

文章编号: 1000-0887(2003) 12-1301-08

# 三维弹塑性结构下限分析的边界元方法<sup>\*</sup>

刘应华, 张晓峰, 岑章志

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(我刊原编委杨桂通推荐)

**摘要:** 基于极限分析的下限定理, 建立了用常规边界元方法进行三维理想弹塑性结构极限分析的求解算法。下限分析所需的弹性应力场可直接由边界元方法求得。所需的自平衡应力场由一组带有待定系数的自平衡应力场基矢量的线性组合进行模拟, 这些自平衡应力场基矢量由边界元弹塑性迭代计算得到。下限分析问题最终被归结为一系列未知变量较少的非线性数学规划子问题并通过复合形法进行求解。给出的计算结果表明该算法有较高的精度和计算效率。

**关键词:** 边界元法; 下限分析; 自平衡应力场; 非线性规划; 复合形法

**中图分类号:** O344.5      **文献标识码:** A

## 引 言

结构极限分析是塑性力学中最有实用意义的分支之一, 对于确定结构的承载能力和金属塑性成形等问题都具有重要的应用背景。进行结构极限分析的宗旨在于为工程设计和安全评估提供可靠的理论依据。

作为弹塑性问题求解的简化方法, 极限分析不需要事先知道载荷变化的历史, 可以避免耗时的弹塑性增量计算而直接求解极限载荷, 理论上适用于对工程结构的极限承载能力进行求解。目前通常采用的进行极限分析的数值计算方法是有限元方法。但是, 在采用有限元方法进行实际的数值计算时也面临很大的困难。由于结构极限下限分析的数学规划格式含有多个变量和约束, 且一般来说为非线性, 求解的规模往往很大, 这就是所谓的维数障碍。如何找到一种较好的求解算法来克服维数障碍问题, 同时又能保证计算结果有较高的精度, 是极限分析方法能否真正应用于工程实际问题的关键所在。目前很多研究都围绕着发展极限分析方法而展开, 其中大量的工作就是为了克服维数障碍问题<sup>[1]</sup>。

用边界元方法进行极限和安定分析, 早在 1983 年就由 Maier<sup>[2]</sup> 等提出了采用常规边界元进行极限和安定分析的方案, 指出了应用这种方法的可行性。但由于没有克服数值计算上的困难, 上述方案并未给出具体的计算方法和有关的计算结果。边界元方法, 由于采用解析积分方案使该方法有很好的计算精度。特别是由内点应力积分公式直接得到的应力比有限元方法由位移近似值计算得到的应力有更高的精度, 适合于构造虚拟弹性应力场和自平衡应力场, 同时由于边界元方法本身的降维作用, 可以大大减少未知量的个数, 所以采用边界元方法进行极

\* 收稿日期: 2001-11-02; 修订日期: 2003-08-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19902007); 全国优秀博士论文基金资助项目(200025)

作者简介: 刘应华(1968—), 男, 湖北潜江人, 教授(E-mail: yhliu@mail.tsinghua.edu.cn)。

限下限分析是很有利的。本文基于极限下限分析定理,采用常规边界元方法对三维结构进行离散,虚拟弹性应力场直接由边界元方法计算得到。在构造自平衡应力场时采用减缩基技术,将自平衡应力场用一组自平衡应力场的基矢量通过线性组合进行模拟。而这些基矢量由边界元的弹塑性增量方法计算得出。极限分析问题最终被归结为一系列未知变量较少的非线性规划问题并利用复合形法进行求解。

## 1 三维弹塑性边界元方法的基本理论

弹塑性问题的边界元方法首先由 Swedlow 和 Cruse<sup>[3]</sup>在 70 年代初提出,在此基础上,近年来许多学者做了大量的工作<sup>[4-6]</sup>,目前已经成为较为成熟的方法。

由 Betti 互易原理出发并采用 Kelvin 解作为基本解,我们可以得到三维弹塑性问题的增量形式的边界积分方程:

$$C_{ij} u_j^s = \int_{\Gamma} U_{ij}^s t_j^s d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^s u_j^s d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^s b_j^s d\Omega \quad (1)$$

对于弹塑性问题,我们可以将塑性应变考虑为初始应变并考虑其不可压缩性,使其相应的塑性项以伪体力和伪面力的形式出现,就可以用三维弹性问题的基本解作为弹塑性问题的基本解,相应的三维弹塑性问题的边界积分方程为:

$$C_{ij} u_j^s = \int_{\Gamma} U_{ij}^s t_j^s d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^s u_j^s d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^s b_j^s d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^p \alpha_{jk}^p d\Omega \quad (2)$$

式(1)和式(2)中带 s 上标的量为基本解的各相应量(Kelvin 解),  $C_{ij}$  则为与边界几何特性有关的系数,对于光滑边界处有  $C_{ij} = \delta_{ij}/2$ 。

内点位移的积分方程为:

$$u_i^s = \int_{\Gamma} U_{ij}^s t_j^s d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^s u_j^s d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^s b_j^s d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^p \alpha_{jk}^p d\Omega \quad (3)$$

将上式对奇点坐标求导,然后通过对有强烈奇异性的被积函数作特殊处理,我们可以得到内点弹性应力的积分公式:

$$\sigma_{ij}^E = \int_{\Gamma} (-\sigma_{kij}^s) t_k^s d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{kij}^s u_k^s d\Gamma + \int_{\Omega} (-\sigma_{kij}^s) b_k^s d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^p \alpha_{kl}^p d\Omega + \frac{8-10\nu}{15(1-\nu)} \alpha_{ij}^p \quad (4)$$

在式(3)和式(4)中  $U_{ij}^s, T_{ij}^s, \varepsilon_{ijk}^s, \sigma_{kij}^s, T_{kij}^s, \varepsilon_{ijkl}^s$  为基本解的各相应量。

分别用边界单元和内部三维体元对边界和内部塑性区离散化,式(2)和式(4)的离散化方程的矩阵形式可以写为(不考虑体力):

$$H u^p = G x^p + Q \sigma^p, \quad \sigma^E = G' x^p - H' u^p + (Q' + E') \sigma^p \quad (5a, b)$$

根据边界条件,将已知边界量和未知边界量分开,式(5a, b)经过重新排列后可得:

$$A x^p = f^p + Q \sigma^p, \quad \sigma^E = -A' x^p + f^p' + (Q' + E') \sigma^p \quad (6a, b)$$

求解式(6a)并代入式(6b),可得:

$$x^p = A^{-1} Q \sigma^p + A^{-1} f^p = R \sigma^p + m^p \quad (7a)$$

$$\sigma^E = (Q' + E' - A' A^{-1} Q) \sigma^p + (f^p' - A' A^{-1} f^p) = S \sigma^p + n^p \quad (7b)$$

在(7a, b)两式中,  $m^p, n^p$  为相应的弹性解,另一项则为由于域内出现塑性变形所产生的影响。利用(7a, b)式,就可以采用增量法求解三维弹塑性问题,其增量关系可写为:

$$\Delta x = R \Delta \sigma^p + \Delta m, \quad \Delta \sigma^E = S \Delta \sigma^p + \Delta n \quad (8a, b)$$

根据内点的弹性应力增量和塑性应力增量, 我们可以得到内点的实际应力增量:

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma^E - \Delta \sigma^P = (S - I) \Delta \sigma^P + \Delta n \cdot \quad (9)$$

## 2 极限分析的下限定理

极限分析的下限定理<sup>[7]</sup>可以叙述为:“一个满足平衡条件并且到处都不破坏材料屈服条件的应力场, 是一个静力容许应力场; 跟静力容许应力场对应的外载荷是极限载荷的下限; 最高的下限就是极限载荷。”其数学表达格式为:

$$\beta^s = \max \beta, \quad (10a)$$

$$\text{s.t. } \varphi[\beta \sigma_{ij}^E(x) + \rho_{ij}(x)] \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (10b)$$

$$\rho_{i,j} = 0, \quad \forall x \in \Omega; \quad \rho_{ij} n_j = 0, \quad \forall x \in \Gamma_P, \quad (10c, d)$$

其中目标函数  $\beta$  为待求极限载荷乘子,  $\sigma_{ij}^E(x)$  为给定基准载荷作用下的虚拟弹性应力场,  $\rho_{ij}(x)$  为可调的自平衡应力场,  $\varphi[\cdot]$  为屈服函数。约束条件(10b) 式为屈服条件, (10c) 式与(10d) 式为自平衡应力场在域  $\Omega$  内和力边界  $\Gamma_P$  上所必须满足的齐次条件。

## 3 平衡应力场的构造

由式(10b)可见, 平衡应力场由虚拟弹性应力场和自平衡应力场两部分构成, 基准载荷作用下虚拟弹性应力场  $\sigma_{ij}^E(x)$  由三维边界元方法直接求出。基于减缩基技术, 自平衡应力场  $\rho_{ij}(x)$  可以由带有  $R$  个待定常数  $C_1, C_2, \dots, C_R$  的一组自平衡应力场基矢量  $\rho_{ij}^1(x), \rho_{ij}^2(x), \dots, \rho_{ij}^R(x)$  的线性组合进行模拟<sup>[8]</sup>。整个平衡应力场可以表示为:

$$\sigma_{ij}(x) = \beta \sigma_{ij}^E(x) + C_1 \rho_{ij}^1(x) + \dots + C_R \rho_{ij}^R(x), \quad (11)$$

其中自平衡应力场基矢量  $\rho_{ij}^1(x), \rho_{ij}^2(x), \dots, \rho_{ij}^R(x)$  由三维边界元弹塑性增量算法中在同一增量步上不同迭代步之间的应力差来构造。每一个基矢量实质上就是迭代过程中所产生的塑性应变所引起的弹性响应, 满足自平衡应力场的要求(10c, d) 式。极限载荷的整个求解过程可以分为一系列数学规划子问题, 整个求解过程如下:

1) 对于第一个子问题, 首先在弹性极限载荷的基础上施加一个载荷增量  $\Delta \beta^1$ , 由三维边界元弹塑性增量算法进行迭代, 求出  $R$  个自平衡应力场基矢量。然后通过下面将要介绍的复合形法进行求解, 可得到极限载荷的第一个近似解  $\beta_1$ 。

2) 以第  $n$  次规划完成后的平衡应力场为基础, 施加一个载荷增量  $\Delta \beta^{n+1}$ , 得到  $(R - 1)$  个新的自平衡应力场基矢量。同时将第  $n$  次数学规划完成后得到的自平衡应力场也作为一个基矢量, 这样总共得到  $R$  个基矢量。通过对数学规划问题的求解可得到第  $n + 1$  个近似解  $\beta_{n+1}$ 。

3) 对于给定的误差容限  $\varepsilon$ , 如果满足以下的收敛准则:

$$(\beta_{n+1} - \beta_n) / \beta_{n+1} \leq \varepsilon, \quad (12)$$

则计算结束,  $\beta_{n+1}$  就是极限载荷乘子的下限解, 如果上式不满足, 则转向 2), 继续下一个子问题的求解。

整个求解过程实际上就是不断对自平衡应力场进行修正的过程。每一个子问题的求解就是对上一个子问题的自平衡应力场进行修正, 使得它更接近真实情况。

计算表明, 只需要进行 3~ 5 次的数学规划求解, 就可以得到满意的结果。而自平衡应力场基矢量的数目  $R$  一般来说只需 4~ 6 个即可。

## 4 非线性规划问题的求解

将(11)式代入(10)式,则经过离散化以后的下限定理可以表示为:

$$\beta^s = \max \beta, \quad (13a)$$

$$\text{s.t. } \Phi(\beta, C_1, C_2, \dots, C_R) \leq \sigma_0^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N_G) \cdot \quad (13b)$$

上式中,  $N_G$  为屈服条件应力校核点的个数。此时,式(10)中的后两个约束条件(10c, d)已自动满足。

从式(13)可以看出,该数学规划问题具有以下特点:

- 1) 优化变量较少,即维数较低,一般  $R + 1 \leq 7$  个;
- 2) 约束方程较多,即阶数较高( $N_G$ 阶);
- 3) 由于采用 von Mises 屈服条件,(13b)中的约束方程均为二次方程。

根据该非线性规划问题的上述特点,我们采用复合形法进行求解<sup>[9]</sup>。

第一步:考虑到该非线性规划问题具有变量少,而且约束方程均为二次等特点,对于一组给定的常数  $C'_1, C'_2, \dots, C'_R$ , 求出所对应的  $\beta''$ 。

首先,将式(13b)中的  $N_G$  个不等式约束方程整理为  $\beta$  的二次函数,并记为

$$Q_i(\beta) = a_i \beta^2 + b_i \beta + c_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_G), \quad (14)$$

其中系数  $a_i$  由第  $i$  个应力校核点的虚拟弹性应力场的各应力偏量(已知量)构成,且一定有  $a_i > 0$ ,  $b_i, c_i$  则由第  $i$  个应力校核点的虚拟弹性应力场的各应力偏量和该点自平衡应力场基矢量的各应力偏量(已知量)与给定的系数  $C'_1, C'_2, \dots, C'_R$  构成。

如果上面的  $N_G$  个二次不等式都有解区间并且这些解区间存在非零的交集,则将  $C'_1, C'_2, \dots, C'_R$  称为本问题的一个允许点,反之则为不允许点。采取强制措施避免出现不允许点。将这个交集区间的最大值记为  $\beta''$ , 我们就可以写出下面的函数关系:

$$\beta'' = \Phi(C'_1, C'_2, \dots, C'_R) \cdot \quad (15)$$

第二步:求  $C_1^*, C_2^*, \dots, C_R^*$ , 使其所对应的  $\beta^{**} \rightarrow \beta^s$ 。

构造初始复合形,即在一个  $R$  维空间中构造一定数量(计为  $K$ ) 的初始顶点  $x^{(1)}, \dots, x^{(K)}$ , 每个顶点的坐标就代表一组  $C_1, C_2, \dots, C_R$ , 并采取强制措施保证所选取的初始复合形的每个顶点都是允许点。

在产生了初始复合形以后,我们进行如下迭代:

1) 找出所有顶点中目标函数值最大的点(最好点)  $x^{(b)}$  和目标函数值最小的点(最坏点)  $x^{(w)}$ , 并求除了  $x^{(w)}$  以外所有点的中心点  $x^\wedge$ :

$$x^\wedge = \frac{1}{2R} \left[ \sum_{i=1}^{2R-1} x^{(i)} - x^{(w)} \right] \cdot \quad (16)$$

2) 求  $x^{(w)}$  关于  $x^\wedge$  的反射点  $x^\Delta$ :

$$x^\Delta = (1 + \lambda)x^\wedge - \lambda x^{(w)}, \quad (17)$$

其中  $\lambda > 0$  为反射系数(一般可取  $\lambda = 1.3$ ), 若  $x^\Delta$  不是允许点,则将  $x^\Delta$  向中心点  $x^\wedge$  移动一半距离,即以:

$$x^\Delta(\text{new}) = 0.5(x^\Delta(\text{old}) + x^\wedge) \tag{18}$$

代替原来的  $x^\Delta$ ; 若新的  $x^\Delta$  仍然不是允许点, 则重复应用(18)式, 直到  $x^\Delta$  成为允许点。

3) 计算  $\phi(x^\Delta)$ , 若

$$\phi(x^\Delta) > \min_{i \in Z_w}(\phi(x^{(i)})), \tag{19}$$

则以  $x^\Delta$  代替  $x^{(w)}$ , 一次迭代完成; 否则, 也将  $x^\Delta$  向中心点  $x^\wedge$  移动一半距离, 即再由(18)式求出新的  $x^\Delta$ , 直到(19)式满足为止。

4) 对于预先给定的误差容限  $\epsilon'$ , 如果满足:

$$\|x^{(b)} - x^{(w)}\| \leq \epsilon', \tag{20}$$

则  $x^{(b)}$  (其坐标即为  $C_1^*$ ,  $C_2^*$ , ...,  $C_R^*$ ) 所对应的  $\beta^{**}$  即为该子问题的近似解。如果不满足, 则转 1) 继续迭代。

### 5 数值算例

为了验证本文所提出的三维问题求解算法的有效性, 在本节里给出了几个算例的数值计算结果并与文献中的结果进行了比较。以下算例中均采用 8 节点二次边界单元和 8 节点线性内部单元对结构进行离散。材料参数取为: 弹性模量  $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 屈服极限  $\sigma_s = 200 \text{MPa}$ 。

1) 一组受单向拉伸载荷作用的带圆孔方板(图1)。

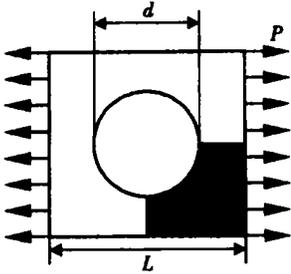


图1 带孔方板受力示意图

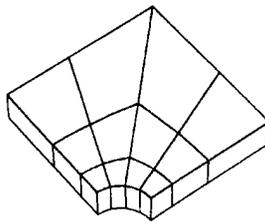


图2 边界单元网格划分

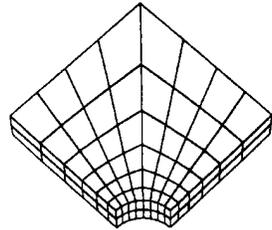


图3 内部单元网格划分

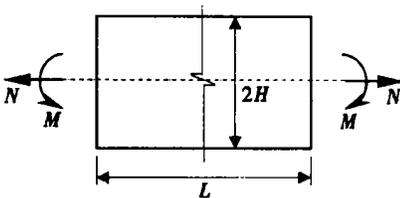


图4 矩形梁受力示意图

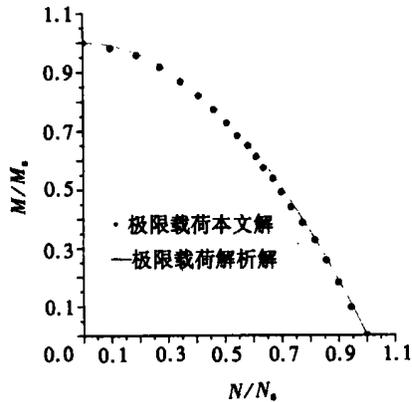


图5 数值解与解析解的比较

在本算例中, 计算了 4 种不同孔径的带圆孔方板在单向拉伸载荷作用下的极限载荷。圆孔直径  $d$  与板长  $L$  的比值分别为 0.2、0.4、0.6 和 0.8。孔径与板长比  $d/L = 0.2$  时结构的边

界元网格以及内部单元网格划分见图 2 和图 3。

表 1 给出带孔方板的极限载荷数值结果, 并与文献[10]中列出的采用其它算法所得到的数值解进行了比较。由表 1 可见, 本文结果与其它数值解具有很好的一致性。

表 1 不同方法的数值计算结果比较( $\sigma_s$  为屈服应力)

孔径 $d$ / 板长 $L$	求解方法	$P/\sigma_s$
0.2	[Gaydon & McCrum, 1954]	0.800 0
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 423 个单元	0.800 4
	本文解	0.801 1
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 113 个单元	0.801 9
	[Casciaro & Cascini, 1982]	0.803 5
0.4	下限解 [Gaydon & McCrum, 1954]	0.460 0
	[Casciaro & Cascini, 1982]	0.537 5
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 121 个单元	0.575 5
	本文解	0.579 7
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 285 个单元	0.583 4
	上限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 119 个单元	0.589 6
上限解 [Gaydon & McCrum, 1954]	0.600 0	
0.6	下限解 [Gaydon & McCrum, 1954]	0.190 0
	[Casciaro & Cascini, 1982]	0.219 9
	上限解 [Gaydon & McCrum, 1954]	0.230 0
	本文解	0.232 3
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 215 个单元	0.236 7
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 129 个单元	0.236 9
0.8	下限解 [Gaydon & McCrum, 1954]	0.041 00
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 117 个单元	0.047 97
	下限解 [Borges, <i>et al.</i> , 1996] 364 个单元	0.049 29
	本文解	0.051 22
	[Casciaro & Cascini, 1982]	0.055 24
	上限解 [Gaydon & McCrum, 1954]	0.059 00

## 2) 承受拉伸和弯曲载荷作用的矩形梁(图 4)

本算例给出了同时承受拉伸载荷和弯曲载荷的矩形截面梁 ( $2H/L = 1/8$ ) 的极限载荷数值解, 并与解析解进行了比较(图 5)。采用 38 个边界单元和 96 个内部单元, 对矩形梁进行离散。该问题的解析解为:  $M/M_s + (N/N_s)^2 = 1$ , 式中  $M_s$  和  $N_s$  分别为弯矩和轴力单独作用时的极限载荷。为了说明本算法的效率, 本文给出了矩形梁承受纯弯曲载荷时本文算法与弹塑性边界元方法的计算时间比较。在同一台微机进行运算, 本文算法和弹塑性边界元增量法所需计算时间分别为 64.7 s 和 174.3 s。

## 6 结束语

借助于三维边界元方法, 本文将减缩基技术和复合形法有效地结合起来, 克服了极限分析中最为关键的维障问题。由本文的分析以及算例求解可以看出:

1) 边界元法可以作为一种有效的数值方法用于极限分析问题。由于边界元方法直接计算得出的应力比有限元方法通过位移求出的应力有较高的精度, 适合于计算虚拟弹性应力场和通过弹塑性迭代而产生自平衡应力场基矢量。

2) 本文所采用的构造自平衡应力场的减缩基技术以及边界元方法自身的降维作用使得所形成的数学规划问题的未知量大大降低。极限分析问题化为一系列数学规划子问题进行求解。整个求解过程实质上是对自平衡应力场的不断修正, 使之逼近真实状态的过程。

3) 用复合形法直接求解所形成的非线性数学规划问题, 整个过程既避免了通常对屈服面进行线性化而引起的误差, 也不会增加数学规划问题的维数。计算结果表明采用该算法有较高的精度和计算效率, 同时具有很好的数值稳定性。

### [参 考 文 献]

- [1] 刘应华, 岑章志, 徐秉业. 三维结构极限上限分析的有限元方法[J]. 清华大学学报, 1996, 36(3): 47—53.
- [2] Maier G, Polizzotto C. A boundary element approach to limit analysis[A]. In: Brebbia C A, Futagami T, Tanaka M Eds. Boundary Elements [C]. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 551—556.
- [3] Swedlow J L, Cruse T A. Formulation of boundary integral equations for three dimensional elastoplastic flow[J]. Int J Solids Struct, 1971, 7(12): 1673—1683.
- [4] Maier G, Novati G. Elastic plastic boundary element analysis as a linear complementarity problem [J]. Appl Math Modelling, 1983, 7(2): 74—82.
- [5] Cen Z, Wang X, Du Q. A coupled finite element boundary element method for three dimensional elastoplasticity analysis[A]. In: Du Q Ed. On BEM in Eng'g [C]. Beijing: Pergamon Press, 1986, 311—318.
- [6] 岑章志, 王勳成, 杜庆华. 采用有限元\_边界元耦合方法计算弹塑性应力[J]. 清华大学学报, 1988, 28(2): 34—43.
- [7] Martin J B. Plasticity: Foundation and General Results [M]. Cambridge, Mass: MIT Press, 1975, 379—526.
- [8] Zhang X, Liu Y, Cen Z. A solution procedure for lower bound limit and shakedown analysis by SGBEM[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2000, 14(2): 118—129.
- [9] 席少霖, 赵凤治. 最优化计算方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983, 370—377.
- [10] Borges L A, Zouain N, Huespe A E. A nonlinear optimization procedure for limit analysis[J]. Eur J Mech, A/ Solids, 1996, 15(3): 487—512.

---

# Lower Bound Limit Analysis of Three Dimensional Elastoplastic Structures by Boundary Element Method

LIU Ying\_hua, ZHANG Xiao\_feng, CEN Zhang\_zhi  
(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,  
Beijing 100084, P. R. China)

**Abstract:** Based on the lower bound theorem of limit analysis, a solution procedure for limit analysis of three dimensional elastoplastic structures was established using conventional boundary element method (BEM). The elastic stress field for lower bound limit analysis was computed directly by three dimensional boundary element method (3\_D BEM). The self equilibrium stress field was constructed by the linear combination of several self equilibrium "basis vectors" which can be computed by elastic plastic incremental iteration of 3\_D BEM analysis. The lower bound limit analysis problem was finally reduced to a series of nonlinear programming sub problems with relatively few optimal variables. The complex method was used to solve the nonlinear programming sub problems. The numerical results show that the present solution procedure has good accuracy and high efficiency.

**Key words:** BEM; lower bound limit analysis; self equilibrium stress field; nonlinear programming; complex method