

文章编号: 1000-0887(2003) 12-1291-10

组合杂交有限元方法对等参双线性 Q_4 平板元的粗网格精度改进*

谢小平¹, 周天孝²

(1. 四川大学 数学学院, 成都 610064;

2. 中国航空计算技术研究所, 西安 710068)

(戴世强推荐)

摘要: 组合杂交有限元法具有增强低阶位移格式粗网格精度的内在机制。能量误差为零的组合杂交格式可获得改进的粗网格精度, 而其中组合参数起着极其重要的作用。采用最简便的四边形位移-应力模式作为对协调双线性 Q_4 平板元的改进; 协调等参双线性位移插值和纯粹常应力模式。通过调整组合参数, 得到了组合杂交元的优化型。数值试验表明这种参数调整型显著改进了协调 Q_4 元, 达到粗网格高精度。由于应力参数可在单元水平消去, 这种组合杂交改进型的计算量与协调 Q_4 元相当。

关键词: 有限元; 杂交方法; 能量零误差; 粗网格精度

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A

引 言

通过添加“无节点”非协调“bubble”模式和保持力学变分原理的几何特征, 组合杂交方法^[1~4]显著地增强了传统低阶四边形元的粗网格精度。文献[3]给出的四边形弹性平板元 CH(0,1)即为成功的例子。

按照力学几何观点并结合数学分析, 本文引入组合杂交变分原理的一个新颖的表达以阐明这种变分原理的内在机制——增强低阶位移格式的粗网格精度和稳定性。文章指出, 无能量误差的组合杂交格式在粗网格时达到高精度。这一机制揭示了控制精度增强的两个要素: 能量协调 bubble 函数和组合参数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 的选择。利用组合杂交方法的能量零误差机制, 本文致力于协调双线性 Q_4 元的改进。内容安排如下: 第 1 节给出组合杂交法的一般形式及能量零误差机制; 第 2 节讨论 Q_4 元的组合杂交对应元及通过调整组合参数 α 对它的改进; 最后一节给出了数值试验。

1 组合杂交元的一般形式和能量零误差机制

为增强低阶位移有限元的粗网格精度, 考虑如下的所谓组合杂交变分泛函^[1~3]:

* 收稿日期: 2001.09.29; 修订日期: 2003.06.20

基金项目: 国家天元青年基金资助项目(TY10126027)

作者简介: 谢小平(1970—), 男, 四川德阳人, 副教授, 博士(E-mail: xiaopingxie@263.net)。

$$\Pi_{\text{GH}}(\tau, v) = \frac{1-\alpha}{2}d(v, v) - f(v) - b_1(\tau, v_1) + \alpha[b_2(\tau, v) - \frac{1}{2}a(\tau, \tau)], \quad (1)$$

其中 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 为组合参数; 单元位移 $v = v_c + v_1$, v_c 是与节点位移 q^c 相关的协调位移, v_1 为单元内部位移, 即所谓的“广义 bubble 函数”它可能是协调的或非协调的; 应力 $\tau \in V =$

$\prod_{K \in \mathcal{T}_h} H(\text{div}; K)$ 分片独立; T_h 表示有界区域 Ω 的正规有限元剖分; 并且

$$a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma \cdot D^{-1} \tau \, d\Omega, \quad b_2(\tau, v) = \sum_K \int_K \tau \cdot \varepsilon(v) \, d\Omega,$$

$$b_1(\tau, v_1) = \sum_K \int_{\partial K} \tau \cdot n \cdot v_1 \, ds,$$

$$d(u, v) = \sum_K \int_K \varepsilon(u) \cdot D \varepsilon(v) \, d\Omega, \quad f(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega,$$

这里 $\varepsilon(v)$ 为应变: $\varepsilon_j(v) = \frac{1}{2}(\partial v^{(i)}/\partial x_j + \partial v^{(j)}/\partial x_i)$, D 为弹性模量矩阵, f 为给定的体积力. 组合杂交变分原理等价于下列边界值问题^[2,3]:

求 $u \in U_c$ 使得

$$-\text{div} \sigma = f, \quad \sigma = D \varepsilon(u), \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (2)$$

$$u = 0, \quad \text{在 } \Gamma = \partial \Omega \text{ 上}, \quad (3)$$

这里 $U_c := \{v \in (H^1(\Omega))^2, v|_{\Gamma} = 0\}$, $H^1(\Omega)$ 为通常所指的 Sobolev 空间.

对有限元空间 $V^h \times U^h \subset V \times U$, 其中 $U = U_c \oplus U_1$, $U_1(K) := \text{span}\{\text{bubbles}\}$, 组合杂交方法可表示为:

求有解元解 $(\sigma^h, u^h) \in V^h \times U^h$ 使得

$$\Pi_{\text{GH}}(\sigma^h, u^h) = \inf_{v \in U^h} \sup_{\tau \in V^h} \Pi_{\text{GH}}(\tau, v), \quad (4)$$

即 (σ^h, u^h) 为组合杂交能量泛函 $\Pi_{\text{GH}}(\tau, v)$ 的鞍点.

问题(4)等价于: 求 $(\sigma^h, u^h) \in V^h \times U^h$ 使得

$$\alpha a(\sigma^h, \tau) - \alpha b_2(\tau, u^h) + b_1(\tau, u_1^h) = 0, \quad \forall \tau \in V^h, \quad (5)$$

$$\alpha b_2(\sigma^h, v) - b_1(\sigma^h, v_1) + (1-\alpha)d(u^h, v) = f(v), \quad \forall v \in U^h. \quad (6)$$

注 1.1 组合杂交方法单元刚度矩阵的导出可参见文献[3]的附录

组合杂交方法不要求有限元空间 $V^h \times U^h$ 满足任何 \inf_{sup} 条件或平衡条件. 特别地, 有下列收敛性定理^[2,3]:

引理 1.1 对任意 $V^h \times U^h$, 问题(5)、(6) 存在唯一有限元解 $(\sigma^h, u^h) \in V^h \times U^h$ 使得

$$\begin{aligned} & \| \sigma - \sigma^h \|_{0, \Omega} + \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \right]^{1/2} (1-2\nu)^{-1} \| u - u^h \|_U \leq \\ & C [\alpha(1-\alpha)]^{-1/2} \left\{ \inf_{\tau \in V^h} \| \sigma - \tau \|_V + \right. \\ & \left. (1-2\nu)^{-1} \inf_{v \in U^h} \left[\| u - v \|_U + \sup_{\tau \in V^h} \frac{b_1(\tau, v_1)}{\| \tau \|_V} \right] \right\} \leq \\ & C [\alpha(1-\alpha)]^{-1/2} \left\{ \inf_{\tau \in V^h} \| \sigma - \tau \|_V + (1-2\nu)^{-1} \inf_{v \in U_c^h \subset U_c} \| u - v \|_U \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

成立, 其中常数 C 与单元尺度 h_K , 组合参数 $\alpha < 1$ 及 Poisson 比 ν 无关,

$$\| v \|_{U := \left[\sum_K \| \varepsilon(v) \|_{0, K}^2 \right]^{1/2}}, \quad \| \tau \|_V := \left[\| \tau \|_{0, \Omega}^2 + \sum_K h_K^2 \| \text{div} \tau \|_{0, K}^2 \right]^{1/2}.$$

按上述引理和文献[3]中的数值试验, 组合参数 $\alpha = 0.5$ 通常是较安全合理的选择. 此时, 所对应的组合杂交格式被称作基本型.

虽然引理 1.1 以误差估计的形式保证了方法的渐近收敛性, 但它仅表明了有限元的细网格精度. 在假设有限元网格给定, 即单元尺度 h 固定时, 我们将讨论组合杂交方法增强粗网格精度的机制: 能量零误差导致粗网格高精度.

引理 1.2 通过两种方式: 优化选择参数 α 和对协调位移添加能量协调 bubble 函数, 可以获得组合杂交格式的优化型, 它具有下列意义下的粗网格能量高精度:

$$| \Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) - \Pi_{\text{P}}(u) | < \min \left\{ | \Pi_{\text{P}}(u) - \Pi_{\text{P}}(u_1^h) |, | \Pi_{\text{P}}(u) - \Pi_{\text{P}}(u_2^h) | \right\}, \quad (8)$$

而且如下零误差成立:

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) = \Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) = \Pi_{\text{P}}(u), \quad (9)$$

这里势能泛函 $\Pi_{\text{P}}(v) = 0.5d(v, v) - f(v)$, $u_1^h \in U_c^h$ 为非协调有限元解, $u_2^h \in U_c^h \oplus U_1$ 为非协调有限元解.

2 由能量零误差机制改进 Q_4 元

本节讨论组合杂交方法及其能量零误差机制的一个具体应用. 设 $K \in T_h$ 为任意四边形, 顶点为 $P(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 4$, 有限元空间取

$$\begin{aligned} U^h &= U_1^h := \left\{ v \in U_c; v|_K \in \text{span} \left\{ 1, \xi, \eta, \xi\eta \right\}^2 \circ F_K^{-1}, \forall K \in T_h \right\}, \\ V^h &= V_0^h := \left\{ \tau \in V; \tau|_K \in \text{const}, \forall K \in T_h \right\}, \end{aligned}$$

这里 $F_K: K = [-1, 1]^2 \rightarrow K$ 为通常的双线性等参变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F_K(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix},$$

其中 $\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

于是(5)、(6)简化为: 求 $(\sigma_*^h, u_*^h) \in V_0^h \times U_1^h$ 使得

$$\alpha a(\sigma_*^h, \tau) - \alpha b_2(\tau, u_*^h) = 0, \quad \forall \tau \in V_0^h, \quad (10)$$

$$\alpha b_2(\sigma_*^h, v) + (1 - \alpha) d(u_*^h, v) = f(v), \quad \forall v \in U_1^h, \quad (11)$$

相应的变分泛函亦简化为

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{CH}}(\sigma_*^h, u_*^h) &= \inf_{v \in U_1^h} \sup_{\tau \in V_0^h} \Pi_{\text{CH}}(\tau, v) := \\ &= \inf_{v \in U_1^h} \sup_{\tau \in V_0^h} \left[\frac{1-\alpha}{2} d(v, v) - \frac{\alpha}{2} a(\tau, \tau) + \alpha b_2(\tau, v) - f(v) \right] = \\ &= \inf_{v \in U_1^h} \left\{ \Pi_{\text{P}}(v) + \sup_{\tau \in V_0^h} \left[-\frac{\alpha}{2} d(v, v) + \alpha b_2(\tau, v) - \frac{\alpha}{2} a(\tau, \tau) \right] \right\} = \\ &= \inf_{v \in U_1^h} \left\{ \Pi_{\text{P}}(v) - \inf_{\tau \in V_0^h} \left[\frac{\alpha}{2} a(\tau - D\varepsilon(v), \tau - D\varepsilon(v)) \right] \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

利用引理 1.2, 容易得到

命题 2.1 通过优选参数 α , 可以获得优化型组合杂交格式, 它具有下列意义下的粗网格能量高精度:

$$| \Pi_{\text{CH}}(\sigma_*^h, u_*^h) - \Pi_{\text{P}}(u) | < | \Pi_{\text{P}}(u) - \Pi_{\text{P}}(u_1^h) |, \quad (13)$$

且如下零误差成立:

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) = \Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) = \Pi_{\text{P}}(u), \quad (14)$$

其中 $u_1^h \in U_1^h$ 为协调双线性元解

简证如下:

事实上, 由关系式(2)、(3)和最小势能原理有

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) = \Pi_{\text{P}}(u) = \inf_{v \in U_c} \Pi_{\text{P}}(v) < \inf_{v_c \in U_1^h} \Pi_{\text{P}}(v_c) =: \Pi_{\text{P}}(u_1^h) \quad (15)$$

因 $a(\tau, \tau) \geq 0$ 且 $\sigma^h \neq D\mathcal{E}(u^h)$, 式(12)推出

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) < \inf_{v_c \in U_1^h} \Pi_{\text{P}}(v_c) \quad (16)$$

此不等式表明协调位移模型的势能因减去项 $(\alpha/2) \inf_{\tau} a(\tau - D\mathcal{E}(v), \tau - D\mathcal{E}(v))$ 而变小。显然这种减小可通过直接调整组和参数 α 达到。如果

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) < \Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) |_{\alpha=0.5}, \quad (17)$$

则由这一关系和式(16)知, 组合杂交格式可以更准确地逼近泛函 $\Pi_{\text{CH}}(\tau, v)$ 的鞍点 (σ, u) 而同时保持单元边界节点位移参数的个数不变。

在此情形下, 参数 $\alpha = 0.5$ 所对应的基本型组合杂交格式可由优选参数 $\alpha = \alpha^* < 1$ 进一步改进, 使得

$$\inf_{v \in U_1^h} \sup_{\tau \in V_0^h} \Pi_{\text{CH}}(\tau, v) |_{\alpha=\alpha^*} = \Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) \quad (18)$$

事实上, 增大 α , 从 $\alpha = 0.5$ 到 α 接近 1; α 接近 1 时, 有限元解趋于发散, 从而导致能量 $\inf_{v \in U_1^h} \sup_{\tau \in V_0^h} \Pi_{\text{CH}}(\tau, v)$ 远小于准确能量值 $\Pi_{\text{CH}}(\sigma, u)$ 。换言之, 存在 $\alpha_0 \in (0.5, 1)$ 使得

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) |_{\alpha=\alpha_0} < \Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) < \Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) |_{\alpha=0.5}$$

这样, $\Pi_{\text{CH}}(\sigma, u)$ 即介于 $\alpha = \alpha_0$ 和 $\alpha = 0.5$ 所对应的能量值之间, 由能量泛函对 α 的连续性知, 存在 $\alpha^* \in (0.5, \alpha_0)$ 使得(18)式成立。

但与假设(13)相反, 也可能有

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) \geq \Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) |_{\alpha=0.5}$$

如此, 则由(10)有

$$\Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h) |_{\alpha=0.5} \leq \Pi_{\text{CH}}(\sigma, u) < \inf_{v \in U_1^h} \Pi_{\text{P}}(v), \quad (19)$$

再次由能量泛函对 α 的连续性知存在 $\alpha^* \in (0, 0.5]$ 使得(18)式成立。证毕。

正如本文下节所表明的, 保持式(18)成立的能量零误差型位移有限元格式在实际计算中总表现出粗网格高精度。

因为组和参数 α 在调整能量 Π_{CH} 以获取精度增强的组合杂交有限元的过程中起着重要作用, 实际计算中我们可尝试得到比基本型 $\alpha = 0.5$ 更好的参数选择。

为此, 对适当的单元尺寸为 h 的粗网格和尺寸为 $h/2$ 的相应细网格, 假设细网格时的能量 $\Pi_{\text{CH}}(\sigma^h, u^h)$ 比粗网格时的更精确。这样, 如命题 2.1 的证明中所指出的, 在组和参数区间 $(0, 1)$ 的两端会出现不同的能量改变趋势。在 $\alpha = 0$, 当网格从 h 变到 $h/2$ 时, 能量会减小, 而在 α 接近 1 时会增加。基于这一差别, 在 $\alpha' = 0.5$ 时的能量改变趋向可用来确定最优的 α^* 落入 $(0, 0.5)$ 和 $(0.5, 1)$ 中的哪一个区间。于是, 一个比 α' 更好的参数 α 可通过下述调整公式得到^[4]:

$$\alpha = 0.5 + \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = C_\alpha \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\Pi_{\text{CH}}(h, \alpha) - \Pi_{\text{CH}}(h/2, \alpha)}{|\Pi_{\text{CH}}(h, 0.5) + \Pi_{\text{CH}}(h/2, 0.5)|/2}, \quad (20)$$

其中 $\Pi_{CH}(h, \alpha)$ 和 $\Pi_{CH}(h/2, \alpha)$ 分别表示粗网格时和细网格时的能量值, C_α 为一试验参数。

注 2.1 理论上优选的 α 即命题 2.1 中的 α_* 可通过一个区间压缩算法近似得到。但在实际应用中上述近似公式计算成本低而且可以保证格式足够的精度。

第 3 节将做数值试验来检验组合杂交元 $V_0^h \times U_1^h =: CHQ_4(\alpha)$ 的性能。所有的应力结果均由下式得出

$$\sigma_*^h = D\varepsilon(u_*^h) \tag{21}$$

数值结果表明由 (20) 得到的 α_* 调整型显著改进了 Q₄ 元且达到粗网格高精度。

3 数值试验

本节的几个数值例子用以检验基本型组合杂交元 CHQ₄(0.5) 及其 α_* 调整型 CHQ₄(α_*) 的数值性能, 这里 $\alpha = 0.5 + \Delta\alpha$, $\Delta\alpha$ 按如下方式确定:

$$\Delta\alpha = \begin{cases} \text{sign}(\varepsilon) \times 0.1, & |\varepsilon| \leq 0.20, \\ \text{sign}(\varepsilon) \times 0.2, & |\varepsilon| \in (0.20, 0.30], \\ \text{sign}(\varepsilon) \times 0.4, & |\varepsilon| > 0.30, \end{cases} \tag{22}$$

其中 ε 已在 (20) 中定义,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

3.1 承受端部载荷的悬臂梁

图 1 是一个悬臂梁, 端部载荷 W 按抛物型剪切应力形式给出

$$\sigma_{xy} |_{x=L} = \frac{3W}{2Ht} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right],$$

其中 L, H 和 t 分别为梁的长度、高度和厚度, 梁左端部的中点定为坐标原点。

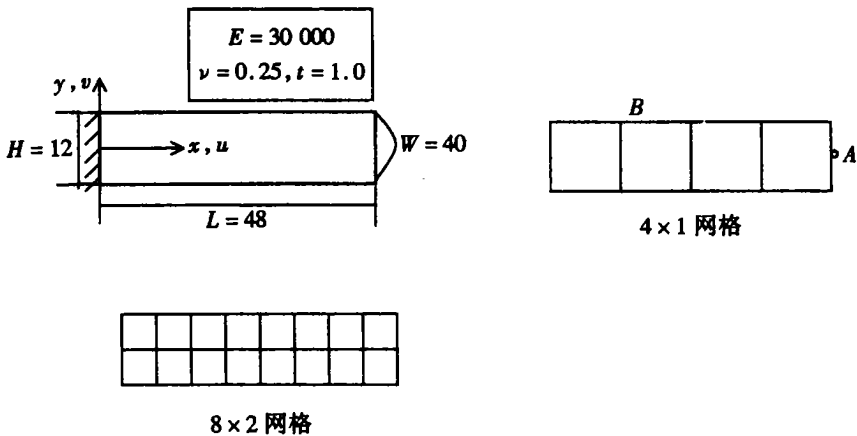


图 1 承受端部载荷的悬臂梁

表 1 列出了 (4×1) 和 (8×2) 网格剖分对应的能量 Π (Π_{CH} 或 Π_F)、端部的挠度位移 v_A 和点 B 处的法向应力 σ_{xB} 的数值结果。CHQ₄(0.3) 由 (22) 得出, 其精度远比 Q₄ 和 CHQ₄(0.5) 高。

表 1 承受端部载荷的悬臂梁的数值结果(能量 Π 、位移 v_A 、应力 σ_{xB})

网格		4×1	8×2	理论值
v_A	Q_4	0.242 4	0.316 1	0.357 3
	$CHQ_4(0.5)$	0.471 5	0.375 8	
	$CHQ_4(0.3)$	0.340 6	0.349 3	
σ_{xB}	Q_4	- 43.6	- 55.7	- 60.0
	$CHQ_4(0.5)$	- 87.3	- 66.9	
	$CHQ_4(0.3)$	- 62.3	- 61.9	
Π	Q_4	- 4.849	- 6.324	- 7.114
	$CHQ_4(0.5)$	- 9.430	- 7.520	
	$CHQ_4(0.3)$	- 6.812	- 6.988	

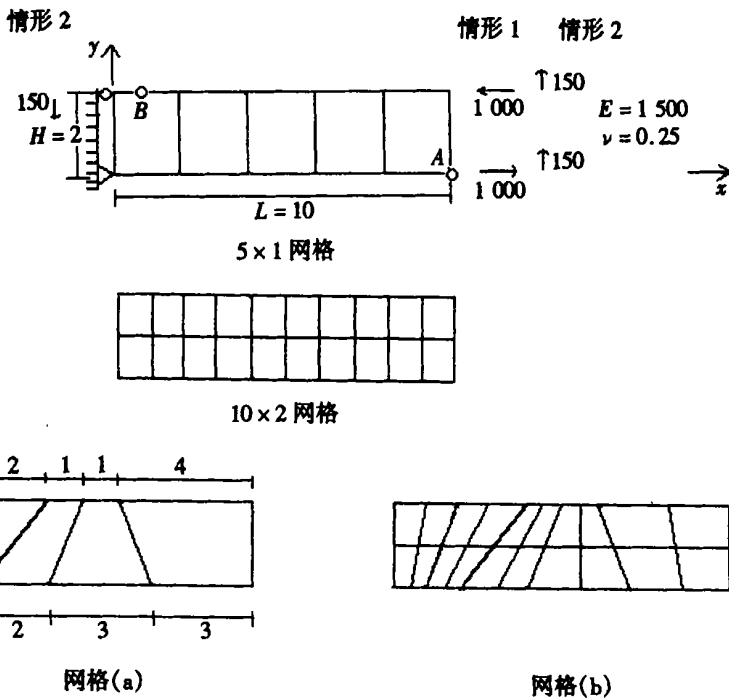


图 2 简支悬臂梁

3.2 承受弯曲和端部剪切载荷的简支悬臂梁

一平面应力梁承受两种载荷,如图2·表2和表3给出了各个元所计算出的点A处的最大位移和点B处的法向应力。对矩形剖分网格(5×1)和(10×2), $CHQ_4(0.3)$ 由(22)得出,精度比 Q_4 和 $CHQ_4(0.5)$ 高。对不规则剖分网格(a)及其对分细化网格(b), $CHQ_4(0.5)$ 给出了好结果,但由(22)得到的 α 调整型 $CHQ_4(0.6)$ 位移和能量的结果更好,尽管在点B处的法向应力比 $CHQ_4(0.5)$ 的稍

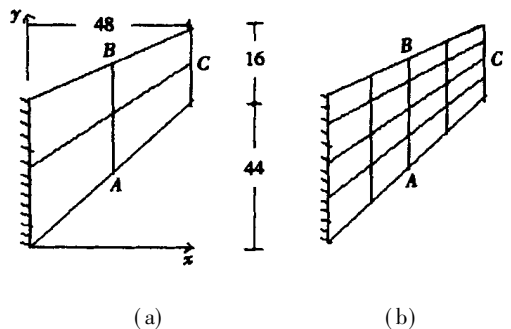


图 3 Cook 平面应力板

差。数值结果也跟 Wilson 元(Q_6) 做了比较。

表 2

简支悬臂梁的数值结果: 情形 1

网格		5×1	10×2	(a)	(b)	理论值
v_A	Q_4	68.2	89.6	45.7	74.8	100
	$CHQ_4(0.5)$	136.4	107.1	82.8	94.1	
	$CHQ_4(0.3)$	97.4	99.3	-	-	
	$CHQ_4(0.6)$	-	-	101.2	99.5	
	Q_6	100	100	90.7	98.7	
σ_{xB}	Q_4	- 2 182	- 2 776	- 1 762	- 2 587	- 3 000
	$CHQ_4(0.5)$	- 4 364	- 3 321	- 3 222	- 3 128	
	$CHQ_4(0.3)$	- 3 117	- 3 080	-	-	
	$CHQ_4(0.6)$	-	-	- 3 948	- 3 271	
	Q_6	- 3 000	- 3 000	- 2 323	- 2 872	
Π	Q_4	- 1.36e4	- 1.79e4	- 0.84e4	- 1.45e4	- 2.00e4
	$CHQ_4(0.5)$	- 2.73e4	2.14e4	- 1.51e4	- 1.85e4	
	$CHQ_4(0.3)$	- 1.95e4	- 1.99e4	-	-	
	$CHQ_4(0.6)$	-	-	- 1.84e4	- 1.96e4	
	Q_6	- 2.00e4	- 2.00e4	- 1.78e4	- 1.97e4	

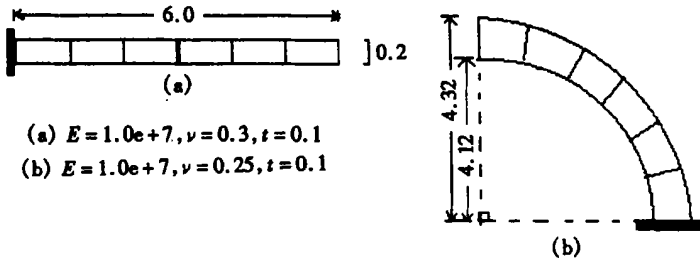


图 4 MacNeal_Harder 细长梁(网格 6×1)

表 3

简支悬臂梁的数值结果: 情形 2

网格		5×1	10×2	(a)	(b)	理论值
v_A	Q_4	70.0	91.7	50.7	78.5	102.6
	$CHQ_4(0.5)$	137.5	109.2	91.1	97.6	
	$CHQ_4(0.3)$	98.9	101.4	-	-	
	$CHQ_4(0.6)$	-	-	111.1	102.9	
	Q_6	101.5	102.1	93.2	101.2	

续表 3

网格		5×1	10×2	(a)	(b)	理论值
$\sigma_{,B}$	Q ₄	- 2 946	- 3 752	- 2 448	- 3 512	- 4 050
	CHQ ₄ (0.5)	- 5 891	- 4 492	- 4 488	- 4 243	
	CHQ ₄ (0.3)	- 4 208	- 4 163	-	-	
	CHQ ₄ (0.6)	-	-	- 5 505	- 4 437	
	Q ₆	- 4 050	- 4 051	- 3 208	- 3 919	
II	Q ₄	- 1.05e4	- 1.38e4	- 0.76e4	- 1.18e4	- 1.54e4
	CHQ ₄ (0.5)	- 2.06e4	1.64e4	- 1.36e4	- 1.47e4	
	CHQ ₄ (0.3)	- 1.48e4	- 1.53e4	-	-	
	CHQ ₄ (0.6)	-	-	- 1.66e4	- 1.55e4	
	Q ₆	- 1.52e4	- 1.54e4	- 1.40e4	- 1.52e4	

表 4

Cook 平面应力板的数值结果

单元	(a)				(b)			
	II	v_C	σ_{maxA}	σ_{maxB}	II	v_C	σ_{maxA}	σ_{maxB}
Q ₄	- 5.90	11.9	0.108	- 0.078	- 9.14	18.3	0.181	- 0.143
CHQ ₄ (0.5)	- 7.52	15.1	0.135	- 0.109	- 10.37	20.7	0.207	- 0.170
CHQ ₄ (0.9)	- 11.53	23.1	0.192	- 0.182	- 11.88	23.7	0.231	- 0.205
Q ₆	- 11.17	22.4	0.174	- 0.180	- 11.74	23.5	0.220	- 0.190
P_S	- 10.50	21.1	0.185	- 0.155	- 11.51	23.0	0.224	- 0.186
B_QE4	-	21.4	0.196	-	-	23.0	0.226	-
CH(0_1)	- 11.47	23.0	0.186	- 0.174	- 11.75	23.5	0.222	- 0.191

表 5

梁的端部挠度 v_{ip} 和能量 II

问题		Q ₄	CHQ ₄ (0.5)	CHQ ₄ (0.9)	Q ₆	CH(0_1)	P_S	准确值	
v_{ip}	(a)	6×1	0.010 1	0.020 1	0.100 2	0.107 3	0.107 3	0.107 3	0.108 1
		12×2	0.031 5	0.051 6	0.105 8	0.107 4	-	-	
	(b)	6×1	0.006 4	0.012 7	0.062 5	0.072 0	0.082 4	0.077 5	
		12×2	0.021 6	0.036 4	0.081 1	0.087 0	-	-	
II	(a)	6×1	- 0.005 0	- 0.010 0	- 0.050 1	- 0.053 7	- 0.053 7	- 0.053 7	- 0.054 0
		12×2	- 0.015 7	- 0.025 8	- 0.052 9	- 0.053 7	-	-	
	(b)	6×1	- 0.003 2	- 0.006 4	- 0.031 2	- 0.036 0	- 0.041 2	- 0.038 8	
		12×2	- 0.010 8	- 0.018 2	- 0.040 5	- 0.043 5	-	-	

3.3 Cook 平面应力板问题

梯形板一边固支, 另一边受单位均布载荷(图 3), 用来检验使用斜网格剖分的平板单元的性能。此问题没有解析解。细网格结果为, 能量 $\Pi = - 11.97$, 垂向位移 $v_C = 23.91$, 最大原理应力 $\sigma_{maxA} = 0.236$, 最小原理应力 $\sigma_{minB} = - 0.201$ 。

CHQ₄(0.9) 由(22) 得到, 其精度远比 Q₄ 和 CHQ₄(0.5) 高。数值结果也跟其他有代表性的有限元作了比较, 这些元分别是 Wilson 元(Q₆)、Pian_Sumihara 元(P_S)^[6]、Piltner_Taylor 元(B_

QE4)^[7] 和 Zhou_Nie 元(CH(0_1))^[3]。

3.4 MacNeal_Harder 细长梁

MacNeal_Harder 细长梁^[8] 是用来测试算例问题的几何参数如长宽比(图 4(a)) 和曲率(图 4(b)) 对格式精度的影响。梁的一端受单位剪切载荷。 Q_4 元和 CH $Q_4(0.5)$ 的结果都很差, 发生 Locking 现象。 但由 (22) 得到的 CH(0.9) 却给出了可接受的结果。

[参 考 文 献]

- [1] ZHOU Tian_xiao. Finite element method based on combination of “saddle point” variational formulations[J]. Science in China, Ser E, 1997, 27(1): 75—87.
- [2] ZHOU Tian_xiao. Stabilized hybrid finite element methods based on combination of saddle point principles of elasticity problem[J]. Math Comput, 2003, 72(244): 1655—1673.
- [3] ZHOU Tian_xiao, NIE Yu_feng. A combined hybrid approach to finite element schemes of high performance[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 2001, 51(2): 181—202.
- [4] ZHOU Tian_xiao, XIE Xiao_ping. A combined hybrid finite element method for plate bending problems [J]. J Comput Math, 2003, 21(3): 347—356.
- [5] Allman D J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis [J]. Comput Struct, 1984, 19(1): 1—8.
- [6] Pian T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1984, 20(9): 1685—1695.
- [7] Piltner R, Taylor R L. A systematic construction of $B_{\bar{}}$ functions for linear and nonlinear mixed enhanced finite elements for plane elasticity problems[J]. Internat J Numer Methods Eeegr, 1999, 44(5): 615—639.
- [8] MacNeal R H, Harder R L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1985, 1(1): 3—20.
- [9] Chen W_J, Cheung Y_K. Robust refined quadrilateral plane element[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1995, 38(4): 649—666.
- [10] Simo J C, Rifai M S. A class of assumed strain methods and the method of incompatible modes[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1990, 29(8): 1595—1638.
- [11] Pian T H H. Finite elements based on consistently assumed stresses and displacements[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1985, 1(2): 131—140.
- [12] CHIEN Wei_zang. Incompatible elements and generalized variational principle[A]. In: Proceedings of Symposium on Finite Element Method [C]. 252. Beijing: Science Press, New York: Gordon and Breach, Science Publ, 1982.
- [13] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1992.
- [14] ZHOU Tian_xiao, XIE Xiao_ping. A unified analysis for stress/strain hybrid methods of high performance[J]. Comput Methods Appl Meth Engrg, 2002, 191(41/42): 4619—4640.

Coarse_Mesh_Accuracy Improvement of Bilinear Q₄_Plane Element by the Combined Hybrid Finite Element Method

XIE Xiao_ping¹, ZHOU Tian_xiao²

(1. Mathematical College, Sichuan University,
Chengdu 610064, P. R. China;

2. Aeronautical Computing Technique Research Institute,
Xi' an 710068, P. R. China)

Abstract: The combined hybrid finite element method is of an intrinsic mechanism of enhancing coarse_mesh_accuracy of lower order displacement schemes. It was confirmed that the combined hybrid scheme without energy error leads to enhancement of accuracy at coarse meshes, and that the combination parameter plays an important role in the enhancement. As an improvement of conforming bilinear Q₄_plane element, the combined hybrid method adopted the most convenient quadrilateral displacements_stress mode, i. e. the mode of compatible isoparametric bilinear displacements and pure constant stresses. By adjusting the combined parameter, the optimized version of the combined hybrid element was obtained and numerical tests indicated that this parameter_adjusted version behaves much better than Q₄_element and is of high accuracy at coarse meshes. Due to elimination of stress parameters at the elemental level, this combined hybrid version is of the same computational cost as that of Q₄_element.

Key words: finite element; hybrid method; zero energy_error; coarse_mesh_accuracy