应用数学和力学,第 24 卷 第 10 期(2003 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 10_1035_14

多维广义 SRLW 方程的 Chebyshev 拟谱方法分析*

尚亚东[1], 郭柏灵[2]

(1. 广州大学 理学院 数学系, 广州 510405;
2. 北京应用物理与计算数学研究所 非线性研究中心, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑了一类多维的广义对称正则长波(SRLW) 方程的齐次初边值问题 Chebyshev 拟谱逼近, 构造了全离散的 Chebyshev 拟谱格式, 给出了这种格式近似解的收敛性和最优误差估计•

关 键 词: 多维广义 SRLW 方程; 初边值问题; Chebyshev 拟谱方法; 误差估计
中图分类号: O241 文献标识码: A

引 言

对称正则长波(SRLW) 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-1\right)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho+\frac{1}{2}u^2\right),\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1}$$

是正则长波(RLW) 方程的一种对称叙述, 用于描述弱非线性作用下空间电荷的等离子声波的传播[1]• 文献[1] 获得了它的双曲正割平方孤立波、4 个守恒律和某些数值结果• 明显地, 从(1) 中消去 ρ, 得到一类正则长波方程

$$u_{tt}-u_{xx}+\left(\frac{1}{2}u^2\right)_{xt}-u_{xxtt}=0• \tag{2}$$

这种方程关于变元 x、t 是对称的, 也出现在其它非线性波动问题的研究中[2~3]• 文献[4] 数值模拟了 SRLW 方程孤立波的相互作用• 最近[5] 讨论了广义 SRLW 方程孤立波的轨道稳定性和不稳定性• 在[6] 中郭柏灵用谱方法讨论了一类广义 SRLW 方程的周期初值问题, 证明了整体广义解和古典解的存在唯一性, 给出了近似解的收敛性和误差估计• 郑家栋等在[7, 8] 中提出了求解 SRLW 方程及广义 SRLW 方程的拟谱配点方法, 给出了半离散和全离散格式的最优误差估计• 郭柏灵在[9] 中研究了多维的广义正则波方程组整体解的存在性和爆破现象• 在[10] 中尚亚东, 李志深用谱方法对高维广义 SRLW 方程组的周期初值问题作了数值分析• 本文研究多维广义 SRLW 方程组齐次初边值问题的 Chebyshev 拟谱方法, 构造了全离散的 Chebyshev 拟谱格式, 给出了近似解的收敛性和严格的误差估计•

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_05_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271034)
作者简介: 尚亚东(1963—), 男, 陕西周至人, 副教授, 博士(E_mail: ydshang@263.net);
郭柏灵(1936—), 男, 研究员, 博士生导师, 中科院院士(E_mail: gbl@mail.iapcm.ac.cn)•

1 记号和某些引理

记 $\Omega=[-1,1]^3$, $L^2(\Omega)$ 为 Ω 上平方可积具有内积 $(u,v)=\int_\Omega uv\,dx$ 和范数 $\|u\|=(u,u)^{1/2}$ 的实值函数全体, 记 $\omega(x)=\prod_{i=1}^3\omega_i(x_i)$, $\omega_i(x_i)=(1-x_i^2)^{-1/2}$ 为 Chebyshev 权, $L^2_\omega(\Omega)$ 为 Ω 上以 $\omega(x)$ 为权的平方可积实值函数全体, 其内积和范数分别为 $(u,v)_\omega=\int_\Omega uv\omega\,dx$ 和 $\|u\|_\omega=(u,u)_\omega^{1/2}$. 又记 $W^{m,p}_\omega(\Omega)$ 为带权 $\omega(x)$ 的加权 Sobolev 空间, 特别 $W^{0,p}_\omega(\Omega)=L^{0,p}_\omega(\Omega)$, $W^{m,2}_\omega(\Omega)=H^m_\omega(\Omega)$, 范数记为 $\|u\|_{m,\omega}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|^2_\omega\right)^{1/2}$, 记 $H^1_{0,\omega}(\Omega)=\left\{v\in H^1_\omega(\Omega)\mid v|_{\partial\Omega}=0\right\}$. 设 N 为正整数, $S_N=(P_N)^3$, 其中 P_N 为次数不超过 N 的代数多项式全体, $\mathring{S}_N=\left\{\varphi\in S_N\mid \varphi|_{\partial\Omega}=0\right\}$, 定义 $P_{1,N}$ 为 $H^1_{0,\omega}(\Omega)\to\mathring{S}_N$ 的算子, 满足

$$(\nabla(P_{1,N}v-v),\nabla(\varphi\omega))=0\qquad\forall\varphi\in\mathring{S}_N.$$

令 $l=(l_1,l_2,l_3)$, 记 $\{x_l,\omega_l\}$ 为 Gauss_Lobatto 求积公式中的节点和权系数, 则有

$$\int_\Omega f(x)\omega(x)\,dx=\sum_{|l|\leqslant N}f(x_l)\omega_l\qquad\forall f\in S_{2N-1},$$

其中

$$x_l=\left(\cos\frac{l_1\pi}{N},\cos\frac{l_2\pi}{N},\cos\frac{l_3\pi}{N}\right),\quad \omega_l=\omega_{l_1}\omega_{l_2}\omega_{l_3}$$
$$0\leqslant l_i\leqslant N,\ |l|=\max_{1\leqslant i\leqslant 3}l_i.$$

定义 u 和 v 的离散的内积和 u 范数为 $(u,v)_{N,\omega}=\sum_{|l|\leqslant N}u(x_l)v(x_l)\omega_l$, $\|u\|_{N,\omega}=(u,u)^{1/2}_{N,\omega}$; 定义 $C(\Omega)\to\mathring{S}_N$ 的插值算子 P_C 满足

$$P_Cu(x_j)=u(x_j)\qquad|j|\leqslant N.$$

用 τ 表示时间方向的步长, 记

$$u^m=u(x,m\tau),\quad u^m_{\hat{t}}=\frac{1}{2\tau}(u^{m+1}-u^{m-1}),\quad \hat{u}^m=\frac{1}{2}(u^{m+1}+u^{m-1}).$$

下面文中总假定 C 为广义常数, 与 N 及函数无关, 不同处意义不一定相同.

引理 1[11] 设 $u\in L^2_\omega(\Omega)$, $v\in H^1_{0,\omega}(\Omega)$, 则有

$$\left|\left(u,\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x_i}(v\omega)\right)\right|\leqslant 6\|u\|_\omega|v|_{1,\omega},\quad(\nabla v,\nabla(v\omega))\geqslant\frac{1}{4}\|\nabla v\|^2.$$

引理 2[12] $\forall\varphi\in\mathring{S}_N$, $\psi\in(S_N)^3$, 有

$$(\mathrm{div}\,\psi,\varphi)_{N,\omega}=-\left(\psi,\frac{1}{\omega}\nabla(\varphi\omega)\right),\quad(\nabla v,\nabla(v\omega))\geqslant\frac{1}{4}\|v\|^2_{1,\omega}.$$

引理 3[13] 若 $v\in H^\sigma_\omega(\Omega)\cap H^1_{0,\omega}(\Omega)$, $\sigma\geqslant 1$, 则有

$$\|v-P_{1,N}v\|_{j,\omega}\leqslant C\|v\|_{\sigma,\omega}\begin{cases}N^{j-\sigma} & 0\leqslant j\leqslant 1,\\ N^{2j-1-\sigma} & j\geqslant 1.\end{cases}$$

引理 4 设 $v\in S_N$, 则有 $\|v\|_{L^\infty}\leqslant N^{3/2}\|v\|_\omega$.

引理 5[13] 若 $v\in H^\sigma_\omega(\Omega)$, $\sigma>3/2$, $0\leqslant j\leqslant\sigma$, 则有

$$\|v-P_Cv\|_{j,\omega}\leqslant CN^{2j-\sigma}\|v\|_{\sigma,\omega}.$$

引理 6[14] 若 $u\in H^\sigma(\Omega)$, $\sigma>3/2$, $v\in S_N$, 则有

$$|(u,v)_{N,\omega}-(u,v)_\omega|\leqslant CN^{-\sigma}\|u\|_{\sigma,\omega}\|v\|_\omega,\quad \|v\|_\omega\leqslant\|v\|_{N,\omega}\leqslant 2\sqrt{2}\|v\|_\omega.$$

引理 7[12] 存在常数 C 使得

$$\left|\left(\nabla P_{1,N}v,\frac{1}{\omega}\nabla(\varphi\omega)\right)_{N,\omega}-\left(\nabla P_{1,N}v,\frac{1}{\omega}\nabla(\varphi\omega)\right)_\omega\right|\leqslant CN^{1-\sigma}\|v\|_{\sigma,\omega}\|\nabla\varphi\|_\omega,$$

$$\forall v\in H^1_{0,\omega}(\Omega)\cap H^\sigma_\omega(\Omega),\quad \varphi\in S_N,\ \sigma>1.$$

引理 8[15] 设如下条件成立:

(ⅰ) η、M_1、M_2 和 p 是正常数, E^k 是非负离散函数, $p>1$;

(ⅱ) $E^n\leqslant\eta+M_1\tau\sum_{k=0}^{n-1}(E^k+M_2(E^k)^p)$;

(ⅲ) $E^0\leqslant\eta$, $\eta e^{2M_1T}\leqslant M_2^{1/(1-p)}$.

则对一切 $n\tau\leqslant T$, 有 $E^n\leqslant\eta e^{2M_1n\tau}$.

本文考虑如下多维广义 SRLW 方程的初边值问题

$$u_t-\Delta u_t+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i(u)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=f(u,\rho,\nabla u)\qquad x\in\Omega,\ 0<t\leqslant T,\tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_i}=g(\rho)\qquad x\in\Omega,\ 0<t\leqslant T.\tag{4}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \rho|_{\partial\Omega}=0\qquad 0<t\leqslant T,\tag{5}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \rho(x,0)=\rho_0(x)\qquad x\in\Omega.\tag{6}$$

其中 $\varphi_i(u)\in C^{\sigma-1}(R)$, $f\in C^{\sigma-1}(R^5)$, $g\in C^{\sigma-1}(R)$, $\sigma\geqslant 3$, 另外 $f(u,\rho,\nabla u)$ 和 $g(\rho)$ 还满足

$$|f(x+q,y+r,z+s)-f(q,r,s)|\leqslant$$
$$A(q,r,s)(|x|+|x|^p+|y|+|y|^p+|z|+|z|^p),$$
$$|g(z+y)-g(z)|\leqslant B(z)(|y|+|y|^p),$$
$$p>1,\ A(q,r,s)\in C(R^5),\ B(z)\in C(R),$$
$$u_0(x)\in H^\sigma_\omega(\Omega),\ \rho_0(x)\in H^{\sigma-1}_\omega(\Omega).$$

2 全离散拟谱方法及误差估计

构造如下全离散 Chebyshev 拟谱格式: 求 u_N^k, $\rho_N^k\in S_N$ 使得

$$u^k_{N\hat t}(x_j)-\Delta u_{N\hat t}(x_j)+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(P_C\varphi_i(u_N^k))\right](x_j)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_N^k(x_j)=$$
$$f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)(x_j)\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1,\tag{7}$$

$$\rho^k_{N\hat t}(x_j)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_N^k)(x_j)=g(\rho_N^k)(x_j)\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1.\tag{8}$$

$$u_N^0=P_{1,N}u_0(x),\quad \rho_N^0=P_{1,N}\rho_0(x),\tag{9}$$

$$\rho_N^1=P_{1,N}(\rho_0(x)+\tau\partial_t\rho(0),\ u_N^1)\tag{10}$$

将由下面特殊选取得到.

下面来分析全离散解的误差.

记 $P_{1,N}u^k=u^k$, $P_{1,N}\rho^k=\rho^k$, $u^k-u_N^k=(u^k-u^k)+(u^k-u_N^k)=\lambda^k+\theta^k$, $\rho^k-\rho^k=(\rho^k-\rho^k)+(\rho^k-\rho_N^k)=\varepsilon^k+\delta^k$, 由(3)、(4) 及(7)、(8) 式可知, θ^k、δ^k 满足方程组

$$(\theta^k_{\hat t},\chi)_{N,\omega}+\left(\nabla\theta^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\chi\omega)\right)_{N,\omega}+\sum_1^3\left(\varphi_i(u_N^k)-\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi\omega)\right)_{N,\omega}-$$
$$\sum_1^3\left(\varepsilon^k+\delta^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi\omega)\right)_{N,\omega}+(f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)-f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\chi)_{N,\omega}=$$
$$(u^k_{\hat t}-u^k_{\hat t},\chi)_{N,\omega}+(u^k_{\hat t},\chi)_{N,\omega}-(u^k_{\hat t},\chi)_\omega+(u^k_{\hat t}-\partial_t u^k,\chi)_\omega+$$
$$(\nabla(u^k_{\hat t}-\partial_t u^k),\nabla(\chi\omega))+\left(\nabla u^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\chi\omega)\right)_{N,\omega}-\left(\nabla u^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\chi\omega)\right)_\omega+$$
$$\sum_1^3\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi\omega)\right)_\omega-\sum_1^3\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi\omega)\right)_{N,\omega}+$$
$$\sum_1^3\left[\left(\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi\omega)\right)_{N,\omega}-\left(\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi\omega)\right)_\omega\right]+$$
$$(f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\chi)_\omega-f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\chi)_{N,\omega}\qquad\forall\chi\in S_N,\tag{11}$$

$$(\delta^k_{\hat t},\chi)_{N,\omega}+\sum_1^3((\chi^k+\theta^k)_{x_i},\chi)_{N,\omega}+(g(\rho_N^k)-g(\rho^k),\chi)_{N,\omega}=$$
$$(\rho^k_{\hat t}-\rho^k_{\hat t},\chi)_{N,\omega}+(\rho^k_{\hat t},\chi)_{N,\omega}-(\rho^k_{\hat t},\chi)_\omega+(\rho^k_{\hat t}-\rho^k_t,\chi)_\omega+$$
$$\sum_1^3\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^k,\chi\right)_{N,\omega}-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^k,\chi\right)_\omega\right]+$$
$$(g(\rho^k),\chi)_\omega-(g(\rho^k),\chi)_{N,\omega}\qquad\forall\chi\in S_N.\tag{12}$$

在(11)式中取 $\chi=\theta^k$，则有

$$(\theta^k_{\hat t},\theta^k)_{N,\omega}+\left(\nabla\theta^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}+\sum_1^3\left(\varphi_i(u_N^k)-\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}-$$
$$\sum_1^3\left(\varepsilon^k+\delta^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}+(f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)-f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\theta^k)_{N,\omega}=$$
$$(u^k_{\hat t}-u^k_{\hat t},\theta^k)_{N,\omega}+(u^k_{\hat t},\theta^k)_{N,\omega}-(u^k_{\hat t},\theta^k)_\omega+(u^k_{\hat t}-u^k_t,\theta^k)_\omega+$$
$$(\nabla(u^k_{\hat t}-u^k_t),\nabla(\theta^k\omega))+\left(\nabla u^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}-\left(\nabla u^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_\omega+$$
$$\sum_1^3\left[\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_\omega-\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}\right]+$$
$$\sum_1^3\left[\left(\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_\omega-\left(\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}\right]+$$
$$(f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\theta^k)_\omega-(f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\theta^k)_{N,\omega}.\tag{13}$$

由于 $(\theta^k_{\hat t},\theta^k)=\left(\|\theta^{k+1}\|^2_{N,\omega}-\|\theta^{k-1}\|^2_{N,\omega}\right)/(4\tau)$，利用分部求和公式

$$4\tau\sum_{k=1}^n\left(\nabla\theta^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}=-2\tau\sum_{k=0}^{n-1}\left(\nabla\theta^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^{k+1}_{\hat t}\omega)\right)_{N,\omega}-$$
$$2\tau\sum_{k=2}^{n+1}\left(\nabla\theta^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^{k-1}\omega)\right)_{N,\omega}+2\left(\nabla\theta^{n+1},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^{n+1}\omega)\right)_{N,\omega}-$$
$$2\left(\nabla\theta^1,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^1\omega)\right)_{N,\omega}-2\left(\nabla\theta^0,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^0\omega)\right)_{N,\omega},$$

从[12]知有

$$\left|\left(\nabla\psi,\frac{1}{\omega}\nabla(\varphi\omega)\right)_{N,\omega}\right|\leqslant C\,\|\nabla\psi\|_{N,\omega}\|\nabla\varphi\|_{N,\omega},\tag{14}$$

于是由引理 6 知

$$\left|2\tau\sum_{k=0}^{n-1}\left(\nabla\theta^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta_t^{k+1}\omega)\right)_{N,\omega}\right|\leqslant C\tau\sum_{k=0}^{n-1}\|\nabla\theta^k\|_{N,\omega}\|\nabla\theta_t^k\|_{N,\omega}\leqslant$$

$$C\tau\sum_{k=0}^{n-1}\left(\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\theta_t^{k+1}\|_{1,\omega}^2\right)\leqslant$$

$$C\tau\sum_{k=1}^{n}\left(\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\theta_t^{k}\|_{1,\omega}^2\right)+C\tau\|\theta^0\|_{1,\omega}^2;$$

$$\left|2\tau\sum_{k=2}^{n+1}\left(\nabla\theta^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta_t^{k-1}\omega)\right)_{N,\omega}\right|\leqslant C\tau\sum_{k=2}^{n+1}\|\nabla\theta^k\|_{N,\omega}\|\nabla\theta_t^{k-1}\|_{N,\omega}\leqslant$$

$$C\tau\sum_{k=1}^{n}\left(\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\theta_t^{k}\|_{1,\omega}^2\right)+C\tau\|\theta^{n+1}\|_{1,\omega}^2.$$

另外，由引理 2 及引理 6 知

$$\left(\nabla\theta^{n+1},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^{n+1}\omega)\right)_{N,\omega}+\left(\nabla\theta^{n},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^{n}\omega)\right)_{N,\omega}\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\left(\|\nabla\theta^{n+1}\|_{N,\omega}^2+\|\nabla\theta^{n}\|_{N,\omega}^2\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(\|\nabla\theta^{n+1}\|_{\omega}^2+\|\nabla\theta^{n}\|_{\omega}^2\right).$$

类似地，由 (14) 式及引理 6 知

$$2\left[\left(\nabla\theta^1,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^1\omega)\right)_{N,\omega}+\left(\nabla\theta^0,\nabla(\theta^0\omega)\right)_{N,\omega}\right]\leqslant$$

$$C\left(\|\nabla\theta^1\|_{N,\omega}^2+\|\nabla\theta^0\|_{N,\omega}^2\right)\leqslant C\left(\|\nabla\theta^1\|_{\omega}^2+\|\nabla\theta^0\|_{\omega}^2\right)\leqslant$$

$$C\left(\|\theta^1\|_{1,\omega}^2+\|\theta^0\|_{1,\omega}^2\right);$$

$$\left|\left(\varphi_i(u_N^k)-\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}\right|=$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N-1}\left[\varphi_i(u_N^k)-\varphi_i(u^k)\right](x_j)\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)(x_j)\omega_j\right|=$$

$$\left|\sum_{j}\varphi_i'(\xi_j^k)(u_N^k-u^k)(x_j)\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)(x_j)\omega_j\right|\leqslant$$

$$C\|u_N^k-P_Cu^k\|_{N,\omega}\left\|\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right\|_{N,\omega}\leqslant C\|u_N^k-P_Cu^k\|_{\omega}\left\|\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right\|_{\omega}\leqslant$$

$$C\left(\|\theta^k\|_{\omega}^2+\|\lambda^k\|_{\omega}^2+\|(I-P_C)u^k\|_{\omega}^2+\|\theta^k\|_{1,\omega}^2\right);$$

$$\left|\sum_{i=1}^{3}\left(\varepsilon^k+\delta^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}\right|\leqslant C\|\varepsilon^k+\delta^k\|_{N,\omega}\|\nabla\theta^k\|_{N,\omega}\leqslant$$

$$C\left(\|\varepsilon^k\|_{\omega}^2+\|\delta^k\|_{\omega}^2+\|\theta^k\|_{1,\omega}^2\right);$$

$$\left|\left(f(u^k,\rho^k,\nabla u^k)-f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k),\theta^k\right)_{N,\omega}\right|\leqslant$$

$$\|f(P_Cu^k,P_C\rho^k,P_C\nabla u^k)-f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)\|_{N,\omega}\|\theta^k\|_{N,\omega}\leqslant$$

$$C\left[\|f(P_Cu^k,P_C\rho^k,P_C\nabla u^k)-f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)\|_{N,\omega}^2+\|\theta^k\|_{N,\omega}^2\right],$$

其中

$$\|f(P_Cu^k,P_C\rho^k,P_C\nabla u^k)-f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)\|_{N,\omega}^2=$$

$$\sum_j\left[f(P_Cu^k,P_C\rho^k,P_C\nabla u^k)-f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)\right]^2(x_j)\omega_j\leqslant$$

$$\sum_j A(P_Cu^k,P_C\rho^k,P_C\nabla u^k)\left(|P_Cu^k-u_N^k|+|P_Cu^k-u_N^k|^p+|P_C\rho^k-\rho_N^k|+\right.$$

$$
\begin{aligned}
&|P_C\rho^k-\rho_N^k|^p+|P_C\nabla u^k-\nabla u_N^k|+|P_C\nabla u^k-\nabla u_N^k|^p)]^2(x_j)\omega_j\leqslant\\
&C\Big(\|u^k-P_Cu^k\|_\omega^2+\|\chi^k\|_\omega^2+\|\theta^k\|_\omega^2+\|\rho^k-P_C\rho^k\|_\omega^2+\\
&\|\varepsilon^k\|_\omega^2+\|\delta^k\|_\omega^2+\|\nabla(u^k-P_Cu^k)\|_\omega^2+\|\nabla\chi^k\|_\omega^2+\|\nabla\theta^k\|_\omega^2\Big)+\\
&C\|P_Cu^k-u_N^k\|_{L^\infty}^{2p-2}\|P_Cu^k-u_N^k\|_{N,\omega}^2+\\
&C\|P_C\nabla u^k-\nabla u_N^k\|_{L^\infty}^{2p-2}\|P_C\nabla u^k-\nabla u_N^k\|_{N,\omega}^2+\\
&C\|P_C\rho^k-\rho_N^k\|_{L^\infty}^{2p-2}\|P_C\rho^k-\rho_N^k\|_{N,\omega}^2\leqslant\\
&C\Big(\|u^k-P_Cu^k\|_\omega^2+\|\chi^k\|_\omega^2+\|\theta^k\|_\omega^2+\|\rho^k-P_C\rho^k\|_\omega^2+\\
&\|\varepsilon^k\|_\omega^2+\|\delta^k\|_\omega^2+\|\nabla(u^k-P_Cu^k)\|_\omega^2+\|\nabla\chi^k\|_\omega^2+\|\nabla\theta^k\|_\omega^2\Big)+\\
&CN^{3(p-1)}\Big(\|P_Cu^k-u_N^k\|_\omega^{2p}+\|P_C\nabla u^k-\nabla u_N^k\|_\omega^{2p}+\|P_C\rho^k-\rho_N^k\|_\omega^{2p}\Big)\overset{(\text{引理}4)}{\leqslant}\\
&C\Big(\|(I-P_C)u^k\|_{1,\omega}^2+\|(I-P_C)\rho^k\|_\omega^2+\|\chi^k\|_{1,\omega}^2+\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\\
&\|\varepsilon^k\|_\omega^2+\|\delta^k\|_\omega^2\Big)+CN^{3(p-1)}\Big(\|u^k-P_Cu^k\|_\omega^{2p}+\|\chi^k\|_\omega^{2p}+\|\theta^k\|_\omega^{2p}\Big)+\\
&CN^{3(p-1)}\Big(\|\nabla(u^k-P_Cu^k)\|_\omega^{2p}+\|\nabla\chi^k\|_\omega^{2p}+\|\nabla\theta^k\|_\omega^{2p}\Big)+\\
&CN^{3(p-1)}\Big(\|\rho^k-P_C\rho^k\|_\omega^{2p}+\|\varepsilon^k\|_\omega^{2p}+\|\delta^k\|_\omega^{2p}\Big)\leqslant\\
&C\Big(N^{-2(\sigma-1)}\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2+N^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2+\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\delta^k\|_\omega^2\Big)+\\
&CN^{3(p-1)}\Big(N^{-2p\sigma}\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p}+N^{-2p(\sigma-1)}\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p}+\\
&N^{-2p(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}+\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p}+\|\delta^k\|_\omega^{2p}\Big)\leqslant\\
&CN^{-2(\sigma-1)}\Big(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2\Big)+\\
&C\Big(\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\delta^k\|_\omega^2+N^{3(p-1)}\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p}+N^{3(p-1)}\|\delta^k\|_{1,\omega}^{2p}\Big)+\\
&CN^{3(p-1)}N^{-2p(\sigma-1)}\Big(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p}+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\Big).
\end{aligned}
$$

当 $\sigma\geqslant 5/2$ 时, $3(p-1)-2p(\sigma-1)\leqslant-2(\sigma-1)$ 于是上式小于等于

$$
\begin{aligned}
&CN^{-2(\sigma-1)}\Big(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2+\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p}+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\Big)+\\
&C\Big[\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\delta^k\|_\omega^2+N^{3(p-1)}\Big(\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p}+\|\delta^k\|_\omega^{2p}\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\|f(P_Cu^k,P_C\rho^k,P_C\nabla u^k)-f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k)\|_{N,\omega}^2\leqslant\\
&\quad CN^{-2(\sigma-1)}\Big(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2+\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p}+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\Big)+\\
&\quad C\Big[\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\delta^k\|_\omega^2+N^{3(p-1)}\Big(\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p}+\|\delta^k\|_\omega^{2p}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\big|(f(P_Cu^k,P_C\rho^k,P_C\nabla u^k)-f(u_N^k,\rho_N^k,\nabla u_N^k),\theta^k)_{N,\omega}\big|\leqslant\\
&\quad C\Big[\|\theta^{k+1}\|_{N,\omega}^2+\|\theta^{k-1}\|_{N,\omega}^2+N^{-2(\sigma-1)}\Big(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2+\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p}+\\
&\quad\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\Big)\Big]+C\Big[\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\delta^k\|_\omega^2+N^{3(p-1)}\Big(\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p}+\|\delta^k\|_\omega^{2p}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

由Schwarz 不等式和引理 6 有

$$
\begin{aligned}
&|(u_{\hat t}^k-P_Cu_{\hat t}^k,\theta^k)_{N,\omega}|\leqslant\|u_{\hat t}^k-P_Cu_{\hat t}^k\|_{N,\omega}\|\theta^k\|_{N,\omega}\leqslant\\
&\quad 2\sqrt{2}\|u_{\hat t}^k-P_Cu_{\hat t}^k\|_\omega\|\theta^k\|_{N,\omega}\leqslant\\
&\quad 2\sqrt{2}\Big(\|(I-P_C)u_{\hat t}^k\|_\omega^2+\|(I-P_{1,N})u_{\hat t}^k\|_\omega^2+\\
&\quad\|\theta^{k+1}\|_{N,\omega}^2+\|\theta^{k-1}\|_{N,\omega}^2\Big).
\end{aligned}
$$

由引理6 有

$$|(u_{\hat t}^k,\theta^k)_{N,\omega}-(u_{\hat t}^k,\theta^k)_\omega|\leqslant CN^{-\sigma}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}\|\theta^k\|_\omega\leqslant$$
$$CN^{-\sigma}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}\|\theta^k\|_{N,\omega}\leqslant C\left(N^{-2\sigma}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}^2+\|\theta^{k+1}\|_{N,\omega}^2+\|\theta^{k-1}\|_{N,\omega}^2\right),$$

由Schwarz 不等式及引理 6

$$|(u_{\hat t}^k-u_t^k,\theta^k)|\leqslant\|u_{\hat t}^k-u_t^k\|_\omega\|\theta^k\|_\omega\leqslant$$
$$\|\theta^{k+1}\|_\omega^2+\|\theta^{k-1}\|_\omega^2+\|u_{\hat t}^k-u_t^k\|_\omega^2,$$

$$|(\nabla(u_{\hat t}^k-u_t^k),\nabla(\theta^k\omega))|\leqslant C\|\nabla(u_{\hat t}^k-u_t^k)\|_\omega\|\theta^k\|_{1,\omega}\leqslant$$
$$C\left(\|\theta^{k+1}\|_{1,\omega}^2+\|\theta^{k-1}\|_{1,\omega}^2+\|\nabla(u_{\hat t}^k-u_t^k)\|_\omega^2\right),$$

$$\left|\left(\nabla(u_{\hat t}^k-P_Cu_{\hat t}^k),\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}+\left(\nabla u_{\hat t}^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}-\left(\nabla u_{\hat t}^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_\omega\right|\leqslant$$
$$8\|\nabla(u_{\hat t}^k-P_Cu_{\hat t}^k)\|_\omega\|\nabla\theta^k\|_\omega+CN^{-(\sigma-1)}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}\|\theta^k\|_{1,\omega}\leqslant$$
$$C\left(\|u_{\hat t}^k-P_Cu_{\hat t}^k\|_{1,\omega}+\|(I-P_C)u_{\hat t}^k\|_\omega+N^{-(\sigma-1)}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}\right)\|\theta^k\|_{1,\omega},$$

$$\left|\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_\omega-\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}\right|\leqslant$$
$$CN^{-(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}\|\theta^k\|_{1,\omega},$$

于是

$$\left|\sum_{i=1}^3\left[\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_\omega-\left(\rho^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}\right]\right|\leqslant$$
$$C\left(N^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2+\|\theta^{k+1}\|_{1,\omega}^2+\|\theta^{k-1}\|_{1,\omega}^2\right).$$

同理有

$$\left|\sum_{i=1}^3\left[\left(\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_\omega-\left(\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k\omega)\right)_{N,\omega}\right]\right|\leqslant$$
$$CN^{-(\sigma-1)}\|\varphi_i(u^k)\|_{\sigma-1,\omega}\|\theta^k\|_{1,\omega}\leqslant$$
$$C\left(N^{-2(\sigma-1)}\|\varphi_i(u^k)\|_{1,\omega}^2+\|\theta^{k+1}\|_{1,\omega}^2+\|\theta^{k-1}\|_{1,\omega}^2\right),$$

$$|(f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\theta^k)_\omega-(f(u^k,\rho^k,\nabla u^k),\theta^k)_{N,\omega}|\leqslant$$
$$CN^{-(\sigma-1)}\|f(u^k,\rho^k,\nabla u^k)\|_{\sigma-1,\omega}\|\theta^k\|_{1,\omega}\leqslant$$
$$C(N^{-2(\sigma-1)}\|f(u^k,\rho^k,\nabla u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2+\|\theta^{k+1}\|_{1,\omega}^2+\|\theta^{k-1}\|_{1,\omega}^2).$$

在(13)式两边同乘以 4τ, 然后再关于 k 从 1 到 n 求和, 利用上述估计可得

$$\|\theta^{n+1}\|_{N,\omega}^2+\|\theta^n\|_{N,\omega}^2+\frac{1}{2}(\|\nabla\theta^{n+1}\|_\omega^2+\|\nabla\theta^n\|_\omega^2)\leqslant$$
$$C\tau\sum_{k=1}^n(\|\theta^k\|_{1,\omega}^2+\|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2)+C\tau\|\theta^0\|_{1,\omega}^2+$$
$$C\tau\|\theta^{n+1}\|_{1,\omega}^2+C(\|\theta^1\|_{1,\omega}^2+\|\theta^0\|_{1,\omega}^2)+$$
$$C\tau\sum_{i=1}^3\sum_{k=1}^nN^{-2(\sigma-1)}\|\varphi_i(u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2+C\tau\sum_{k=1}^n\|\delta^k\|_\omega^2+$$
$$C\tau\sum_{k=1}^n\Big[N^{-2(\sigma-1)}\Big(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2+\|f(u^k,\rho^k,\nabla u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2+$$
$$\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p}+\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\Big)\Big]+C\tau\sum_{k=1}^nN^{3(p-1)}\left(\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p}+\|\delta^k\|_\omega^{2p}\right)+$$
$$C\tau\sum_{k=1}^n\Big[\|(I-P_C)u_{\hat t}^k\|_\omega^2+\|(I-P_{1,N})u_{\hat t}^k\|_\omega^2+N^{-2(\sigma-1)}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}^2+$$

$$\|u_{\bar t}^k - u_t^k\|_{1,\omega}^2 + \|u_{\hat t}^k - u_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 + \|(I-P_C)\therefore u_{\hat t}^k\|_\omega^2\Big]. \tag{15}$$

在(12)中取 $\chi = \delta^k$, 则有

$$(\delta_{\hat t}^k, \delta^k)_{N,\omega} + \sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi^k + \theta^k), \delta^k\right)_{N,\omega} + (g(\rho_N^k) - g(\rho^k), \delta^k)_{N,\omega} =$$

$$(\rho_{\hat t}^k - \rho_{\hat t}^k, \delta^k)_{N,\omega} + (\rho_{\hat t}^k, \delta^k)_{N,\omega} - (\rho_{\hat t}^k, \delta^k)_\omega + (\rho_{\hat t}^k - \partial_t\rho^k, \delta^k)_\omega +$$

$$\sum_{i=1}^3\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^k, \delta^k\right)_{N,\omega} - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^k, \delta^k\right)_\omega\right] + (g(\rho^k), \delta^k)_{N,\omega} - (g(\rho^k), \delta^k)_\omega. \tag{16}$$

由于

$$(\delta_{\hat t}^k, \delta^k)_{N,\omega} = \frac{1}{4\tau}\left(\|\delta^{k+1}\|_{N,\omega}^2 - \|\delta^{k-1}\|_{N,\omega}^2\right),$$

$$\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi^k + \theta^k), \delta^k\right)_{N,\omega} \leqslant \sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi^k + \theta^k)\right\|_{N,\omega}\|\delta^k\|_{N,\omega} \leqslant$$

$$C\left(\|\chi^k\|_{1,\omega}^2 + \|\theta^k\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^{k+1}\|_\omega^2 + \|\delta^{k-1}\|_\omega^2\right) \leqslant$$

$$C\left(N^{-2(\sigma-1)}\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2 + \|\theta^k\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^{k+1}\|_\omega^2 + \|\delta^{k-1}\|_\omega^2\right),$$

$$|(g(\rho_N^k) - g(\rho^k), \delta^k)_{N,\omega}| \leqslant \|g(\rho_N^k) - g(P_C\rho^k)\|_{N,\omega}\|\delta^k\|_{N,\omega} \leqslant$$

$$C\left(\|g(\rho_N^k) - g(P_C\rho^k)\|_{N,\omega}^2 + \|\delta^{k+1}\|_\omega^2 + \|\delta^{k-1}\|_\omega^2\right).$$

类似地有

$$\|g(\rho_N^k) - g(P_C\rho^k)\|_{N,\omega}^2 = \sum_j[g(P_C\rho^k) - g(\rho_N^k)]^2(x_j)\omega_j =$$

$$\sum_j[B(\rho^k)(|\rho^k - \rho_N^k| + |\rho^k - \rho_N^k|^p)]^2(x_j)\omega_j \leqslant$$

$$C\sum_j[|P_C\rho^k - \rho_N^k|^2(x_j)\omega_j + |P_C\rho^k - \rho_N^k|^{2p}(x_j)\omega_j] \leqslant$$

$$C\|P_C\rho^k - \rho_N^k\|_\omega^2 + C\|P_C\rho^k - \rho_N^k\|_{L^\infty}^{2p-2}\|P_C\rho^k - \rho_N^k\|_{N,\omega}^2 \leqslant$$

$$C\|P_C\rho^k - \rho_N^k\|_\omega^2 + CN^{3(p-1)}\|P_C\rho^k - \rho_N^k\|_\omega^{2p} \leqslant$$

$$C\|P_C\rho^k - \rho_N^k\|_\omega^2 + \|\rho^k - \rho^k\|_\omega^2 + \|\rho_N^k - \rho^k\|_\omega^2 +$$

$$CN^{3(p-1)}\left(\|P_C\rho^k - \rho^k\|_\omega^{2p} + \|\rho^k - \rho^k\|_\omega^{2p} + \|\rho_N^k - \rho^k\|_\omega^{2p}\right) \leqslant$$

$$C\left(N^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|\delta^k\|_\omega^2\right) +$$

$$CN^{3(p-1)}N^{-2p(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p} + CN^{3(p-1)}\|\delta^k\|_\omega^{2p} \leqslant$$

$$C\left(N^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|\delta^k\|_\omega^2\right) + CN^{3(p-1)}\|\delta^k\|_\omega^{2p} + CN^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}.$$

于是有

$$|(g(\rho_N^k) - g(\rho^k), \delta^k)_{N,\omega}| \leqslant C[\|\delta^{k+1}\|_\omega^2 + \|\delta^{k-1}\|_\omega^2 + \|\delta^k\|_\omega^2 +$$

$$N^{3(p-1)}\|\delta^k\|_\omega^{2p} + N^{-2(\sigma-1)}\left(\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\right)],$$

$$|(\rho_{\hat t}^k - \rho_{\hat t}^k, \delta^k)_{N,\omega}| \leqslant \|\rho_{\hat t}^k - \rho_{\hat t}^k\|_{N,\omega}\|\delta^k\|_{N,\omega} \leqslant$$

$$C[\|(I-P_C)\rho_{\hat t}^k\|_\omega^2 + \|(I-P_{1,N})\rho_{\hat t}^k\|_\omega^2 + \|\delta^{k+1}\|_\omega^2 + \|\delta^{k-1}\|_\omega^2],$$

$$|(\rho_{\hat t}^k, \delta^k)_{N,\omega} - (\rho_{\hat t}^k, \delta^k)_\omega| \leqslant CN^{-(\sigma-1)}\|\rho_{\hat t}^k\|_{\sigma-1,\omega} - \|\delta^k\|_\omega \leqslant$$

$$CN^{-(\sigma-1)}\|\rho_{\hat t}^k\|_{\sigma-1,\omega} - \|\delta^k\|_{N,\omega} \leqslant$$

$$C[N^{-2(\sigma-1)}\|\rho_{\hat t}^k\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|\delta^{k+1}\|_\omega^2 + \|\delta^{k-1}\|_\omega^2],$$

$$|(\rho_{\hat t}^k - \partial_t\rho^k, \delta^k)_\omega| \leqslant \|\rho_{\hat t}^k - \partial_t\rho^k\|_\omega\|\delta^k\|_\omega \leqslant$$

$$\|\delta^{k+1}\|_\omega^2 + \|\delta^{k-1}\|_\omega^2 + \|\rho_{\hat t}^k - \partial_t\rho^k\|_\omega^2,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^k,\ \delta^k\right)_{N,\omega}-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^k,\ \delta^k\right)_{\omega}\right]\right|\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{3}CN^{-(\sigma-1)}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}u^k\right\|_{\sigma-1,\omega}\|\delta^k\|_{\omega}\leqslant$$

$$C\left(N^{-2(\sigma-1)}\|u^k\|^2_{\sigma-1,\omega}+\|\delta^{k+1}\|^2_{\omega}+\|\delta^{k-1}\|^2_{\omega}\right),$$

$$|(g(\rho^k),\ \delta^k)_{N,\omega}-(g(\rho^k),\ \delta^k)_{\omega}|\leqslant CN^{-(\sigma-1)}\|g(\rho^k)\|_{\sigma-1,\omega}\|\delta^k\|_{\omega}\leqslant$$

$$C[N^{-2(\sigma-1)}\|g(\rho^k)\|^2_{\sigma-1,\omega}+\|\delta^{k+1}\|^2_{\omega}+\|\delta^{k-1}\|^2_{\omega}]\cdot$$

在(16)式两边同乘以 4τ, 然后关于 k 从 1 到 n 求和, 利用前面的估计式,得

$$\begin{aligned}&\|\delta^{n+1}\|^2_{N,\omega}+\|\delta^n\|^2_{N,\omega}\leqslant C\tau\sum_{k=0}^{n}(\|\theta^k\|^2_{1,\omega}+\|\delta^k\|^2_{\omega})+\\&\quad C\tau\|\delta^0\|^2_{\omega}+C\tau\|\delta^{n+1}\|^2_{\omega}+\|\delta^1\|^2_{\omega}+\|\delta^0\|^2_{\omega}+\\&\quad C\tau\sum_{k=1}^{n}[N^{-2(\sigma-1)}(\|u^k\|^2_{\sigma,\omega}+\|\rho^k\|^2_{\sigma-1,\omega}+\|\rho^k\|^{2p}_{\sigma-1,\omega})+\\&\quad N^{3(p-1)}\|\delta^k\|^{2p}_{\omega}+\|(I-P_C)\rho^k_{\hat t}\|^2_{\omega}+\|(I-P_{1,N})\rho^k_{\hat t}\|^2_{\omega}+\\&\quad \|\rho^k_{\hat t}-\rho^k_t\|^2_{\omega}+N^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k_t\|^2_{\sigma-1,\omega}]\cdot\end{aligned}\qquad(17)$$

将(15)与(17)式相加得到

$$\begin{aligned}&\|\theta^{n+1}\|^2_{N,\omega}+\|\theta^n\|^2_{N,\omega}+\frac{1}{2}(\|\nabla\theta^n\|^2_{\omega}+\|\nabla\theta^{n+1}\|^2_{\omega})+\\&\quad\|\delta^{n+1}\|^2_{N,\omega}+\|\delta^n\|^2_{N,\omega}\leqslant\\&\quad C\tau\sum_{k=1}^{n}\left(\|\theta^k\|^2_{1,\omega}+\|\delta^k\|^2_{\omega}+\|\theta^k_{\hat t}\|^2_{1,\omega}\right)+C\tau\left(\|\theta^0\|^2_{1,\omega}+\|\delta^0\|^2_{\omega}+\right.\\&\quad\left.\|\theta^{n+1}\|^2_{1,\omega}+\|\delta^{n+1}\|^2_{\omega}\right)+C\left(\|\theta^1\|^2_{1,\omega}+\|\delta^1\|^2_{\omega}+\right.\\&\quad\left.\|\theta^0\|^2_{1,\omega}+\|\delta^0\|^2_{\omega}\right)+C\tau\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}N^{-2(\sigma-1)}\|\varphi_i(u^k)\|^2_{\sigma-1,\omega}+\\&\quad C\tau\sum_{k=1}^{n}N^{-2(\sigma-1)}(\|u^k\|^2_{\sigma,\omega}+\|\rho^k\|^2_{\sigma-1,\omega}+\|u^k\|^{2p}_{\sigma,\omega}+\|\rho^k\|^{2p}_{\sigma-1,\omega})+\\&\quad C\tau\sum_{k=1}^{n}N^{3(p-1)}(\|\theta^k\|^{2p}_{1,\omega}+\|\delta^k\|^{2p}_{\omega})+\\&\quad C\tau\sum_{k=1}^{n}N^{-2(\sigma-1)}(\|f(u^k,\rho^k,\nabla u^k)\|^2_{\sigma-1,\omega}+\\&\quad\|g(\rho^k)\|^2_{\sigma-1,\omega})+C\tau\sum_{k=1}^{n}[\|(I-P_C)u^k_{\hat t}\|^2_{\omega}+\\&\quad\|(I-P_{1,N})u^k_{\hat t}\|^2_{\omega}+\|(I-P_C)\rho^k_{\hat t}\|^2_{\omega}+\|(I-P_{1,N})\rho^k_{\hat t}\|^2_{\omega}+\\&\quad\|u^k_{\hat t}-u^k_t\|^2_{1,\omega}+\|\rho^k_{\hat t}-\rho^k_t\|^2_{\omega}+\|u^k_{\hat t}-u^k_t\|^2_{1,\omega}+\\&\quad\|(I-P_C)\nabla u^k_{\hat t}\|^2_{\omega}+N^{-2(\sigma-1)}(\|u^k_t\|^2_{\sigma,\omega}+\|\rho^k_t\|^2_{\sigma-1,\omega})]\cdot\end{aligned}\qquad(18)$$

为了估计(18)中的 $\|\theta^k_{\hat t}\|_{1,\omega}$, 在(11)式中令 $\chi=\theta^k_{\hat t}$, 则有

$$\|\theta^k_{\hat t}\|^2_{N,\omega}+\left(\nabla\theta^k_{\hat t},\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k_{\hat t}\omega)\right)_{N,\omega}+$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\varphi_i(u^k_N)-\varphi_i(u^k),\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta^k_{\hat t}\omega)\right)_{N,\omega}-\sum_{i=1}^{3}\left(\varepsilon^k+\delta^k,\frac{1}{\omega}\nabla(\theta^k_{\hat t}\omega)\right)_{N,\omega}+$$

$$(f(u_N^k, \rho_N^k, \nabla u_N^k) - f(u^k, \rho^k, \nabla u^k), \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega} =$$
$$(u_{\hat t}^k - u_{\hat t}^k, \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega} + (u_{\hat t}^k, \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega} - (u_{\hat t}^k, \theta_{\hat t}^k)_{\omega} +$$
$$(u_{\hat t}^k - \partial_t u^k, \theta_{\hat t}^k)_{\omega} + (\nabla(u_{\hat t}^k - \partial_t u^k), \nabla(\theta_{\hat t}^k \omega)) +$$
$$\left(\nabla u_{\hat t}^k, \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega} - \left(\nabla u_{\hat t}^k, \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{\omega} +$$
$$\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\rho^k, \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{\omega} + \left(\rho^k, \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega}\right] -$$
$$\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\varphi_i(u^k), \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega} + \left(\varphi_i(u^k), \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{\omega}\right] +$$
$$(f(u^k, \rho^k, \nabla u^k)\theta_{\hat t}^k)_{\omega} - (f(u^k, \rho^k, \nabla u^k), \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega}. \tag{19}$$

由引理 2 有

$$\left(\nabla\theta_{\hat t}^k, \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega} \geqslant \frac{1}{4}\|\nabla\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega}^2.$$

由 Schwarz 不等式和引理 6 知, 有

$$\left|\left(\varphi_i(u_N^k) - \varphi_i(u^k), \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega}\right| \leqslant$$
$$C\|u_N^k - P_C u^k\|_{N,\omega}\left\|\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right\|_{N,\omega} \leqslant$$
$$C\|u_N^k - P_C u^k\|_{N,\omega}\left\|\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right\|_{\omega} \leqslant$$
$$\varepsilon_1\|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 + C\left(\|\theta^k\|_{\omega}^2 + \|\lambda^k\|_{\omega}^2 + \|(I - P_C)u^k\|_{\omega}^2\right),$$
$$\left|\sum_{i=1}^{3}\left(\varepsilon^k + \delta^k, \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega}\right| \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{3}\left(\|\varepsilon^k\|_{N,\omega} + \|\delta^k\|_{N,\omega}\right)\left\|\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right\|_{N,\omega} \leqslant$$
$$8\sum_{i=1}^{3}\left(\|\varepsilon^k\|_{\omega} + \|\delta^k\|_{\omega}\right)\left\|\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right\|_{N,\omega} \leqslant$$
$$\varepsilon_2\|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 + C\left(\|\varepsilon^k\|_{\omega}^2 + \|\delta^k\|_{\omega}^2\right).$$

与前估计类似, 还有

$$|(f(u_N^k, \rho_N^k, \nabla u_N^k) - f(u^k, \rho^k, \nabla u^k), \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega}| \leqslant$$
$$\|f(u_N^k, \rho_N^k, \nabla u_N^k) - f(P_C u^k, P_C\rho^k, P_C\nabla u^k)\|_{N,\omega}\|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega} \leqslant$$
$$\varepsilon_3\|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega}^2 + C\|f(u_N^k, \rho_N^k, \nabla u_N^k) - f(P_C u^k, P_C\rho^k, P_C\nabla u^k)\|_{N,\omega}^2 \leqslant$$
$$\varepsilon_3\|\theta_{\hat t}^k\|_{\omega}^2 + CN^{-2(\sigma-1)}\left(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2 + \|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p} + \|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\right) +$$
$$C[\|\theta^k\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^k\|_{\omega}^2 + N^{3(p-1)}(\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p} + \|\delta^k\|_{\omega}^{2p})],$$
$$|(u_{\hat t}^k - P_C u_{\hat t}^k, \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega}| \leqslant \|u_{\hat t}^k - P_C u_{\hat t}^k\|_{N,\omega}\|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega} \leqslant$$
$$2\sqrt{2}\|u_{\hat t}^k - P_C u_{\hat t}^k\|_{\omega}\|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega} \leqslant$$
$$\varepsilon_4\|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega}^2 + C\left(\|(I - P_C)u_{\hat t}^k\|_{\omega}^2 + \|(I - P_{1,N})u_{\hat t}^k\|_{\omega}^2\right) \leqslant$$
$$\varepsilon_4\|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega}^2 + CN^{-2(\sigma-1)}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}^2,$$
$$|(u_{\hat t}^k, \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega} - (u_{\hat t}^k, \theta_{\hat t}^k)_{\omega}| \leqslant CN^{-\sigma}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}\|\theta_{\hat t}^k\|_{\omega} \leqslant$$

$$\varepsilon_5 \|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega}^2 + CN^{-2\sigma}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}^2,$$

$$|(u_{\hat t}^k - \partial_t u^k, \theta_{\hat t}^k)_\omega| \leqslant \varepsilon_6 \|\theta_{\hat t}^k\|_{N,\omega}^2 + C\|u_{\hat t}^k - \partial_t u^k\|_\omega^2,$$

$$|(\nabla(u_{\hat t}^k - \partial_t u^k), \nabla(\theta_{\hat t}^k\omega))| \leqslant C\|\nabla(u_{\hat t}^k - \partial_t u^k)\|_\omega \|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega} \leqslant$$
$$\varepsilon_7 \|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 + C\|\nabla(u_{\hat t}^k - \partial_t u^k)\|_\omega^2,$$

$$\left|\left(\nabla u_{\hat t}^k, \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega} - \left(\nabla u_{\hat t}^k, \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_\omega\right| \leqslant$$
$$\left|\left(\nabla(u_{\hat t}^k - P_C u_{\hat t}^k), \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega}\right| +$$
$$\left|\left(\nabla u_{\hat t}^k, \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega} - \left(\nabla u_{\hat t}^k, \frac{1}{\omega}\nabla(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_\omega\right| \leqslant$$
$$\varepsilon_8 \|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 + CN^{-2(\sigma-1)}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}^2 + C\|u_{\hat t}^k - u_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\rho^k, \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_\omega - \left(\rho^k, \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega}\right]\right| \leqslant$$
$$\varepsilon_9 \|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 + CN^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\varphi_i(u^k), \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_{N,\omega} - \left(\varphi_i(u^k), \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_{\hat t}^k\omega)\right)_\omega\right]\right| \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{3} CN^{-2(\sigma-1)}\|\varphi_i(u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \varepsilon_{10}\|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2,$$

$$|(f(u^k, \rho^k, \nabla u^k), \theta_{\hat t}^k)_\omega - (f(u^k, \rho^k, \nabla u^k), \theta_{\hat t}^k)_{N,\omega}| \leqslant$$
$$CN^{-2(\sigma-1)}\|f(u^k, \rho^k, \nabla u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \varepsilon_{11}\|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2.$$

代上面这些估计式到(19)中,并利用引理3、引理5及引理6,令诸 $\varepsilon_i(i = 1, 2, \cdots, 11)$ 充分小,则有

$$\begin{aligned}
\|\theta_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 \leqslant\ & C\Big(\|\theta^k\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^k\|_\omega^2 + N^{-2(\sigma-1)}\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2 + N^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \\
& N^{-2(\sigma-1)}\|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p} + N^{-2(\sigma-1)}\|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}\Big) + \\
& CN^{3(p-1)}(\|\theta^k\|_{1,\omega}^{2p} + \|\delta^k\|_\omega^{2p}) + CN^{-2(\sigma-1)}\|u_{\hat t}^k\|_{\sigma,\omega}^2 + \\
& C\|u_{\hat t}^k - \partial_t u^k\|_\omega^2 + C\|\nabla(u_{\hat t}^k - \partial_t u^k)\|_\omega^2 + C\|u_{\hat t}^k - u_{\hat t}^k\|_{1,\omega}^2 + \\
& CN^{-2(\sigma-1)}\left(\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i(u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|f(u^k, \rho^k, \nabla u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

将(20)代入(18),利用引理3、引理5得

$$\begin{aligned}
&\|\theta^{n+1}\|_{N,\omega}^2 + \|\theta^n\|_{N,\omega}^2 + \frac{1}{2}(\|\nabla\theta^{n+1}\|_\omega^2 + \|\nabla\theta^n\|_\omega^2) + \\
&\quad \|\delta^{n+1}\|_{N,\omega}^2 + \|\delta^n\|_{N,\omega}^2 \leqslant \\
&\quad C\left(\|\theta^1\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^1\|_\omega^2 + \|\theta^0\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^0\|_\omega^2\right) + \\
&\quad C\tau\left(\|\theta^0\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^0\|_\omega^2 + \|\theta^{n+1}\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^{n+1}\|_\omega^2\right) + \\
&\quad C\tau\sum_{k=1}^{n}(\|\theta^k\|_{1,\omega}^2 + \|\delta^k\|_\omega^2) + \\
&\quad C\tau\sum_{k=1}^{n}\Big[N^{-2(\sigma-1)}(\|u^k\|_{\sigma,\omega}^2 + \|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|u^k\|_{\sigma,\omega}^{2p} + \|\rho^k\|_{\sigma-1,\omega}^{2p}) + \\
&\quad N^{3(p-1)}\Big(\sum_{k=1}^{n}(\|\varphi_i(u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2 + \|f(u^k, \rho^k, \nabla u^k)\|_{\sigma-1,\omega}^2 +
\end{aligned}$$

$$\|g(\rho^k)\|^2_{\sigma-1,\omega}\Big) + N^{-3(p-1)}(\|\theta^k\|^{2p}_{1,\omega} + \|\delta^k\|^{2p}_{\omega}) +$$
$$N^{-2(\sigma-1)}(\|u_t^k\|^2_{\sigma,\omega} + \|\rho_t^k\|^2_{\sigma-1,\omega}) + \|u_t^k - \partial_t u^k\|^2_{1,\omega} +$$
$$\|\rho_t^k - \rho_t^k\|^2_{\omega} + \|u_t^k - u_t^k\|^2_{1,\omega}\Big] \cdot \qquad (21)$$

由于初值的选取使 $\theta^0 = 0$, $\delta^0 = 0$, $\|\delta^1\|_\omega \leqslant C\tau^2$, 又有

$$\|u_t^k\|^2_{\sigma,\omega} \leqslant \|u_t^k - u_t^k\|^2_{\sigma,\omega} + \|\partial_t u^k\|^2_{\sigma,\omega} \leqslant$$
$$C\tau^4\|\partial_t^3 u^k\|^2_{\sigma,\omega} + \|\partial_t u^k\|^2_{\sigma,\omega},$$
$$\|\rho_t^k\|^2_{\sigma-1,\omega} \leqslant \|\rho_t^k - \rho_t^k\|^2_{\sigma-1,\omega} + \|\partial_t\rho^k\|^2_{\sigma-1,\omega} \leqslant$$
$$C\tau^4\|\partial_t^3\rho^k\|^2_{\sigma-1,\omega} + \|\partial_t\rho^k\|^2_{\sigma-1,\omega},$$
$$\|u_t^k - \partial_t u^k\|^2_{1,\omega} \leqslant C\tau^4\|\partial_t^3 u^k\|^2_{1,\omega},$$
$$\|u_t^k - u_t^k\|^2_{1,\omega} \leqslant CN^{-2(\sigma-1)}\|u_t^k\|^2_{\sigma,\omega} \leqslant$$
$$CN^{-2(\sigma-1)}(\|\partial_t^3 u^k\|^2_{\sigma,\omega} + \|\partial_t u^k\|^2_{\sigma,\omega}) \cdot$$

故存在常数 $K \geqslant 0$, 当 $1 - C\tau \geqslant K$ 时, 有

$$\|\theta^{n+1}\|^2_{1,\omega} + \|\delta^{n+1}\|^2_{\omega} \leqslant C(\|\theta^1\|^2_{1,\omega} + \tau^4) + C\tau\sum_{k=1}^{n}(\|\theta^k\|^2_{1,\omega} + \|\delta^k\|^2_{\omega}) +$$
$$CN^{-2(\sigma-1)}\tau\Big[\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}\|\varphi_i(u^k)\|^2_{\sigma-1,\omega} +$$
$$\sum_{k=1}^{n}\|f(u^k, \rho^k, \nabla u^k)\|^2_{\sigma-1,\omega} + \sum_{k=1}^{n}\|g(\rho^k)\|^2_{\sigma-1,\omega} +$$
$$\sum_{k=1}^{n}(\|u^k\|^2_{\sigma,\omega} + \|\rho^k\|^2_{\sigma-1,\omega} + \|u^k\|^{2p}_{\sigma,\omega} + \|\rho^k\|^{2p}_{\sigma-1,\omega})\Big] +$$
$$CN^{-2(\sigma-1)}\tau^5\Big(\sum_{k=1}^{n}\|\partial_t^3 u^k\|^2_{\sigma,\omega} + \sum_{k=1}^{n}\|\partial_t^3\rho^k\|^2_{\sigma-1,\omega}\Big) +$$
$$C\tau^5\Big(\sum_{k=1}^{n}\|\partial_t^3 u^k\|^2_{1,\omega} + \sum_{k=1}^{n}\|\partial_t^3\rho^k\|^2_{\omega}\Big) +$$
$$C\tau\sum_{k=1}^{n}N^{3(p-1)}(\|\theta^k\|^{2p}_{1,\omega} + \|\delta^k\|^{2p}_{\omega}) \cdot \qquad (22)$$

最后, 通过选取 u_N^1 来确定 θ^1, 从而给出(22) 中 $\|\theta^1\|_{1,\omega}$ 的估计• 记

$$Lu^0 = f(u^0, \rho^0, \nabla u^0) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i(u^0) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\rho^0,$$

它由初值完全确定, 我们构造 $u_t^0 \in S_N$, 使得

$$(u_t^0, \chi\omega) + (\nabla u_t^0, \nabla(\chi\omega)) = (Lu^0, \chi\omega) \qquad \forall \chi \in S_N \cdot \qquad (23)$$

从(23) 解得 u_t^0 后, 再求解 $u^1 \in S_N$, 它满足

$$(u^1, \nabla(\chi\omega)) = (\nabla(u^0 + \tau u_t^0), \nabla(\chi\omega)) \qquad \forall \chi \in S_N, \qquad (24)$$

构造取 $u^1 = u_N^1$• 下面估计 $\|\theta^1\|_{1,\omega}$, 按 $P_{1,N}u^1$ 的定义有 $P_{1,N}u^1 \in S_N$, 且满足

$$(\nabla P_{1,N}u^1, \nabla(\chi\omega)) = (\nabla u^1, \nabla(\chi\omega)) = (\nabla(u^0 + \tau\partial_t u^0 + o(\tau^2)), \nabla(\chi\omega)) =$$
$$(\nabla(u^0 + \tau u_t^0), \nabla(\chi\omega)) + \tau(\nabla(\partial_t u^0 - u_t^0), \nabla(\chi\omega)) +$$
$$(o(\tau^2), \nabla(\chi\omega)) \qquad \forall \chi \in S_N \cdot$$

于是有

$$(\nabla(P_{1,N}u^1 - u_N^1), \nabla(\chi\omega)) = \tau(\partial_t u^0 - u_t^0, \nabla(\chi\omega)) + (o(\tau^2), \nabla(\chi\omega)). \tag{25}$$

在(25)中特取 $\chi = P_{1,N}u^1 - u_N^1 \in S_N$, 则有

$$\|P_{1,N}u^1 - u_N^1\|_{1,\omega} \leqslant C\|\nabla(P_{1,N}u^1 - u_N^1)\|_\omega \leqslant C\tau\|\partial_t u^0 - u_t^0\|_{1,\omega} + o(\tau^2). \tag{26}$$

而由方程(3)可知

$$\partial_t u^0 - \Delta\partial_t u^0 = Lu^0,$$

于是

$$(\partial_t u^0, \chi\omega) + (\nabla\partial_t u^0, \nabla(\chi\omega)) = (Lu^0, \chi\omega) \qquad \forall\chi \in H^1_{0,\omega}(\Omega). \tag{27}$$

若记 $P_{1,N}u_t^0 = u_t^0$, $\partial_t u^0 - u_t^0 = \partial_t u^0 - u_t^0 + u_t^0 - u_t^0 = \xi + \eta$, 则 η 满足

$$(\eta, \chi\omega) + (\nabla\eta, \nabla(\chi\omega)) = (\partial_t u^0 - u_t^0, \chi\omega) \qquad \forall\chi \in S_N, \tag{28}$$

在(28)中让 $\chi = \eta$, 则得

$$\|\eta\|_{1,\omega} \leqslant C\|\partial_t u^0 - u_t^0\|_\omega \leqslant CN^{-(\sigma-1)}\|u_t^0\|_{\sigma,\omega} \leqslant CN^{-(\sigma-1)}\|(I-\Delta)^{-1}Lu^0\|_{\sigma,\omega} \leqslant CN^{-(\sigma-1)}\|Lu^0\|_{\sigma-2,\omega} \leqslant CN^{-(\sigma-1)}\|u^0\|_{\sigma,\omega},$$

$$\|u^1 - u_N^1\|_{1,\omega} \leqslant \|u^1 - P_{1,N}u^1\|_{1,\omega} + \|P_{1,N}u^1 - u_N^1\|_{1,\omega} \leqslant C(N^{-(\sigma-1)} + \tau^2).$$

因此有 $\|\theta^1\|_{1,\omega} \leqslant C(N^{-(\sigma-1)} + \tau^2)$. 将此估计式代入(22)式, 利用引理7可知, 对一切 $n\tau \leqslant T$, 当 $\tau^2 + N^{-(\sigma-1)} \leqslant \delta N^{-3/2}e^{-CT}$ 时, 有

$$\|\theta^n\|_{1,\omega} + \|\delta^n\|_\omega \leqslant C(\tau^2 + N^{-(\sigma-1)}).$$

再由三角不等式, 有下述定理

定理 设 $\varphi_i(i=1,2,3)$、f、g 满足开始时的假设, 问题(3)~(6)的解 $u, u_t \in L^\infty(0,T;H^\sigma_\omega(\Omega)\cap H^1_{0,\omega}(\Omega))$, $\partial_t^3 u \in L^\infty(0,T;H^\sigma_\omega(\Omega))$, $\rho, \rho_t \in L^\infty(0,T;H^{\sigma-1}_\omega(\Omega)\cap H^1_{0,\omega}(\Omega))$, $\partial_t^3\rho \in L^\infty(0,T;H^\sigma_\omega(\Omega))$, $\sigma \geqslant 3$. 则存在不依赖与 τ 和 N 的正数 δ 和 C, 使得当 $\tau^2 + N^{-(\sigma-1)} \leqslant \delta N^{-3/2}e^{-CT}$ 时, 有

$$\|u^n - u_N^n\|_{1,\omega} + \|\rho^n - \rho_N^n\|_\omega \leqslant C(N^{-(\sigma-1)} + \tau^2) \qquad \forall n\tau \leqslant T.$$

注记 1 (7)~(10)为线性三层格式, 每层求解仅需解一个线性方程组, 且可利用 FFT 计算, 初值 u_N^1 可通过解两个线性方程组(23)和(24)得到.

注记 2 若 f、g 关于变量满足一致 Lipschitz 条件, 则对步长 τ 无需加任何限制.

[参 考 文 献]

[1] Seyler C E, Fanstermacler D C. A symmetric regularized long wave equation[J]. Phys Fluids, 1984, **27**(1): 4—7.

[2] Iskandar L, Jain P C. Numerical solutions of the improved Boussinesq equation[J]. Proc Indian Acad Sci Math Sci, 1980, **89**(1): 171—181.

[3] Soerensen M P, Christainsen P L, Lomdahl P S. Solitary waves on nonlinear elastic rods[J]. J Acoust Soc Amer, 1984, **76**(5): 871—879.

[4] Bogolubsky J L. Some examples of inelastic soliton interaction[J]. Comput Phys Comm, 1977, **13**(1): 149—155.

[5] CHEN Lin. Stability and instability of solitary waves for generalized symmetric regularized long wave equations[J]. Physica D, 1998, **118**(1/2): 53—68.

[6] GUO Bo_ling. The spectral method for symmetric regularized wave equations[J]. J Comput Math, 1987, **5**(4): 297—306.

[7] 郑家栋, 张汝芬, 郭本瑜. SRLW 方程的 Fourier 拟谱方法[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(9): 801—810.

[8] 郑家栋. 广义 SRLW 方程的拟谱配点解法[J]. 计算数学, 1989, **11**(1): 64—72.

[9] GUO Bo_ling. The existence of global solutions and "blow up" phenomena for a system of multidimensional symmetric regularized wave equations [J]. Acta Math Appl Sinica, 1992, **8**(1): 59—72.

[10] 尚亚东, 李志深. 解高维广义对称正则长波方程组的 Fourier 谱方法[J]. 高等学校计算数学学报, 1999, **21**(1): 48—60.

[11] MA He_ping, GUO Ben_yu. The Chebyshev spectral methods for Burgers_like equations[J]. J Comput Math, 1988, **6**(1): 51—56.

[12] Bressan N, Quarteroni A. Analysis of Chebyshev collocation methods for parabolic equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1986, **23**(6): 1138—1154.

[13] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. Spectral Methods in Fluid Dynamics[M]. New York: Springer_Verlag, 1988.

[14] 向新民, 张法勇. 高维广义 BBM 方程的 Chebyshev 拟谱方法[J]. 计算数学, 1991, **13**(4): 403—411.

[15] GUO Ben_yu. Spectral Methods and Their Applications[M]. Singapore: World Scientific, 1998.

Analysis of Chebyshev Pseudospectral Method for Multi_Dimensional Generalized SRLW Equations

SHANG Ya_dong[1], GUO Bo_ling[2]

(1. Department of Mathematics, Guangzhou University, Guangzhou 510405, P. R. China;

2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P. O. Box 8009, Bejing 100088, P. R. China)

Abstract: The Chebyshev pseudo_spectral approximation of the homogenous initial boundary value problem for a class of multi_dimensional generalized symmetric of regularized long wave (SRLW) equations is considered. The fully discrete Chebyshev pseudospectral scheme is constructed. The convergence of the approximation solution and the optimum error of approximation solution are obtained.

Key words: multi_dimensional generalized SRLW equation; initial and boundary value problem; Chebyshev pseudospectral method; error estimate