

文章编号: 1000-0887(2003) 11-1118-08

多重尺度法的计算机计算——一类非线性方程组的狄立克雷问题*

谢腊兵, 江福汝

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊原编委江福汝来稿)

摘要: 应用多重尺度的边界层方法和计算机符号运算研究一类非线性方程组的边值问题解的渐近性质, 构造出解的渐近展开式和估计了余项, 并分析一个实例, 为多重尺度方法的应用提供新的前景。

关键词: 非线性方程组; 边值问题; 多重尺度的边界层法; 计算机符号运算; 渐近解
中图分类号: O302 文献标识码: A

引言

江福汝应用多重尺度边界层方法研究了大量的边值问题, 包括出现转点的边值问题^[1-4], 得到更一般和精确的结果, 但由于推导过程的繁琐, 限制了该方法的推广和应用。本文借助于计算机符号运算研究较前人更一般的非线性方程组的狄立克雷问题, 简单地求得高阶渐近解的表达式, 拓广和改进了前人的结果, 并为多重尺度边界层方法的应用展开新的前景。最后分析了一个实例。

1 模型及外部解

考虑边值问题

$$\begin{cases} u''_{\varepsilon} = v_{\varepsilon}, \quad \varepsilon u''_{\varepsilon} + f(x, u_{\varepsilon}) v'_{\varepsilon} = 0 \quad (0 < x < 1, 0 < \varepsilon \ll 1), \\ u_{\varepsilon}(0) = 0, \quad u_{\varepsilon}(1) = 0, \\ v_{\varepsilon}(0) = \alpha, \quad v_{\varepsilon}(1) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

其中 α, β 是常数, f 是各变元的充分次连续可微函数, 这里除假设 $f(x, 0) = 0$ 外还要求 $f_u(x, u)$ 当 $0 \leq x \leq 1, |u| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u_0(x)|$ 时保持定号, 不妨设为正, 即要求

$$f_u(x, u) \geq \delta > 0, \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1, |u| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u_0(x)|, \quad (2)$$

δ 为常数, $u_0(x)$ 为外部解的主要部分。

假设边值问题(1)的外部解具有渐近展开式

* 收稿日期: 2001_12_10; 修订日期: 2003_06_09

作者简介: 谢腊兵(1976—), 男, 安徽人, 硕士(E-mail:)。
江福汝(1927—), 男, 江苏人, 教授(E-mail:)。

$$(u\varepsilon)_{\text{out}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{np} u_n(x), \quad (v\varepsilon)_{\text{out}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{np} v_n(x), \quad (3)$$

其中 p 是特定的正的常数, 鉴于后面的需要, 本文取 $p = 1/2$. 为了统一进行计算机代数运算, 我们将(3) 式写成 N 阶渐近展开式, 在 Mathematica 系统软件下(令 $N = 10$) 进行计算, 得到 20 个方程, 归纳得到关于 $u_n, v_n (n = 0, 1, \dots)$ 的递推方程:

$$\begin{cases} u_n'' = v_n & (n = 0, 1, \dots), \\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i v'_{n-i} + v_{n-2} = 0 & (n = 0, 1, \dots). \end{cases} \quad (4)$$

在上式和以后的各式中都将负下标的量取作零; 其中 f_i 是函数 $f(x, \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} u_n)$ 关于 ε 的泰罗展开式的 ε^i 项系数

$$\begin{cases} f_0 = f_0(x, u_0), \\ f_i = f_u(x, u_0) + F_i(x, u_0, u_0', u_{i-1}, \dots, u_{i-1}') \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

F_i 是所含变元的有界函数.

根据 u_ε 的边界条件, 从(4) 式可以求出外部解的主要项

$$u_0 = -\frac{c_0}{2}x(1-x), \quad v_0 = c_0, \quad (5)$$

其中 c_0 是待定常数, 依赖于 v_ε 的边界条件. 下面再构造外部解在边界层(或内层)的校正项.

2 边值问题的多重尺度表示法

引入多重尺度变量

$$\xi = \phi(x)/\varepsilon^p, \quad \eta = x, \quad (6)$$

其中 $\phi(x)$ 是待定的正函数, p 是待定的正的常数, 得到导数的多重尺度展开式

$$\frac{d}{dx} = \varepsilon^{-p} \left(\delta_x^{(0)} + \varepsilon^p \delta_x^{(1)} \right), \quad \frac{d^2}{dx^2} = \varepsilon^{-2p} \left(\delta_x^{(0)} + \varepsilon^p \delta_x^{(1)} + \varepsilon^{2p} \delta_x^{(2)} \right), \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_x^{(0)} &= \phi_x \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \delta_x^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \delta_x^{(2)} &= \phi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \delta_x^{(1)} = 2\phi_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \phi_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \delta_x^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

将(7) 代入边值问题(1), 并令 $p = 1/2$, 得到边值问题的多重尺度表示式:

$$\begin{cases} \varepsilon^{-1} \left(\delta_x^{(0)} + \varepsilon^{1/2} \delta_x^{(1)} + \varepsilon \delta_x^{(2)} \right) u_\varepsilon = v_\varepsilon, \\ \left(\delta_x^{(0)} + \varepsilon^{1/2} \delta_x^{(1)} + \varepsilon \delta_x^{(2)} \right) v_\varepsilon + \varepsilon^{-1/2} f(x, u_\varepsilon) \left(\delta_x^{(0)} + \varepsilon^{1/2} \delta_x^{(1)} \right) v_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon(0) = 0, \quad u_\varepsilon(1) = 0, \\ v_\varepsilon(0) = \alpha, \quad v_\varepsilon(1) = \beta. \end{cases} \quad (8)$$

这有助于构造渐近解的复合展开式.

3 边值问题的渐近解及余项估计

假设渐近解的复合展开式为

$$\begin{cases} u_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} u_n(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} U_n(\xi, \eta), \\ v_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} v_n(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} V_n(\xi, \eta), \end{cases} \quad (9)$$

代入(8)式再比较 ε 的同次幂系数, 利用 u_n 和 v_n 所满足的方程, 在 Mathematica 系统下得到 40 个方程, 归纳得出关于校正项 U_n 和 V_n 的递推方程:

$$\begin{cases} \phi_x^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} = 0, \\ \phi_x^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} = -\delta_x^{(1)} U_0, \\ \phi_x^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} = -\delta_x^{(1)} U_{n-1} - \delta_x^{(2)} U_{n-2} + V_{n-2} \quad (n \geq 2), \\ \phi_x^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-1/2} f(\eta, u_0 + U_0) \phi_x \frac{\partial V_0}{\partial \xi} = -f_u(\eta, u_0 + U_0)(u_1 + U_1) \delta_x^{(0)} V_0, \\ \phi_x^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-1/2} f(\eta, u_0 + U_0) \phi_x \frac{\partial V_1}{\partial \xi} = -\delta_x^{(1)} V_0 - \\ \varepsilon^{-1/2} f(\eta, u_0 + U_0) \delta_x^{(0)} V_0 - f_u(\eta, u_0 + U_0)(u_1 + U_1)(\delta_x^{(0)} V_1 + \delta_x^{(1)} V_0) - \\ f_u(\eta, u_0 + U_0)(u_2 + U_2) \delta_x^{(0)} V_0, \\ \phi_x^2 \frac{\partial^2 V_n}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-1/2} f(\eta, u_0 + U_0) \phi_x \frac{\partial V_n}{\partial \xi} = -\delta_x^{(1)} V_{n-1} - \delta_x^{(2)} V_{n-2} - \\ \varepsilon^{-1/2} f(\eta, u_0 + U_0) \delta_x^{(1)} V_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} f_u(\eta, u_0 + U_0)(u_i + U_i) \times \\ (\delta_x^{(0)} V_{n-i+1} + \delta_x^{(1)} V_{n-i}) \quad (n \geq 2), \end{cases} \quad (10)$$

和边界条件

$$\begin{cases} u_n(0) + U_n(\phi(0)/\varepsilon^{1/2}, 0) |_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0, \quad (n \geq 0) \\ u_n(1) + U_n(\phi(1)/\varepsilon^{1/2}, 1) |_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0, \\ v_0(0) + V_0(\phi(0)/\varepsilon^{1/2}, 0) |_{\varepsilon \rightarrow 0} = \alpha, \\ v_0(1) + V_0(\phi(1)/\varepsilon^{1/2}, 1) |_{\varepsilon \rightarrow 0} = \beta, \\ v_n(0) + V_n(\phi(0)/\varepsilon^{1/2}, 0) |_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0, \\ v_n(1) + V_n(\phi(1)/\varepsilon^{1/2}, 1) |_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0, \quad (n \geq 0). \end{cases} \quad (11)$$

从外部解的递推方程(4)(取 $n=1$)知道 $u_1 = -c_1 x(1-x)/2$, $v_1 = c_1$, 又根据边界条件知 $c_1 = 0$, 所以 $u_1 = v_1 = 0$; 再从 U_0 和 U_1 的控制方程(10) $U_0 = U_1 = 0$. 从(11)的第一方程得到 V_0 的控制方程

$$\phi_x^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-1/2} f_u(\eta, \theta u_0) u_0(\eta) \phi_x \frac{\partial V_0}{\partial \xi} = 0 \quad (0 < \theta < 1). \quad (12)$$

因 $u_0(\eta)$ 在边界取零值, 在边界的邻域可假设 $u_0(\eta)$ 与 $\varepsilon^{1/2}$ 是同阶小量.

在边界 $x=0$ 的邻域令待定函数 $\phi(x) = x$, 易知方程(13) 仅当 $c_0 < 0$ 才具有边界层型函数的解

$$V_0 = k_0(\eta) \int_{\xi}^{\infty} \exp[f_u(\eta, \theta u_0) c_0(1-\eta)t^2/4] dt. \quad (13)$$

又在边界 $x = 1$ 的邻域令 $\phi(x) = 1 - x$, 则方程(13) 仅当 $c_0 > 0$ 才具有边界层型函数的解

$$V_0 = k_0(\eta) \int_{\xi}^{\infty} \exp[f_u(\eta, \theta_{u_0}) c_0(1 - \eta) t^2/4] dt \cdot \tag{15}$$

所以如同文献[4]中的模型1 这里也存在四种情形:

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0; \alpha < 0, \beta < 0; \alpha > 0, \beta < 0; \alpha < 0, \beta > 0 \cdot$$

情形1 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

若 α 和 β 同是零, 则是零解. 若 α 和 β 中有一不是零, 设 $\alpha > 0$, 从(15) 式知在 $x = 1$ 的邻域存在边界层校正项

$$V_0 = \frac{2(\beta - \alpha)}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\alpha \mathcal{F}_u} \xi/2}^{\infty} e^{-t^2} dt = (\beta - \alpha) \left[1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2} \xi \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})} \right] \right], \tag{16}$$

其中 $\operatorname{erf}[z]$ 是由 Mathematica 给出的数学误差函数, 当 $z \rightarrow \infty$ 时

$$\operatorname{erf}[z] \approx 1 - \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \exp[-z^2],$$

这样求得边值问题(1)的渐近解的主要项:

$$\begin{cases} u_{\varepsilon}^{(0)} = -\alpha(1-x)/2, \\ v_{\varepsilon}^{(0)} = \alpha + H(x)(\beta - \alpha) \left[1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2} \xi \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})} \right] \right], \end{cases} \tag{17}$$

其中 $H(x)$ 是光滑截断函数:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } 3/4 \leq x \leq 1), \\ h(x) & (\text{当 } 1/2 \leq x \leq 3/4), \\ 0 & (\text{当 } 0 \leq x \leq 1/2), \end{cases} \tag{18}$$

$h(x)$ 是连接0和1的二次连续可微函数. 重复文献[4]对模型(1)的情形的计算可以得出高阶渐近解. 考虑人工计算的复杂性和易错性, 我们用计算机符号运算得到渐近解的高阶项

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{\alpha - \beta}{\mathcal{F}_u(1, 0)} \eta, \quad v_2 = 0, \\ U_2 &= \frac{(2\beta - \alpha)}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} dz \int_z^{\infty} ds \int_{\sqrt{\alpha \mathcal{F}_u}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{4} t^2 \alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0}) \right] dt = \\ & \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi} \alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})} \left[(\alpha - \beta) \sqrt{\pi} (2 - \xi^2 \alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})) \times \right. \\ & \quad \left. \left(\operatorname{erf} \left[\frac{1}{2} \xi \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})} \right] - 1 \right) + \right. \\ & \quad \left. 2(\alpha - \beta) \xi \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})} \exp \left[-\frac{1}{4} s^2 \alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0}) \right], \right. \\ V_1 &= \int_{\xi}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{4} s^2 \alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0}) \right] ds \int_s^{\infty} Q(t, \eta) dt + \\ & \quad d_1 \left[1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2} \xi \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})} \right] \right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Q(t, \eta) &= \frac{1}{4\pi \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})}} \left\{ \frac{(\alpha - \beta)^2 f_u(\eta, u_0) f_u(\eta, \theta_{u_0})}{f_u(1, 0)} - \right. \\ & \quad \left. 4t(\alpha - \beta) f_u(\eta, u_0) \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})} \exp \left[-\frac{1}{4} t^2 \alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0}) \right] - \right. \\ & \quad \left. (\alpha - \beta)^2 f_u(\eta, u_0) 2\sqrt{\pi} (2 - t^2 \alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta_{u_0})) \times \right. \end{aligned}$$

$$\left(-1 + \operatorname{erf} \left[\frac{1}{2} \xi \sqrt{\alpha \mathcal{F}_u(\eta, \theta u_0)} \right] \right) + \sqrt{\pi}(\beta - \alpha)(4 - t^2 \eta \mathcal{G}_u(\eta, \theta u_0)) \times \\ (\theta u_0 \alpha \mathcal{F}_{uu}(\eta, \theta u_0) + \alpha \mathcal{F}_{u\eta}(\eta, \theta u_0)),$$

其中 d_1 由边界条件 $v_1(1) + V_1(0, 1) = 0$ 给出。在计算机上我们得出三阶渐近解, 但由于篇幅的原因, 这里不一一列举。如果需要, 我们可以改变运算技巧和在高内存的计算机上计算, 可以得到更高阶的解。这样我们可以得到边值问题 (1) 的 N 阶形式渐近解:

$$\begin{cases} u_\varepsilon^{(N)} = \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} u_n(x) + H(x) \sum_{n=0}^{N+2} \varepsilon^{n/2} U_n \left[\frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}, x \right], \\ v_\varepsilon^{(N)} = \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} v_n(x) + H(x) \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} V_n \left[\frac{1-x}{\varepsilon^{1/2}}, x \right], \end{cases} \quad (19)$$

其中 $v_n(x) \equiv 0, (n = 1, 2, \dots, N)$ 。即成立

$$\begin{cases} (u_\varepsilon^{(N)})'' = v_\varepsilon^{(N)} + O(\varepsilon^{(N+1)/2}), \\ \varepsilon(v_\varepsilon^{(N)})'' + f(x, u_\varepsilon^{(N)})(v_\varepsilon^{(N)})' = O(\varepsilon^{(N+1)/2}), \\ u_\varepsilon^{(N)}(0) = O(\varepsilon^{(N+1)/2}), u_\varepsilon^{(N)}(1) = O(\varepsilon^{(N+1)/2}), \\ v_\varepsilon^{(N)}(0) = \alpha + O(\varepsilon^{(N+1)/2}), v_\varepsilon^{(N)}(1) = \beta + O(\varepsilon^{(N+1)/2}). \end{cases} \quad (20)$$

定理 在条件 (2) 下, 边值问题 (1) 当 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时存在 N 阶渐近解 (19), 和成立估计式

$$u_\varepsilon^{(N)}(x) - KR(x) \varepsilon^{(N+1)/2} \leq u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon^{(N)}(x) + KR(x) \varepsilon^{(N+1)/2}, \quad (21)$$

$$v_\varepsilon^{(N)}(x) - KS(x) \varepsilon^{(N+1)/2} \leq v_\varepsilon(x) \leq v_\varepsilon^{(N)}(x) + KS(x) \varepsilon^{(N+1)/2}, \quad (22)$$

其中 K 是适当大的正数; $R(x) \geq 0, S(x) \geq 0$ 和满足下面关系式的函数

$$R'' + S \leq \delta < 0, S'' \geq \delta > 0, 0 < x < 1, \quad (23)$$

δ 是某常数, 例如可取 $R = e^{-x^2/8}, S = (1+x)e^{-x^2/8}/16$ 。

证 作函数

$$\alpha_1 = u_\varepsilon^{(N)} - KR\varepsilon^{(N+1)/2}, \quad \beta_1 = u_\varepsilon^{(N)} + KR\varepsilon^{(N+1)/2},$$

$$\alpha_2 = v_\varepsilon^{(N)} - KS\varepsilon^{(N+1)/2}, \quad \beta_2 = v_\varepsilon^{(N)} + KS\varepsilon^{(N+1)/2},$$

显然成立

$$\alpha_1 \leq \beta_1, \quad \alpha_1(0) \leq 0 \leq \beta_1(0), \quad \alpha_1(1) \leq 0 \leq \beta_1(1),$$

$$\alpha_2 \leq \beta_2, \quad \alpha_2(0) \leq 0 \leq \beta_2(0), \quad \alpha_2(1) \leq 0 \leq \beta_2(1).$$

又当 $0 < x < 1$ 时

$$\alpha_1'' = (u_\varepsilon^{(N)})'' - KR''\varepsilon^{(N+1)/2} = v_\varepsilon^{(N)} + O(\varepsilon^{(N+1)/2}) - KR''\varepsilon^{(N+1)/2} = \\ \beta_2 - K(R'' + S)\varepsilon^{(N+1)/2} + O(\varepsilon^{(N+1)/2}) \geq \beta_2.$$

类似地有 $\beta_1'' \leq \alpha_2$ 。

又对于 α_1 和 β_1 间的任意函数 $u(x): \alpha_1 \leq u(x) \leq \beta_1, 0 < x < 1$ 成立

$$\alpha_2'' + f(x, u)\alpha_2' = \varepsilon[(v_\varepsilon^{(N)})'' - KS''\varepsilon^{(N+1)/2}] + f(x, u_\varepsilon^{(N)} + \mu(x)KR\varepsilon^{(N+1)/2}) \times \\ \left[(v_\varepsilon^{(N)})' - KS'\varepsilon^{(N+1)/2} \right] = O(\varepsilon^{(N+1)/2}) - f(x, u_\varepsilon^{(N)})KS'\varepsilon^{(N+1)/2} + \\ f_u(x, u_\varepsilon^{(N)} + \mu(x)KR\varepsilon^{(N+1)/2})[(v_\varepsilon^{(N)})' - KS'\varepsilon^{(N+1)/2}] \mu(x)KR\varepsilon^{(N+1)/2},$$

其中 $0 < \theta < 1, -1 \leq \mu(x) \leq 1$ 。因 $-f(x, u_\varepsilon^N) = -f(x, u_0) + O(\varepsilon^{1/2})$, 而 $-f(x, u_0) = f_u(x, \theta_1, u_0)u_0 \geq \delta\alpha(1-x)/2 > 0, 0 < \theta_1 < 1$, 又 $V_0((1-x)/\varepsilon^{1/2}, x) \rightarrow 0$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。所以

$$\alpha_2'' + f(x, u)\alpha_2' > 0, 0 < x < 1.$$

类似地有

$$\mathfrak{B}_2'' + f(x, u) \beta_2' < 0, \quad 0 < x < 1 \cdot$$

所以 α_1, β_1 和 α_2, β_2 分别是边值问题(1)的解的下界和上界(见文[5]或文[6])。定理证毕。

关于 $\alpha < 0, \beta < 0$, 和 $\alpha < 0, \beta > 0$, 以及 $\alpha > 0, \beta < 0$ 的其它情形, 只要成立条件(2), 则可以应用文[4]中相应的计算步骤, 导出相应的结果。

4 实例分析

考虑例子

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' = v_\varepsilon, & \mathfrak{B}_\varepsilon'' + (1+x)u_\varepsilon v_\varepsilon' = 0 \quad (0 < x < 1, 0 < \varepsilon \ll 1), \\ u_\varepsilon(0) = 0, & u_\varepsilon(1) = 0, \\ v_\varepsilon(0) = \alpha, & v_\varepsilon(1) = \beta. \end{cases}$$

我们考虑以下两种情形:

情形 1 $\alpha = 1, \beta = 2$

由前面的分析我们知道边界层出现在 $x = 1$ 处, 令解的复合展开式是

$$\begin{cases} u_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} u_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} U_n(\xi, x), \\ v_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} v_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} V_n(\xi, x), \end{cases}$$

其中 $\xi = (1-x)/\varepsilon^{1/2}$ 。遵循前面的计算步骤, 在计算机上我们得到 $u_n(n = 0, 1, 2, 3), v_n(n = 0, 1, 2, 3), U_n(n = 0, 1, 2, 3, 4, 5), V_n(n = 0, 1, 2, 3)$ 的表达式, 由于篇幅的原因, 这里我只列出如下表达式:

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{1}{2}x(1-x), \quad v_0 = 1, \quad u_1 = v_1 = v_2 = U_0 = U_1 = 0, \quad u_2 = -\frac{1}{2}x, \\ V_0 &= 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}\xi\right], \\ U_2 &= \frac{1 - \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}\xi\right]}{x(1+x)} - \frac{\xi \exp[-1/4(1+x)\xi^2]}{\sqrt{\pi}(1+x)} + \\ &\quad \frac{1}{2}\xi^2\left[1 - \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}\xi\right]\right], \\ V_1 &= \frac{8\sqrt{2}\left[-1 + \operatorname{erf}\left[\frac{\xi}{\sqrt{2}}\sqrt{x(1-x)}\right]\right]}{3\sqrt{\pi}(1+x)x^{3/2}} + \frac{4\xi \exp[-x(1+x)\xi^2/2]}{\sqrt{\pi}} + \\ &\quad \frac{\exp[-x(1+x)\xi^2/2]}{\pi^2 x(1+x)^2} \left\{ \sqrt{x(1+x)}(-28 + 30x - x\xi^2) + \right. \\ &\quad \left. x^{5/2}\sqrt{1+x}(12 - \xi^2)2\sqrt{x(1+x)}^{3/2}(2 + x\xi^2 + x^2\xi) \operatorname{erf}\left[\sqrt{x(1+x)}\xi/2\right] \right\}. \end{aligned}$$

在(19)式中令 N 分别为 0, 1, 2, $H(x)$ 在这里可选择为

$$H(x) = (1 + \operatorname{sign}[x - 1/2])[(1 - \operatorname{sign}[x - 3/4])(x - 3/4) + 1/2],$$

其中 $\operatorname{sign}[t]$ 是符号函数。用 Mathematic 软件中的作图函数, 得出渐近解的曲线图(图 1~ 图 4)。

从图 1~ 图 4 可以看出, 当 ε 充分小时各阶渐近解的图形基本重合, 从而其首项是原问题足够近似的解。

情形 2 $\alpha = 1, \beta = -2$

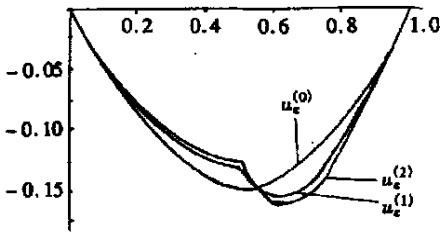


图 1 $u_\epsilon^{(N)} (N = 0, 1, 2)$ 的
曲线图 ($\epsilon = 0.01$)

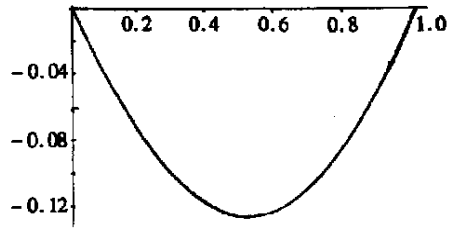


图 2 $u_\epsilon^{(N)} (N = 0, 1, 2)$ 的
曲线图 ($\epsilon = 0.001$)

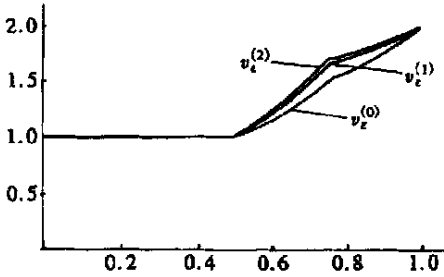


图 3 $v_\epsilon^{(N)} (N = 0, 1, 2)$ 的
曲线图 ($\epsilon = 0.01$)

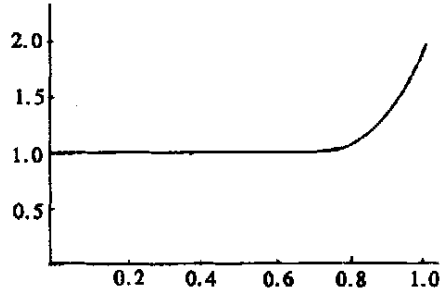


图 4 $v_\epsilon^{(N)} (N = 0, 1, 2)$ 的
曲线图 ($\epsilon = 0.001$)

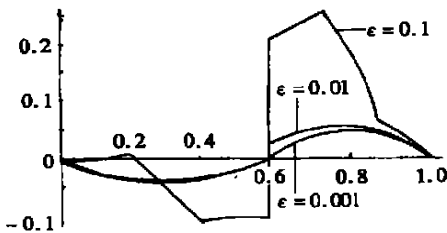


图 5 不同 ϵ 值的 $u_\epsilon^{(0)}$ 的曲线图

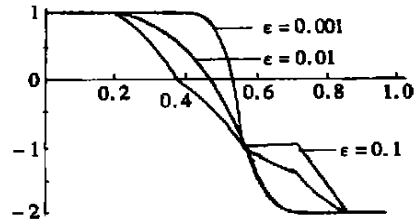


图 6 不同 ϵ 值的 $v_\epsilon^{(0)}$ 的曲线图

此时在内点 $x_0 = \sqrt[3]{2} \sqrt{\sqrt[3]{2} + 1}$ 处出现内层 (见文献 [5]), 我们可以看到

$$u_\epsilon^0 = \begin{cases} -0.5x(x_0 - x) & (0 \leq x \leq x_0), \\ (1-x)(x - x_0) & (x_0 \leq x \leq x_1), \\ 1 - H^L(x) \frac{2x}{x_0} \left[\operatorname{erf} \left[\frac{1}{2}x(1+x)(x_0 - x) / \epsilon^{1/2} - 1 \right] \right] & (0 \leq x \leq x_0), \\ -2 + H^R(x) \frac{x}{x_0} \left[\operatorname{erf} \left[\frac{1}{2}x(1+x)(x_0 - x) / \epsilon^{1/2} - 1 \right] \right] & (x_0 \leq x \leq x_1). \end{cases}$$

其中

$$H^L(x) = \frac{3}{4x_0} \left[1 + \operatorname{sign} \left[x - \frac{x_0}{3} \right] \right] \left[\left[1 - \operatorname{sign} \left[x - \frac{2x_0}{3} \right] \right] \left(x - \frac{2x_0}{3} \right) + \frac{2x_0}{3} \right],$$

$$H^R(x) = \frac{3}{4(1-x_0)} \left[1 + \operatorname{sign} \left[\frac{2+x_0}{3} - x \right] \right] \times$$

$$\left[\left[1 - \operatorname{sign} \left[\frac{1+2x_0}{3} - x \right] \right] \left(\frac{1+2x_0}{3} - x \right) + \frac{2(1-x_0)}{3} \right] \cdot$$

作出(图 5~ 图 6), 从图 5~ 图 6 可以看出: 当 ε 充分小时, 曲线图形变得很光滑, 从而, 对于小的 ε 值, 渐近解的首项就是原问题足够近似的解。

[参 考 文 献]

- [1] 江福汝. 关于边界层方法[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(5): 461—474.
- [2] JIANG Fu_ru. On singular perturbations of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations[J]. Scientia Sinica, Ser A, 1987, 30(3): 558—560.
- [3] JIANG Fu_ru. Asymptotic solution of boundary value problem for semilinear ordinary differential equations with turning points[J]. Computational Fluid Dynamics Journal (Japan), 2(4): 471—484.
- [4] 江福汝. 关于一类非线性微分方程组的边值问题的渐近解(I)[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(3): 239—249.
- [5] Howes F A, Shao S. Asymptotic analysis of model problems for a coupled system[J]. Nonlinear Anal, 1989, 13(9): 1013—1024.
- [6] Dorr F W, Parter S V. Singular perturbation of nonlinear boundary value problems with turning points [J]. J Math Anal Appl, 1970, 29: 273—293.

Computer Computation of the Method of Multiple Scales —Dirichlet Problem for a Class of System of Nonlinear Differential Equations

XIE La_bing, JIANG Fu_ru

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai 200072, R. R. China)

Abstract: The method of boundary layer with multiple scales and computer algebra were applied to study the asymptotic behavior of solution of boundary value problems for a class of system of nonlinear differential equations. The asymptotic expansions of solution were constructed. The remainders were estimated. And an example was analysed. It provides a new foreground for the application of the method of boundary layer with multiple scales.

Key words: system of nonlinear differential equation; boundary value problem; method of boundary layer with multiple scale; computer algebra; asymptotic solution