right] L. \end{cases} \quad (11)$$

由式(6)、(9)~(11)可确定各待定常数为:

$$\begin{cases} a = \frac{2Y}{H^3}, d = -\frac{3Y}{2H}, e = -\left(\frac{H^2}{4} \gamma_2 + \gamma_4 + \frac{q}{2}\right), f = \frac{f}{S_{11}}, \\ b = -\frac{Y_2 S_{13}}{3S_{11}}, m = \frac{H^2 f}{20S_{11}} - \frac{L^2 Y}{H^3}, n = \frac{H^2 \gamma_2 S_{13}}{24S_{11}}, \\ A = -\frac{2AY}{H^3}, B = \frac{AY}{2H}, \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} \gamma = \frac{H^3}{4} \gamma_1 + H \gamma_3 + q, f = \frac{BY}{H^3} + \frac{S_{13} \gamma_1}{2}, \\ A = \frac{g_{15} + g_{31}}{\zeta_{11}}, B = (2S_{13} + S_{44}) + (g_{15} + g_{31})A. \end{cases} \quad (13)$$

由式(6)可得应力和电位移的解答如下:

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{6Y}{H^3} x^2 z - \frac{S_{13} Y_2}{S_{11}} \left(z^2 - \frac{H^2}{12}\right) + z \left(\frac{3H^2 f}{10S_{11}} - \frac{6L^2 Y}{H^3} - \frac{2fz^2}{S_{11}}\right), \\ \alpha_z = \left(\frac{2Y}{H^3} + \gamma_1\right) z^3 + \gamma_2 z^2 + \left(\gamma_3 - \frac{3Y}{2H}\right) z - \left(\frac{H^2 \gamma_2}{4} + \frac{q}{2}\right), \\ \tau_{xz} = \frac{3xY}{H} \left(\frac{1}{2} - \frac{2z^2}{H^2}\right), \\ D_x = \frac{AY}{H} x \left(\frac{1}{2} - \frac{6z^2}{H^2}\right), D_z = \frac{AY}{H} z \left(\frac{2z^2}{H^2} - \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad (14)$$

而应变和电场强度可求得为:

$$\begin{cases} \epsilon_x = 3aS_{11}x^2z - A_1z^3 + B_1z + C_1, \\ \epsilon_z = 3aS_{13}x^2z - A_3z^3 + (3bS_{13} + \gamma_2 S_{33})z^2 + B_3z + C_3, \\ \gamma_{xz} = -3xz^2(aS_{44} - Ag_{15}) - x(dS_{44} - Bg_{15}), \\ E_x = 3xz^2(ag_{15} + A\zeta_{11}) + x(dg_{15} + B\zeta_{11}), \\ E_z = -3ag_{31}x^2z + Ez^3 - (3bg_{31} + \gamma_2 g_{33})z^2 - Fz - G, \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} A_i = 2f S_{1i} - S_{i3}a - S_{i3} \gamma_1 + g_{3i}A, \\ B_i = 6mS_{1i} + S_{i3}d + S_{i3} \gamma_3 - g_{3i}B, \\ C_i = 2nS_{1i} + S_{i3}e + S_{i3} \gamma_4, \\ E = 2fg_{31} - ag_{33} - \gamma_1 g_{33} - \zeta_{33}A, \\ F = 6mg_{31} + dg_{33} + \gamma_3 g_{33} + B\zeta_{33}, \\ G = 2ng_{31} + eg_{33} + \gamma_4 g_{33} \end{cases} \quad (i = 1, 3). \quad (16)$$

为确定梁中的位移和电势分布,考虑如下边界条件:

$$u(-L, 0) = 0, w(-L, 0) = 0, w(L, 0) = 0, \phi\left(0, -\frac{H}{2}\right) = 0. \quad (17)$$

由(3)和(15)~(17)得位移和电势的解答为:

$$\begin{cases} u = aS_{11}x^3z - A_1xz^3 + B_1xz + C_1(x + L), \\ w = \frac{3}{2}aS_{13}x^2z^2 - \frac{A_3}{4}z^4 + \left(S_{13}b + \frac{S_{33}\gamma_2}{3} \right) z^3 + \frac{B_3}{2}z^2 + C_3z + \\ \quad \frac{aS_{11}}{4}(L^4 - x^4) + \frac{(B_1 + S_{44}d - g_{15}B)}{2}(L^2 - x^2), \\ \phi = \frac{3}{2}ag_{31}x^2z^2 - \frac{E}{4}\left(z^4 - \frac{H^4}{16} \right) + \left(bg_{31} + \frac{g_{33}\gamma_2}{3} \right) \left(z^3 + \frac{H^3}{8} \right) + \\ \quad \frac{F}{2}\left(z^2 - \frac{H^2}{4} \right) + G\left(z + \frac{H}{2} \right) - \frac{1}{2}x^2(dg_{15} + B\zeta_{11}). \end{cases} \quad (18)$$

对图 1 所示简支梁, 若将梁的两端中点取为电势的零点 ($\phi(\pm L, 0) = 0$), 此时, 梁的边界条件应作适当改动, 在梁的下表面, 如考虑电位移边界条件 $D_z(x, -H/2) = 0$, 不难证明这一条件已自动满足。为此可得电势的解答为:

$$\begin{aligned} \phi = \frac{3}{2}ag_{31}x^2z^2 - \frac{E}{4}z^4 + \left(bg_{31} + \frac{g_{33}\gamma_2}{3} \right) z^3 + \\ \frac{F}{2}z^2 + Gz - \frac{1}{2}(x^2 - L^2)(dg_{15} + B\zeta_{11}). \end{aligned} \quad (19)$$

根据(18)和(19)式, 图 2 绘制了功能梯度压电简支梁(PZT)电势 ϕ 沿 z 轴和 x 轴的变化曲线。实线表示梁的两端接地时电势 ϕ 的变化情况, 虚线代表梁的下表面中点接地时 ϕ 的变化。图中曲线均考虑了体积力 F_z 、材料参数 S_{33} 和 g_{33} 的梯度变化, 其中材料常数取为

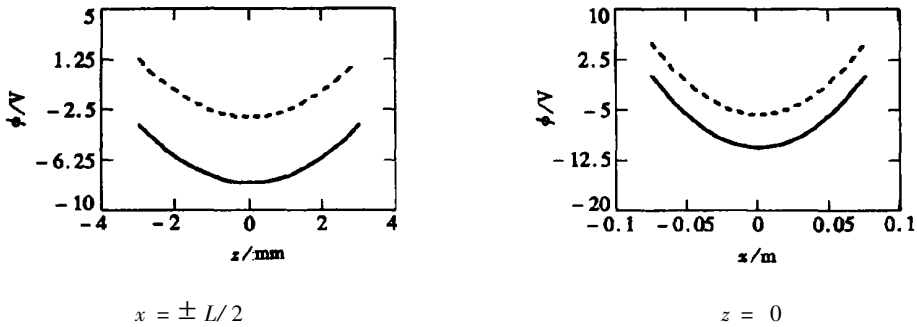


图 2 电势 ϕ 在梁中截面上的变化曲线

$$\begin{aligned} \beta_1 = \frac{3S_{33}}{5H^2}, \quad \beta_2 = \frac{S_{33}}{4H}, \quad \beta_3 = \frac{4S_{33}}{5}, \quad \alpha_1 = \frac{3g_{33}}{5H^2}, \quad \alpha_2 = \frac{g_{33}}{4H}, \\ \alpha_3 = \frac{4g_{33}}{5}, \quad \gamma_1 = -\frac{2Q_g}{H^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{Q_g}{H}, \quad \gamma_3 = -\frac{Q_g}{2}, \quad \gamma_4 = -\frac{Q_g H}{4}. \end{aligned}$$

3 几种特殊情况下简支梁的基本解

在基本解(14)、(15)和(18)中, 对上述三参量(体积力 F_z 、材料参数 S_{33} 和 g_{33}) 取不同的变化组合, 可得到考虑材料呈不同梯度特性时的基本解。当只考虑密度沿 z 轴的梯度变化, 而取 $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时, (14)、(15)和(18)给出的是密度梯度压电材料简支梁在均布荷载作用下的一种基本解; 当同时考虑密度和材料参数 S_{33} 沿 z 轴的梯度变化, 而取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时, (14)、(15)和(18)给出的是该密度梯度简支梁更为精确的解答。同理, 还可以对本文得到的基本解做其它形式的简化。

当取 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = \beta_1 = \beta_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 而 $\gamma_3 = -Q_g$ (即体力为常数) 时, 基本解可

得到较大的简化, 此时有:

应力和电位移

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{6Y}{H^3}x^2z + z \left(\frac{3H^2f}{10S_{11}} - \frac{6L^2Y}{H^3} - \frac{2fz^2}{S_{11}} \right), \\ \sigma_z = \frac{2Y}{H^3}z^3 + \left(\gamma_3 - \frac{3Y}{2H} \right)z - \frac{q}{2}, \\ \tau_{xz} = \frac{3xY}{H} \left(\frac{1}{2} - \frac{2z^2}{H^2} \right), \\ D_x = \frac{AY}{H^3}x \left(\frac{1}{2} - \frac{6z^2}{H^2} \right), D_z = \frac{AY}{H^3}z \left(\frac{2z^2}{H^2} - \frac{1}{2} \right); \end{cases} \quad (20)$$

位移和电势

$$\begin{cases} u = aS_{11}x^3z - A_{13}xz^3 + B_{13}xz + C_1(x + L), \\ w = \frac{3}{2}aS_{13}x^2z^2 - \frac{A_3}{4}z^4 + S_{13}bz^3 + \frac{B_3}{2}z^2 + C_3z + \\ \frac{aS_{11}}{4}(L^4 - x^4) + \frac{(B_1 + S_{44}d - g_{15}B)}{2}(L^2 - x^2), \\ \phi = \frac{3}{2}ag_{31}x^2z^2 - \frac{E}{4} \left(z^4 - \frac{H^4}{16} \right) + gg_{31} \left(z^3 + \frac{H^3}{8} \right) + \\ \frac{F}{2} \left(z^2 - \frac{H^2}{4} \right) + G \left(z + \frac{H}{2} \right) - \frac{1}{2}x^2(dg_{15} + B\zeta_{11}), \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\begin{cases} A_i = 2fS_{1i} - S_{i3}a + g_{3i}A, B_i = 6mS_{1i} + S_{i3}d + S_{i3}\gamma_3 - g_{3i}B, \\ C_i = 2nS_{1i} + S_{i3}e, E = 2fg_{31} - ag_{33} - \zeta_{33}A, \\ F = 6mg_{31} + dg_{33} + \gamma_3g_{33} + B\zeta_{33}, G = 2ng_{31} + eg_{33}, \end{cases} \quad (i = 1, 3) \quad (22)$$

进一步, 当 (i) 力_电耦合消失(即 $g_{31} = g_{33} = g_{15} = 0$) (ii) 不计体积力 (iii) 取 $2S_{13} + S_{44} = 2S_{11}$ 时, 有:

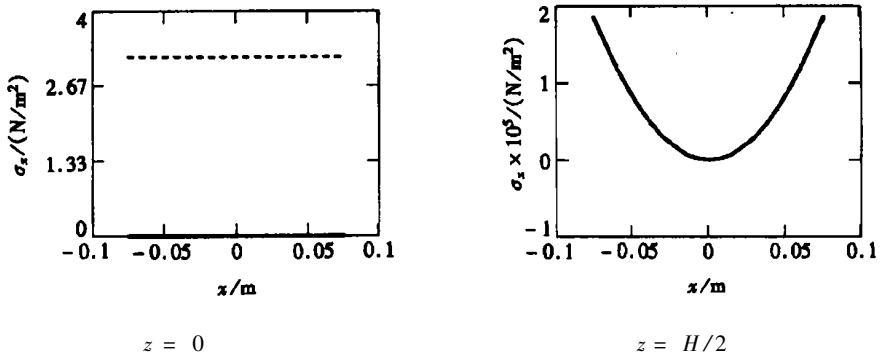


图3 σ_x 沿 x 轴的变化曲线

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{6q}{H^3}x^2z - \frac{6ql^2}{H^3}z + \frac{3q}{5H}z - \frac{4q}{H^3}z^3, & \alpha_z = \frac{2q}{H^3}z^3 - \frac{3q}{2H}z - \frac{q}{2}, \\ \tau_{xz} = \frac{3q}{2H}x - \frac{6q}{H^3}xz^2. \end{cases} \quad (23)$$

(23) 为根据弹性理论求得的简支梁在均布荷载作用下的解答。根据(18)和(21)式,图3绘制了 α_x 沿 x 轴的变化曲线,图4绘制了梁的挠度 w 沿 x 轴的变化曲线。图中的实线表示考虑常体力及材料参数为常数时的曲线,虚线表示考虑体力及材料参数均呈梯度变化时的曲线,其中材料常数取值同上。从图中可以看出,不考虑梯度时,在截面 $z=0$ 上 $\alpha_x=0$,这与弹性理论的解答完全相符;考虑梯度时,在该截面上 α_x 保持为一非零常数。而对截面 $z=H/2$ 上的 α_x 和任意截面上的位移 w ,两种材料情况下的曲线相差不大。这一结果除与选取的梯度变化模型有关外,还与所选取的材料参量有关。

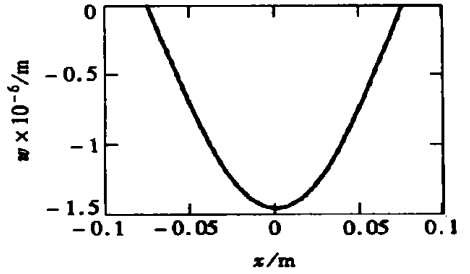


图4 位移 w 沿 x 轴的变化曲线

4 结 论

本文采用逆解法,设定了适当形式的应力函数和电位移函数,求得了功能梯度简支梁的解析解。作为特例还得到了常体力以及材料参数为常数时的解答。从各量的变化曲线可以看出梯度变化产生的影响不仅与所选取的材料梯度模型及截面位置相关,还与所选取的参量有关。

此外在不考虑电学参数且不计体力时,本文给出的解答退化为各向同性弹性简支梁在均布荷载作用下的解答,这在一定程度上证明了本文所得解答的正确性。

[参 考 文 献]

- [1] 陶宝祺. 智能材料结构[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997.
- [2] Wang Z K, Zheng B L. The general solution of three dimensional problems in piezoelectric media[J]. Int J Solids Structures, 1995, 32(1): 105—115.
- [3] Ding H J, Chen B, Liang J. General solutions for coupled equations for piezoelectric media[J]. Int J Solids Structures, 1996, 33(16): 2283—2298.
- [4] Wang B. Three dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material[J]. Int J Solids and Structures, 1992, 29(3): 293—308.
- [5] Ha S K, Keilers C, Chang F K. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoelectric sensors and actuators[J]. AIAA J, 1992, 30(3): 772—780.
- [6] Hwang W S, Park H C. Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators[J]. AIAA J, 1993, 31(5): 930—937.
- [7] Wang Q M, Cross L E. Tip deflection and blocking force of soft PZT based cantilever rainbow actuators[J]. J Am Ceram Soc, 1999, 82(1): 103—110.
- [8] Kruusing A. Analysis and optimization of loaded cantilever beam microactuators[J]. Smart Mater Struct, 2000, 9(2): 186—196.
- [9] Zhu X H, Wang Q, Meng Z Y. A functionally gradient piezoelectric actuator prepared by powder metallurgical process in PNN_PZ_PT system[J]. J Materials Science Letters, 1995, 14(3): 516—518.

- [10] 石志飞, 黄彬彬, 杜善义. 功能材料力_电耦合问题的几个基本解[J]. 复合材料学报, 2001, **18**(1): 105—114.
- [11] SHI Zhi_fei. General solution of a density functionally gradient piezoelectric cantilever and its applications[J]. Smart Materials and Structures, 2002, **11**(1): 122—129.
- [12] Wu C C M, Kahn M, Moy W. Piezoelectric Ceramics with functional gradients: A new application in material design[J]. J Am Ceram Soc, 1996, **79**(3): 809—812.
- [13] 林启荣, 刘正兴, 金占礼. 均布荷载作用下两端简支梁的解析解[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 617—623.

Analytical Solution of a Simply Supported Piezoelectric Beam Subjected to a Uniformly Distributed Loading

ZHANG Lin_nan¹, SHI Zhi_fei²

(1. College of Science, China Agriculture University,
Beijing 100083, P. R. China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Northern Jiaotong University,
Beijing 100044, P. R. China)

Abstract: Using the inverse method, the analytical solution of a simply supported piezoelectric beam subjected to a uniformly distributed loading has been studied. First, the polynomials of stress function and induction function are given. Then, considering the gradient properties of the elastic parameter and the potential function as well as the piezoelectric parameter, the analytical solution of a simply supported beam subjected to a uniformly distributed loading is obtained and discussed.

Key words: simply supported beam; FGM; analytical solution; piezoelectric material