应用数学和力学, 第 24 卷 第 11 期(2003 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1108_06

重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅴ)——极性热力连续统*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 在对传统的微极热弹性理论和热压电弹性理论已进行过再研究的基础上重建极性热力连续统的较为完整的基本均衡方程和边界条件• 从较为完整的虚功率原理推导出微极热弹性理论的运动方程和局部能率均衡方程• 从较为完整的 Hamilton 原理通过全变分自然地推导出运动方程,熵均衡方程以及所有边界条件• 给出的新的动量均衡方程和局部能率均衡方程与现有理论的结果存在本质的差异• 通过过渡和归结可从微极热弹性理论分别得到微态热弹性理论的和偶应力热弹性动力学的结果• 最后,按照上述思路直接给出微极热压电弹性理论的结果•

关 键 词: 极性; 热弹性理论; 热压电弹性理论; 基本方程; 边界条件
中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

本文是我们的前期工作[1, 2, 3, 4]的直接延续•

我们曾在文献[1, 2]中对 Nowacki[5]建立起的微极连续统的耦合场理论进行了再研究,提出了更为普遍的微极热弹性理论,微极热压电弹性理论和微极电磁热弹性理论的虚功原理和 Hamilton 原理,并由此自然地推导出所有的局部均衡方程和边界条件• 然而这里并不像 Nowacki 那样需要预先采用线性本构关系和只给出部分边界条件•

最近我们已在文献[3, 4]中提出了极性(包括微态、微极和偶应力)连续统理论的较为完整的基本定律和均衡方程体系• 在这样体系中,各种极性连续统理论都具有各自形式的均衡方程形式,这在理论上应该说是合理的•

本文的目的就是要对我们的前期工作[1, 2]按照新的概念加以扩充,从而重建极性热力连续统的较为完整的基本均衡方程和边界条件• 从耦合型的虚功率原理出发,推导出运动方程和局部能率均衡方程• 通过耦合型的 Hamilton 原理,并进行全变分即可推导出相关的局部均衡方程和全部边界条件• 通过过渡和归结过程即可从微极热弹性理论的结果分别得到微态热

* 收稿日期: 2002_07_03; 修订日期: 2003_06_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024); 辽宁省教育委员会基础研究基金项目(990111001)
作者简介: 戴天民(1931—) , 男, 满族, 辽宁开原人, 教授, 博士, 已发表专著译著 12 部和论文 60 余篇(E_mail: tianmin_dai@ yahoo. com. cn)•

弹性理论的和偶应力热弹性动力学的结果• 通过比较, 我们可以清晰地看出现有的各种理论结果的不完整性和层次• 按照上述思路也可推导出微极热压电弹性理论的结果•

为比较和方便起见, 除另作说明外, 本文将沿用专著[5]和文献[1,2]的符号和记法• 有关极性连续统理论的参考文献, 不胜枚举, 可参阅 Nowacki 的专著[5]和 Eringen 的专著[6,7], 这里为节省篇幅, 不另列出

1 微极热弹性理论

1.1 较为完整的虚功率原理

现公设耦合型的势能率型虚功率原理如下:

$$\int_V [(X_i - \rho\ddot{u}_i^*)\delta\dot{u}_i^* + (Y_i - J\ddot{\varphi}_i)\delta\dot{\varphi}_i]\mathrm{d}V + \int_A (p_i\delta\dot{u}_i^* + m_i\delta\dot{\varphi}_i)\mathrm{d}A = \int_V \delta\dot{W}^{(p)}\mathrm{d}V, \tag{1}$$

这里 $\dot{W}^{(p)}$ 为势能率, 而

$$\dot{u}_i^* = \dot{u}_i + \varepsilon_{ijk}\dot{\varphi}_j x_k. \tag{2}$$

再公设耦合型的余能率型虚功率原理如下:

$$\int_V [\dot{u}_i^*\delta(X_i - \rho\ddot{u}_i^*) + \dot{\varphi}_i\delta(Y_i - J\ddot{\varphi}_i)]\mathrm{d}V + \int_A (\dot{u}_i^*\delta p_i + \dot{\varphi}_i\delta m_i)\mathrm{d}A = \int_V \delta\dot{W}^{(c)}\mathrm{d}V, \tag{3}$$

这里 $\dot{W}^{(c)}$ 为余能率•

式(1)可以改写成下列形式:

$$\int_V [(X_i - \rho\ddot{u}_i^*)\delta\dot{u}_i + (Y_i + \varepsilon_{ijk}x_jX_k - J\ddot{\varphi}_i - \varepsilon_{ijk}x_j\rho\ddot{u}_k^*)\delta\dot{\varphi}_i]\mathrm{d}V + \int_A [p_i\delta\dot{u}_i + (m_i + \varepsilon_{ijk}x_jp_k)\delta\dot{\varphi}_i]\mathrm{d}A = \int_V \delta\dot{W}^{(p)}\mathrm{d}V. \tag{4}$$

若在式(4)中把 $\ddot{u}_i^*$ 用 $\ddot{u}_i$ 代替, 则有

$$\int_V [(X_i - \rho\ddot{u}_i)\delta\dot{u}_i + (Y_i + \varepsilon_{ijk}x_jX_k - J\ddot{\varphi}_i - \varepsilon_{ijk}x_j\rho\ddot{u}_i)\delta\dot{\varphi}_i]\mathrm{d}V + \int_A [p_i\delta\dot{u}_i + (m_i + \varepsilon_{ijk}x_jp_k)\delta\dot{\varphi}_i]\mathrm{d}A = \int_V \delta\dot{W}^{(p)}\mathrm{d}V. \tag{5}$$

再在式(5)中把 $\delta\dot{u}_i$, $\delta\dot{\varphi}_i$ 和 $\delta\dot{W}^{(p)}$ 分别用 δu_i, $\delta\varphi_i$ 和 $\delta W^{(i)}$ 代替, 即得我们在[1]中给出的半耦合的势能型虚功原理•

若再在式(5)中略去各耦合项, 则可写出非耦合的势能型虚功原理如下:

$$\int_V [(X_i - \rho\ddot{u}_i)\delta\dot{u}_i + (Y_i - J\ddot{\varphi}_i)\delta\dot{\varphi}_i]\mathrm{d}V + \int_A (p_i\delta u_i + m_i\delta\varphi_i)\mathrm{d}A = \int_V \delta W^{(i)}\mathrm{d}V. \tag{6}$$

这便是 Nowacki 的专著[5]中第 211 页的式(1)•

把式(1)和式(3)相加, 并加以整理后则得下列较为完整的功率能率原理:

$$\int_V \dot{W}\,\mathrm{d}V = \int_V [(X_i - \rho\ddot{u}_i^*) + \sigma_{ji,j}]\dot{u}_i\mathrm{d}V +$$

$$\int_V\Big\{\big[(Y_i-J\ddot{\varphi}_i)+\mu_{ij,j}+\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}\big]+\varepsilon_{ijk}x_j\big[(X_k-\rho\ddot{u}_k^*)+\sigma_{mk,m}\big]\Big\}\dot{\varphi}_i\,\mathrm{d}V+$$
$$\int_V(t_{ji}\dot{u}^*_{i,j}+\mu_{ji}\dot{\varphi}_{i,j})\,\mathrm{d}V, \tag{7}$$

其中 $\dot{W}=\dot{W}^{(p)}+\dot{W}^{(c)}$ 为应变能率, 根据 Stojanovic[8] 和戴[9] 提出的广义 Piola 定理可得运动方程和机械能率均衡方程如下:

$$X_i-\rho\ddot{u}_i^*+\sigma_{ji,j}=0, \tag{8}$$
$$Y_i-J\ddot{\varphi}_i+\mu_{ij,j}+\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}=0, \tag{9}$$
$$\dot{W}=t_{ji}\dot{u}^*_{i,j}+\mu_{ji}\dot{\varphi}_{i,j}\cdot \tag{10}$$

总能率 $\rho\dot{\varepsilon}$ 应当包括机械能率和热能率, 即局部能率均衡方程应为

$$\rho\dot{\varepsilon}=t_{ji}\dot{u}^*_{i,j}+\mu_{ji}\dot{\varphi}_{i,j}+\rho h-q_{i,i}\cdot \tag{11}$$

1.2 Hamilton 原理

我们在[1]中从虚功角度建立起半耦合型的 Hamilton 原理, 并由此通过全变分推导出微极热弹性理论的运动方程和熵均衡方程以及所有边界条件·

我们现从虚功率角度建立耦合型的 Hamilton 原理, 并由此通过全变分推导出微极热弹性动力学的较为完整的运动方程和熵均衡方程以及所有边界条件· 这里, 除了像[1]那样考虑由于动量、面力和体力所引起的附加动量矩、面力矩和体力矩外, 还要考虑由于微转动速度所引起的附加速度·

为此, 我们采取下列新的动能表达式:

$$\underline{K}^*=\int_V\frac{1}{2}(\rho\dot{u}_i^*\dot{u}_i^*+J\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_i)\,\mathrm{d}V, \tag{12}$$

于是

$$\dot{\underline{K}}^*=\int_V(\rho\ddot{u}_i^*\dot{u}_i^*+J\ddot{\varphi}_i\dot{\varphi}_i)\,\mathrm{d}V=\int_V\big[\rho\ddot{u}_i^*\dot{u}_i+(J\ddot{\varphi}_i)^*\dot{\varphi}_i\big]\,\mathrm{d}V=$$
$$\int_V\big[\rho\ddot{u}_i^*\dot{u}_i+(J\ddot{\varphi}_i+\varepsilon_{ijk}x_j\rho\ddot{u}_k^*)\dot{\varphi}_i\big]\,\mathrm{d}V, \tag{13}$$

现公设下列两个泛函:

$$\underline{\Pi}^*=\int_V(F+ST+X_i\dot{u}_i^*+Y_i\dot{\varphi}_i)\,\mathrm{d}V+$$
$$\int_A\big[(\bar{p}_i\dot{u}_i^*+\bar{m}_i\dot{\varphi}_i)+(p_i\dot{\bar{u}}_i^*+m_i\dot{\bar{\varphi}}_i)\big]\,\mathrm{d}A, \tag{14}$$

$$\Psi^*=\int_V(\Gamma-\dot{S}T-W)T\,\mathrm{d}V+(T\bar{Q}_i+\bar{T}Q_i)n_i\,\mathrm{d}A, \tag{15}$$

其中 F, S, $\bar{p}_i$, $\bar{m}_i$, $\dot{\bar{u}}_i^*$ 和 $\dot{\bar{\varphi}}_i$ 分别为自由能, 熵, 在边界上给定面力, 面力矩, 速度和微转动速度, 而且 $\Gamma=-Q_iT_{,i}$·

微极热弹性理论的 Hamilton 原理为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\dot{\underline{K}}^*-\underline{\Pi}^*)\,\mathrm{d}t=0, \tag{16}$$

和

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Psi^*\,\mathrm{d}t=0\cdot \tag{17}$$

对式(16)取全变分并加以整理后, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\Big[\int_V\{(\rho\ddot{u}_i^* - X_i - \sigma_{ji,j})\delta\dot{u}_i + [\varepsilon_{ijk}x_j(\rho\ddot{u}_k^* - X_k - \sigma_{lk,l}) + (J\ddot{\varphi}_i - Y_i - \mu_{ji,j} - \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk})]\delta\dot{\varphi}_i\}\mathrm{d}V + \int_V\{\dot{u}_i\delta(\rho\ddot{u}_i^* - X_i - \sigma_{ji,j}) + \dot{\varphi}_i[\varepsilon_{ijk}x_j\delta(\rho\ddot{u}_k^* - X_k - \sigma_{lk,l}) + \delta(J\ddot{\varphi}_i - Y_i - \mu_{ji,j} - \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk})]\}\mathrm{d}V + \int_A[(\sigma_{ji}n_j - \bar{p})_i\delta\dot{u}_i^* + (\mu_{ji}n_j - \bar{m}_i)\delta\dot{\varphi}_i + (\dot{u}_i^* - \dot{\bar{u}}_i^*)\delta p_i + (\dot{\varphi}_i - \dot{\bar{\varphi}}_i)\delta m_i]\,\mathrm{d}A\Big] = 0. \tag{18}$$

由上式可得

1) 运动方程

$$\rho\ddot{u}_i^* - X_i - \sigma_{ji,j} = 0, \tag{19}$$

$$J\ddot{\varphi}_i - Y_i - \mu_{ji,j} - \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0; \tag{20}$$

2) 应力和偶应力边界条件

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{p}_i, \qquad \mu_{ji}n_j = \bar{m}_i; \tag{21}$$

3) 速度和微转动速度边界条件

$$\dot{u}_i^* = \dot{\bar{u}}_i^*, \qquad \dot{\varphi}_i = \dot{\bar{\varphi}}_i. \tag{22}$$

现再对式(17)取全变分并加以整理后, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\Big\{\int_V[(Q_{i,i} - W - \dot{S}T)\delta T + T\delta(Q_{i,i} - W - \dot{S}T)]\mathrm{d}V - \int_A[(\bar{Q}_i - Q_i)n_i\delta T + (\bar{T} - T)n_i\delta Q_i]\,\mathrm{d}A\Big\} = 0. \tag{23}$$

由上式可得:

4) 熵均衡方程

$$\dot{S}T = -Q_{i,i} + W; \tag{24}$$

5) 热量边界条件

$$Q_i = \bar{Q}_i; \tag{25}$$

6) 温度边界条件

$$T = \bar{T}. \tag{26}$$

2　微态热弹性理论

像[4]那样, 我们可以从前述微极热力连续统的结果通过过渡直接给出微态热弹性理论的基本方程和所有边界条件.

3　偶应力热弹性动力学

像[4]那样, 我们可以从前述微极热力连续统的结果通过归结直接给出偶应力热弹性动力学的基本方程和所有边界条件.

4　微极热压电弹性理论

按照本文的思路, 我们可以把[2]的结果推广, 从而推导出微极热压电弹性理论的较为完

整的基本方程和所有边界条件• 为节省篇幅,我们略去推导过程,直接给出最后结果•

1) 运动方程

$$\sigma_{ji,j} + X_i - \rho \ddot{u}_i^* = 0, \tag{27}$$

$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J_{ji}\ddot{\varphi}_j = 0; \tag{28}$$

2) 局部能率均衡方程

$$\dot{U} = \sigma_{ji}\dot{u}_{i,j}^* + \mu_{ji}\dot{\varphi}_{i,j} - q_{i,i} + W + \dot{E}D, \tag{29}$$

这里 $\dot{u}_{i,j}^* = \dot{u}_{i,j} + \varepsilon_{jil}\dot{\varphi}_l + \varepsilon_{ilk}x_k\dot{\varphi}_{l,j}$;

3) 熵均衡方程

$$T\dot{S} = -q_{i,i} + W; \tag{30}$$

4) 电磁场方程

$$D_{i,i} = 0; \tag{31}$$

5) 边界条件

$$\bar{p}_i = \sigma_{ji}n_j, \qquad \bar{m}_i = \mu_{ji}n_j; \tag{32}$$

$$\dot{\bar{u}}_i = \dot{u}_i, \qquad \dot{\bar{\varphi}} = \dot{\varphi}_i; \tag{33}$$

$$\bar{\sigma} = 0, \qquad \bar{\phi} = 0; \tag{34}$$

$$\bar{Q}_i = Q_i, \qquad \bar{T} = T• \tag{35}$$

如果把式(27)中的 $\ddot{u}_i^*$ 用 $\ddot{u}_i$ 代替和把式(29)中的 $\dot{u}_{i,j}^*$ 用 $(\dot{u}_{i,j} + \varepsilon_{ilk}x_k\dot{\varphi}_{l,j})$ 代替后连同其均衡方程和边界条件一起就归结为我们在[2]中给出的结果•

如果把式(27)中 $\ddot{u}_i^*$ 用 $\ddot{u}_i$ 代替和把式(29)中的 $\dot{u}_{i,j}^*$ 用预先引入的线性应变率 $(\dot{u}_{i,j} - \varepsilon_{jil}\dot{\varphi}_l)$ 代替后连同其它均衡方程和边界条件一起就归结为 Nowacki 在专著[5]中给出的结果•

5 结 束 语

本文给出的极性热连续统理论和微极热压电弹性理论的结果与我们在[3,4]中按公设基本公理的思路给出的结果是相互一致的和相互适应的•

按照Nowacki[5]的思路和本文中的处理方法还可对我们在[2]中给出的半耦合型结果加以改进,使之成为较为完整的微极电磁热弹性理论的基本方程和边界条件•

[参 考 文 献]

[1] 戴天民. 微极连续统的耦合场理论的再研究(Ⅰ)——微极热弹性理论[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(2): 111—118.

[2] 戴天民. 微极连续统的耦合场理论的再研究(Ⅱ)——微极热压电弹性理论和电磁热弹性理论[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(3): 229—238.

[3] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅰ)——微极连续统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 991—997.

[4] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅱ)——微态连续统理论和偶应力理论[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 998—1014.

[5] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity [M]. Oxford: Pergamon Press, 1986.

[6] Eringen A C, Kafadar C B. 微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982.

[7] Eringen A C. Microcontinuum Field Theories [M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

[8] Stojanovic R. On the principle of virtual work in the theory of oriented elastic media [J]. Z Angew Math Mech, 1973, **53**: 79—82.
[9] 戴天民. 广义连续统场论中新的功能及功率能率原理[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1111—1118.

Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories (Ⅴ)—Polar Thermomechanical Continua

DAI Tian_min
(Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P. R. China)

Abstract: The purpose is to reestablish rather complete basic balance equations and boundary conditions for polar thermomechanical continua based on the restudy of the traditional theories of micropolar thermoelasticity and thermopiezoelectricity. The equations of motion and the local balance equation of energy rate for micropolar thermoelasticity are derived from the rather complete principle of virtual power. The equations of motion, the balance equation of entropy and all boundary conditions are derived from the rather complete Hamilton principle. The new balance equations of momentum and energy rate which are essentially different from the existing results are presented. The corresponding results of micromorphic thermoelasticity and couple stress elastodynamics may be naturally obtained by the transition and the reduction from the micropolar case, respectively. Finally, the results of micropolar thermopiezoelectricity are directly given.

Key words: polar; thermoelasticity; thermopiezoelectricity; basic balance equation; boundary condition