

文章编号:1000-0887(2004)01-0042-11

求解摩擦接触问题的一个 非内点光滑化算法

张洪武, 何素艳, 李兴斯

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116024)

(本刊编委钟万勰推荐)

摘要: 给出了一个求解三维弹性有摩擦接触问题的新算法,即基于 NCP 函数的非内点光滑化算法. 首先通过参变量变分原理和参数二次规划法,将三维弹性有摩擦接触问题的分析归结为线性互补问题的求解;然后利用 NCP 函数,将互补问题的求解转换为非光滑方程组的求解;再用凝聚函数对其进行光滑化,最后用 NEWTON 法解所得到的光滑非线性方程组. 方法具有易于理解及实现方便等特点. 通过线性互补问题的数值算例及接触问题实例证实了该算法的可靠性与有效性.

关键词: 三维摩擦接触; 参数二次规划法; 线性互补问题; NCP 函数; 凝聚函数; 非内点光滑化算法

中图分类号: O221;O242.21 **文献标识码:** A

引言

接触非线性问题大量存在于机械、土木、航空等工程实际中. 例如:轴承系统中滚子与滚道、外圈与轴承箱的接触,齿轮之间的相互咬合、接触,轮、轨系统滚动过程中的摩擦接触,岩土工程中土与墙、不同岩层间的接触相互作用以及结构与土基的耦合作用接触等等. 接触问题从物理意义上讲,属于非保守系统或不可逆系统;从数学意义上讲称为自由边界问题或边界待定的边值问题. 一般说来,它们所构成的泛函不可微,这样导致在数学上处理起来颇为复杂,从而导致计算上的困难^[1~6]. 比较常用的解法是迭代法,即首先假定一种接触状态,计算出新的接触状态,不断修正接触状态直到收敛. 然而迭代法往往伴随着较大的计算工作量,在有的情况下还可能导致错误的解^[3].

求解接触问题的另外一类有代表性的方法是数学规划算法,该方法的理论基础则是基于变分不等以及参数变分原理等思想^[1~3]. 无论是对于变分不等还是参数变分原理,最终都可导出接触问题求解的数学规划法的列式,即可以成为标准的线性互补问题. 因此,线性互补问题的求解成为该物理问题求解效率的关键. 本文将侧重于由钟万勰首先提出的参数变分原理的接触问题求解算法研究,尤其是针对空间接触问题的求解算法研究. 关于参数变分原理近来的主要发展与应用可以参见文献[3,7~11]的内容.

· 收稿日期: 2002-06-09; 修订日期: 2003-09-03

基金项目: 国家基础研究专项基金资助课题(G1999032805)

作者简介: 张洪武(1964—),男,辽宁大连人,教授,工程力学博士,博士生导师(联系人.Tel:86-411-4706249;E-mail:zhanghw@dlut.edu.cn).

在实际结构分析中,能简化成平面问题求解的问题是有限,因此必须要研究求解三维问题的方法。由于空间问题较平面问题的难度大大提高,特别是在对空间接触模型线性化后会引入线性互补问题的未知数规模大幅度提高,难度也自然提高,因而研究针对大型互补问题计算的高效求解算法仍然是十分有意义的工作。

对于线性互补问题的求解,已有许多种算法。最具代表性的有旋转类算法^[12]和内点法^[13],前者承袭了单纯形法的特点,其中最著名的是 LEMKE 算法,已比较成熟,但它仅对规模不大的问题是很有效的;后者是求解大型互补问题的一种有效方法,但由于该方法的数学基础是对数障碍函数法,因此它不仅要求迭代始终为“内点”,而且要求迭代点要保持在一个所谓的中心路径邻域以内,否则就会使所求解的方程组变为病态。因此,内点法的算法设计,就产生了一对矛盾,欲提高算法效率,迭代中应采用大步长,而要满足中心化(centering)要求,又必须限制步长,故在算法设计方面必须非常仔细,以在上述两个方面达到一个合理的平衡。对于一般工程技术人员而言,很难把握这个分寸,即便能够编制出一个可实现的算法,其计算效率也不会达到预期的效果。

本文提出的基于 NCP 函数的非内点光滑化算法,是针对求解大型线性和非线性互补问题的一种通用方法,该方法直观易懂,而且实现起来非常简单,只需有一个求解光滑非线性方程组的子程序,就可方便地嵌入现有的结构分析程序,从而大大地方便了一般工程人员使用。近几年,NCP 函数方法在求解互补问题的算法研究方面开始受到了重视(见综述类文献[14, 15]),一个重要原因是利用 NCP 函数可以将互补问题的求解方便地转化为与之等价的方程组 $\Phi(x, y) = 0$ 的求解。视其 NCP 函数的可微性质,所得到的方程组可以是可微的或不可微的。虽然存在可微的 NCP 函数,但在计算上并不受欢迎,因为方程组在退化解 (x^*, y^*) 处(退化解 (x^*, y^*) 是指对某个下标 i ,有 $(x_i^* = y_i^* = 0)$ 的雅可比矩阵是奇异的^[12, 15]。虽然由不可微的 NCP 函数得到的方程组是非光滑的,不能直接使用牛顿法求解,但可以通过适当的光滑化(smoothing)方法得到近似的光滑方程组 $\Phi_\mu(x, y) = 0$,随着正的光滑参数 μ 趋于零,这个光滑方程组就能够以任意精度逼近原来的非光滑方程组。这种光滑化方法以其实现容易和高的计算效率,近几年受到额外关注,视其使用的不同 NCP 函数,也就导致了不同的算法^[16-18]。

本文基于参数变分原理的思想将三维弹性摩擦接触问题的分析归结为参数二次规划问题,而其中控制参数的确定被化为标准的线性互补问题。我们的算法基于不可微的 NCP 函数 $\phi(a, b) = \min\{a, b\}$,然后采用凝聚函数对其进行一致光滑逼近^[19],这样就把由接触问题得到的互补问题的求解转化为非线性光滑方程组的求解。本文给出了线性互补问题的非内点光滑算法的详细描述,并给出算例以证明算法的正确性与有效性。

1 接触问题的基本方程

对于空间弹性摩擦接触问题,在小变形理论的假设下,其基本方程可表述如下:

平衡方程

$$d\sigma_{ij,j} + db_i = 0. \quad (1)$$

协调方程

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}). \quad (2)$$

本构方程

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\epsilon_{kl}. \quad (3)$$

边界条件

$$\begin{cases} n_i d\sigma_{ij} = d\bar{p}_i & (S_p \text{ 上}), \\ du_i = d\bar{u}_i & (S_u \text{ 上}), \\ du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^* \geq 0, & p_n \leq 0, \\ p_n (du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^*) = 0, & (S_c \text{ 上}), \\ |p_\tau| < -\mu p_n \Rightarrow |du_\tau^{(1)} - du_\tau^{(2)}| = 0, \\ |p_\tau| = -\mu p_n \Rightarrow |du_\tau^{(1)} - du_\tau^{(2)}| \geq 0; \end{cases} \quad (4)$$

其中各参数与变量的物理意义与传统的使用记法相同,或参见文献[3,7]的描述,不再重复.

2 接触问题的参数二次规划法

空间弹性接触面 S_c 上的边界条件与平面接触问题不同,Coulomb 摩擦定律应在全圆周上表示,这也是该问题的一个难点. 其形式为

$$\begin{cases} C_\infty(p_n) = \{p_\tau: f = |p_\tau| + \mu p_n \leq 0\}, \\ p_\tau = p_{\tau_1} i + p_{\tau_2} j. \end{cases} \quad (5)$$

为建立线性互补方程,式(5)的离散形式可表为

$$C_{N_f}(p_n) = \{p_\tau: f_i(p_\tau, p_n) \leq 0, i = 1, 2, \dots, N_f\}, \quad (6a)$$

$$f_i = [\cos\alpha_i, \sin\alpha_i, \mu] \begin{Bmatrix} p_{\tau_1} \\ p_{\tau_2} \\ p_n \end{Bmatrix} \leq 0, \quad (6b)$$

为表示 S_c 上的非穿透条件,引入惩罚因子 E_τ, E_n 与接触应变定义

$$d\epsilon_c = d\epsilon_c^e + d\epsilon_c^p, \quad dp_c = D_c(d\epsilon_c - d\epsilon_c^p), \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} d\epsilon_c = [d\epsilon_{\tau_1}, d\epsilon_{\tau_2}, d\epsilon_n]^T, \\ dp_c = [dp_{\tau_1}, dp_{\tau_2}, dp_n]^T, \\ D_c = \begin{bmatrix} E_\tau & 0 & 0 \\ 0 & E_\tau & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{bmatrix}, \\ d\epsilon_{\tau_1} = du_{\tau_1}^{(1)} - du_{\tau_1}^{(2)} = \Delta u_{\tau_1}, \\ d\epsilon_{\tau_2} = du_{\tau_2}^{(1)} - du_{\tau_2}^{(2)} = \Delta u_{\tau_2}, \\ d\epsilon_n = du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^* = \Delta u_n + \delta^*. \end{cases} \quad (8)$$

这里 δ^* 为增量步初始间隙. 通过定义接触面滑动“屈服”函数 \tilde{f}_i 和“流动”势函数 \tilde{g}_i

$$\begin{cases} \tilde{f}_i = p_{\tau_1} \cos\alpha_i + p_{\tau_2} \sin\alpha_i + \mu p_n \leq 0, \\ \tilde{g}_i = p_{\tau_1} \cos\alpha_i + p_{\tau_2} \sin\alpha_i - c, & (i = 1, 2, \dots, N_f), \\ \tilde{f}_{N_f+1} = p_n \leq 0, \quad \tilde{g}_{N_f+1} = p_n \end{cases} \quad (9)$$

则滑动应变可表示为

$$d\epsilon_c^p = \sum_{i=1}^{N_f+1} \tilde{\lambda}_i \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial p_c} = \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial p_c} \right) \tilde{\lambda} \quad (\tilde{\lambda} \geq 0). \quad (10)$$

如此可将 S_c 上的接触边界条件演变成

$$\tilde{f}_k^0 + \tilde{W}_k d\boldsymbol{\varepsilon}_c - \tilde{M}_k \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \leq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N_f + 1, \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}), \quad (11)$$

其中

$$\tilde{W}_k = \left[\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \mathbf{p}_c} \right]^T \mathbf{D}_c, \quad \tilde{M}_k = \left[\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \mathbf{p}_c} \right]^T \mathbf{D}_c \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{p}_c} \right]^T. \quad (12)$$

如此可建立空间弹性接触分析的参变量最小势能原理:在所有满足应变位移关系与位移边界条件的可能位移增量场中,真实解使势能

$$\begin{aligned} \Pi[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)] = & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} d\mathbf{u}_{i,j} D_{ijkl} d\mathbf{u}_{k,l} - d\mathbf{b}_i d\mathbf{u}_i \right] d\Omega + \\ & \int_{S_c} \left[\frac{1}{2} d\boldsymbol{\varepsilon}_{ci} D_{cij} d\boldsymbol{\varepsilon}_{cj} - \tilde{\lambda}_\alpha \tilde{R}_{k\alpha} d\boldsymbol{\varepsilon}_{ck} \right] dS - \int_{S_p} d\bar{\mathbf{p}}_i d\mathbf{u}_i dS, \end{aligned} \quad (13)$$

在状态方程(11)的控制下取极小值. 其中

$$\begin{cases} \tilde{R}_{k\alpha} = \frac{\partial \tilde{g}_\alpha}{\partial \mathbf{p}_{ci}} D_{cik}, \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_c = [d\varepsilon_{c_1}, d\varepsilon_{c_2}, d\varepsilon_{c_3}]^T = [d\varepsilon_{\tau_1}, d\varepsilon_{\tau_2}, d\varepsilon_{\tau_3}]^T, \\ d\mathbf{p}_c = [dp_{c_1}, dp_{c_2}, dp_{c_3}]^T = [dp_{\tau_1}, dp_{\tau_2}, dp_{\tau_3}]^T, \\ D_{cij} = \delta_{ij} E_\tau = \delta_{ij} E_n = \delta_{ij} E. \end{cases} \quad (14)$$

基于上述变分原理,可建立一套针对空间弹性问题分析的有限元列式. 设区域划分的单元个数 N_e , 自由度数 N_u , 接触单元个数 N_c , 接触状态方程共有 m_c 个, 则全部控制方程个数为 $m_f = m_c$. 通过单元离散插值, 式(13)化为

$$\Pi[\boldsymbol{\lambda}'(\cdot)] = \frac{1}{2} d\mathbf{u}^T \mathbf{K} d\mathbf{u} - d\mathbf{u}^T (\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\lambda}' + \mathbf{p}), \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e + \sum_{e=1}^{N_c} \mathbf{K}_e^c \in R^{N_u \times N_u}, \quad \mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{K}_e^c = \int_{S_c^e} \mathbf{N}^T \mathbf{D}_c \mathbf{N} dS, \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_\delta \in R^{N_u \times 1}, \quad \mathbf{p}_\delta = \sum_{e=1}^{N_c} \mathbf{K}_e^c \boldsymbol{\delta}_e^*, \\ \mathbf{p}_0 = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T d\mathbf{b} d\Omega + \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T d\bar{\mathbf{p}} dS \right\}, \\ \boldsymbol{\Phi} = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_p^e} \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{R}}^T dS \in R^{N_u \times m_f}, \quad \boldsymbol{\lambda}' = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \end{cases} \quad (16)$$

而式(11)的离散形式为

$$\begin{cases} \mathbf{C} d\mathbf{u} - \mathbf{U} \boldsymbol{\lambda}' - \mathbf{t} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}'^T \boldsymbol{\lambda}', \mathbf{v}' \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}' \geq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \tilde{\mathbf{W}}_e \mathbf{N} dS \in R^{m_f \times N_u}, \quad \mathbf{U} = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \tilde{\mathbf{M}}_e dS \in R^{m_f \times m_f}, \\ \mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_\delta, \quad \mathbf{t}_\delta = - \left(\sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \tilde{\mathbf{W}}_e dS \right) \boldsymbol{\delta}_e^*, \quad \mathbf{t}_0 = - \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} \tilde{f}_0^e dS. \end{cases} \quad (18)$$

式(15), (17)实际上构成了一个二次规划问题, 将其演变为下列问题的求解

$$\begin{cases} v' - (U - CK^{-1}\Phi)\lambda' = -CK^{-1}P_0 + t_0 - (U - CK^{-1}\Phi)\delta_c^*, \\ v'^T\lambda' = 0, v' \geq 0, \lambda' \geq 0, \end{cases} \quad (19)$$

注意到初始缝隙 δ_c^* 已由位移空间转化到控制参数 λ' 对应的空间上了。

3 接触问题的光滑方程组表达

3.1 互补问题和 NCP 函数

首先给出互补问题的定义：

定义 3.1 设映射 $F: R^n \rightarrow R^n$ 连续可微, 非线性互补问题是指求矢量 $x \in R^n$, 使得下面关系

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0 \quad (20)$$

成立, 记为 $NCP(F)$. 若 F 是线性映射, 即 $F(x) = Mx + q$ ($M \in R^{n \times n}$, $q \in R^n$) 时, (20) 就退化为线性互补问题, 记为 $LCP(M, q)$.

根据上述定义, 不难看出(19)是标准的线性互补问题, 说明基于参变量变分原理, 利用参数二次规划法, 空间弹性摩擦接触问题的求解最终化为标准的线性互补问题的求解. 为研究方便, 将(19)表示为如下的形式:

$$\begin{cases} (i) \quad Mx + q - y = 0, \\ (ii) \quad x \geq 0, y \geq 0, x^T y \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

其中,

$$\begin{cases} M := U - CK^{-1}\Phi, \\ q := -CK^{-1}P_0 + t_0 - (U - CK^{-1}\Phi)\delta_c^*, \\ x := \lambda', \\ y := v', \end{cases} \quad (22)$$

并用 n 表示 m_f .

接下来给出 NCP 函数的定义:

定义 3.2 若函数 $\phi: R^2 \rightarrow R$ 满足下列等价关系 $\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$, 则称 ϕ 为 NCP 函数. 下面是几个常用的 NCP 函数:

$$(a) \quad \phi(a, b) = \min\{a, b\}, \quad (23a)$$

$$(b) \quad \phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b), \quad (23b)$$

$$(c) \quad \phi(a, b) = -ab + \frac{1}{2}\min^2\{0, a + b\}. \quad (23c)$$

NCP 函数(a)叫最小函数, 在 $a = b$ 时不可微; (b) 叫 Fischer - Burmeister 函数, 在点 $a = b = 0$ 不可微; (c) 是在整个 R^2 空间可微分的函数.

对任意给定的 NCP 函数 ϕ , 定义映射 $\Phi: R^n \rightarrow R^n$ 如下:

$$\Phi(x, y) := \begin{pmatrix} \phi(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n, y_n) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

这里 $y = F(x)$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$, $y = [y_1, \dots, y_n]^T \in R^n$, 称 Φ 为对应于 ϕ 的方程算子. 下面给出一个结论:

命题 3.1^[15] 设 ϕ 为一个 NCP 函数, Φ 为如(24)定义的方程算子, 则 (x^*, y^*) 是非线性互补问题的解的充要条件是 (x^*, y^*) 是非线性方程组 $\Phi(x, y) = 0$ 的解.

本文利用 NCP 函数 $\phi(a, b)$, 即 $\phi(a, b) = \min\{a, b\}$ 来代替线性互补问题(21)中的条件(ii), 设函数 H 为

$$H(x, y) := \begin{cases} Mx - y + q \\ \Phi(x, y) \end{cases}, \quad (25)$$

其中 $\Phi(x, y) := (\phi(x_1, y_1), \dots, \phi(x_n, y_n))^T \in R^n$, $\phi(x_i, y_i) = \min(x_i, y_i)$ ($i = \{1, \dots, n\}$).

由定理 3.1 知, 向量 (x^*, y^*) 满足线性互补问题(21) 当且仅当 (x^*, y^*) 是方程组

$$H(x, y) = 0 \quad (26)$$

的解.

3.2 凝聚函数光滑化方法

因为 NCP 函数 $\phi(a, b) = \min\{a, b\}$ 是不可微的, 所以方程组(26)是不光滑的, 这样就不能用经典的牛顿型方法求解. 但是, 我们可以给出该函数的光滑化近似.

显然, 下面的关系是成立的:

$$\phi(a, b) := \min\{a, b\} = -\max\{-a, -b\}, \quad (27)$$

所以采用[19]中介绍的凝聚函数, 对(27)式的 \max 函数光滑后, 便得到此 NCP 函数的一致光滑近似函数

$$\phi_\mu(a, b) = -\mu \cdot \ln\{\exp(-a/\mu) + \exp(-b/\mu)\}. \quad (28)$$

定理 3.1 将给出光滑近似函数 $\phi_\mu(a, b)$ 对 NCP 函数 $\phi(a, b) = \min\{a, b\}$ 的逼近情况.

定理 3.1 对于 NCP 函数 $\phi(a, b)$, 存在一个正常数 c , 使得对任意 $(a, b) \in R^2$, 任意光滑参数 $\mu > 0$, 都有

$$|\phi(a, b) - \phi_\mu(a, b)| \leq c\mu,$$

其中 c 与 μ 及 (a, b) 无关.

证明 由于 $\phi(a, b) = \min\{a, b\} = -\max\{-a, -b\}$, 根据[19]中的定理 3 有

$$\max\{-a, -b\} \leq \mu \cdot \ln\{\exp(-a/\mu) + \exp(-b/\mu)\} \leq \max\{-a, -b\} + (\ln 2)\mu.$$

所以 $-\max\{-a, -b\} - (\ln 2)\mu \leq -\mu \cdot \ln\{\exp(-a/\mu) + \exp(-b/\mu)\} \leq -\max\{-a, -b\}$,

再考虑到(27)和(28)两式, 便得到

$$\phi(a, b) - (\ln 2)\mu \leq \phi_\mu(a, b) \leq \phi(a, b),$$

故结论成立, 其中 $c = \ln 2$.

对函数 H 定义式中 $\Phi(x, y)$ 的每一个分量函数 $\phi(x_i, y_i)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) 都用相应的光滑近似函数 $\phi_\mu(x_i, y_i) = -\mu \cdot \ln\{\exp(-x_i/\mu) + \exp(-y_i/\mu)\}$ 来代替, 则有

$$H_\mu(x, y) := \begin{cases} Mx - y + q \\ \Phi_\mu(x, y) \end{cases}, \quad (29)$$

其中 $\Phi_\mu(x, y) := (\phi_\mu(x_1, y_1), \dots, \phi_\mu(x_n, y_n))^T \in R^n$. 相应地有如下的光滑方程组

$$H_\mu(x, y) = 0. \quad (30)$$

至此, 把由接触问题得到的线性互补问题(21)的求解转换为非线性光滑方程组的求解.

∴ 关于光滑函数 $H_\mu(x, y)$ 对 $H(x, y)$ 的逼近情况及方程组(30)的解的存在性和唯一性分析及证明可参阅文献[16~18].

4 基于 NCP 函数的非内点光滑化算法

非内点光滑化算法的基本思想是: 对每一个给定的光滑参数 $\mu > 0$, 近似地解光滑方程组

$H_\mu(x, y) = 0$, 并将参数 μ 逐渐下降到零. 期望参数 μ 趋于零时, 光滑方程组的解趋向非光滑方程组 $H_\mu(x, y) = 0$ 的解.

算法 4.1

参数设置: 取线搜索参数 $\lambda \in (0, 0.5)$, $\eta \in (0, 1)$; 光滑参数更新所需参数 $\gamma > 0$, $\theta \in (0, 1)$; 结束精度参数 $\epsilon > 0$.

步骤 0 (初始化): 给初始点 x^0 , 置 $y^0 := Mx^0 + q$, 光滑参数 $\mu_0 = |q|/n$, 置迭代步 $k := 0$.

步骤 1 (终止准则): 如果 $\|\min\{x^k, y^k\}\| \leq \epsilon$, 则停止.

步骤 2 (求牛顿方向): 解线性方程组

$$H'_{\mu_k}(x^k, y^k)(\Delta x, \Delta y)^T = -H_{\mu_k}(x^k, y^k), \quad (31)$$

得到牛顿方向 $(\Delta x^k, \Delta y^k) \in R^n \times R^n$.

步骤 3 (搜索步长): 通过线搜索确定步长 $r_k = \eta^{l_k}$, 其中 l_k 是使如下不等式关于 $l = 0, 1, 2, \dots$ 成立的最小非负整数

$$\|H_{\mu_k}(x^k + \eta^l \Delta x^k, y^k + \eta^l \Delta y^k)\|^2 \leq (1 - \lambda \eta^l) \|H_{\mu_k}(x^k, y^k)\|^2. \quad (32)$$

置 $x^{k+1} := x^k + r_k \Delta x^k$, $y^{k+1} := y^k + r_k \Delta y^k$.

步骤 4 (参数 μ_k 的更新): 若 $\|\Phi_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1})\| \leq \gamma$, 则 $\mu_{k+1} := \theta \mu_k$, 否则 $\mu_{k+1} := \mu_k$, 置 $k := k + 1$, 回到步骤 1.

算法 4.1 有两条明显的性质: 其一是因初始点 (x^0, y^0) 满足 $y^0 = Mx^0 + q$, 则每步迭代产生的 (x^k, y^k) 都满足 $y^k = Mx^k + q$; 二是迭代序列 (x^k, y^k) 正负都可以, 不必限制它们是内点 (即 $(x^k, y^k) > 0$).

另外, 虽然算法描述中的线性方程组(31)是 $2n$ 维的, 但在程序实现时可以通过系数矩阵的特点将它降为 n 维的, 这样可大大节省存储空间.

5 数值算例

5.1 线性互补问题标准考题测试

例 5.1.1 Fathi 问题^[18,20].

本例题中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 5 & 6 & \cdots & 6 \\ 2 & 6 & 9 & \cdots & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 6 & 9 & \cdots & 4(n-1)+1 \end{bmatrix}, \quad q = (-1, \dots, -1)^T$$

为 n 个变量, M 是对称正定矩阵, 其解为: $x^* = (1, 0, \dots, 0)^T$, $y^* = (0, 1, \dots, 1)^T$. 其数值结果见表 1. 表中各参数的意义分别为: m 指迭代次数; t 为运算所需机时, 以秒为计算单位, 其中不包括读入数据的时间.

例 5.1.2 Murty 问题^[18,20].

这个问题用 Lemke 算法计算时其迭代次数是呈指数增长的.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad q = (-1, \dots, -1)^T,$$

其解为 $x^* = (1, 0, \dots, 0)^T, y^* = (0, 1, \dots, 1)^T$. 其数据结果见表 1.

表 1 例 5.1.1 和例 5.1.2 的计算结果

维数 n	例 5.1.1		例 5.1.2	
	迭代次数 m	机时 t/s	迭代次数 m	机时 t/s
32	7	0.100 0	2	0.030 0
64	9	0.191 0	2	0.040 0
128	10	0.511 0	2	0.060 0
256	11	5.197 0	2	0.501 0
512	12	27.183	2	2.354 0

例 5.1.3 Harker-Pang 问题^[18,20].

本例题的矩阵 M 是这样生成的: $M = A^T A + B + \text{diag}(d)$, 其中 $A, B \in R^{n \times n}, q, d \in R^n$, 它们都是随机生成的, 且满足 $a_{ij}, b_{ij} \in (-5, 5), q_i \in (-500, 500), d_i \in (0.0, 0.3), B$ 是反对称矩阵. 这样 M 是 P - 矩阵(即矩阵的各阶主子式都大于零). 对维数为 50, 100, 150, 200, 250 时进行了计算, 每种维数分别随机生成了 10 组数据, 共计算了 50 个算例, 得到的最大迭代次数(max m)、最小迭代次数(min m)及平均迭代次数(ave m)如表 2 示. 从表 2 中可以看出, 随着变量个数的增加, 迭代次数增加得非常缓慢. 这是人们认为互补问题的光滑方程组法有潜力求解大规模问题的一个原因.

表 2 例 5.1.3 的计算结果

维数 n	50			100			150			200			250		
	max m	ave m	min m	max m	ave m	min m	max m	ave m	min m	max m	ave m	min m	max m	ave m	min m
迭代次数 m	7	5.5	4	6	5.8	5	6	5.5	5	8	6	5	8	6.4	5

5.2 接触问题分析

例 5.2.1 弹性冲头和弹性基础的接触问题分析^[21]

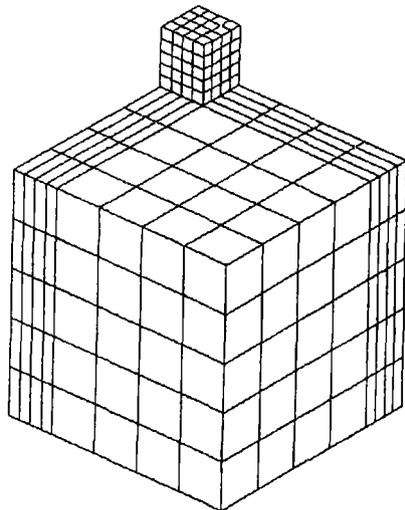


图 1 弹性冲头与弹性基的接触

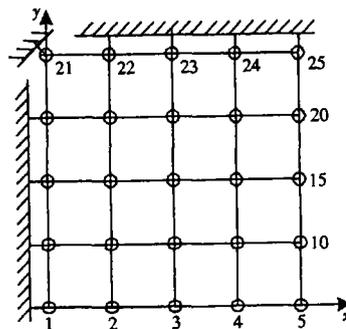


图 2 接触区域的离散

集中载荷作用在冲头的中心位置. 由于对称性, 只考虑整个结构的 1/4, 如图 1 所示, 这部分冲头和基础的大小分别为 $20 \times 20 \times 25(\text{mm}^3)$ 和 $100 \times 100 \times 100(\text{mm}^3)$. 它们的弹性模量为 200 GPa, 泊松比为 0.3, 两接触面间的摩擦因数取 0.3.

接触区域离散了 25 个接触单元,如图 2 所示. 计算时集中载荷取 981N. 通过计算可知,对所有可能的 25 个接触点,法向相对位移为零,法向接触压力小于零,这说明 25 个接触单元都处于接触状态.

表 3 列出了节点 16 到 20 的一些数值结果,它们分别是切向接触应力、法向接触应力以及切向力和切向位移的方向角.

表 3 例 5.2.1 的计算结果

节点	$\sigma_{r1}/(Mpa)$	$\sigma_{r2}/(Mpa)$	$\sigma_n/(Mpa)$	$\theta_r(^{\circ})$	$\theta_u(^{\circ})$
16	0.000 00	-0.863 5	-2.878 3	270.00	270.00
17	0.574 1	-0.574 1	-2.706 3	315.00	315.00
18	0.630 8	-0.261 3	-2.276 0	337.50	329.57
19	0.562 9	-0.233 2	-2.031 0	337.50	338.80
20	0.503 6	-0.208 6	-1.187 0	337.50	344.83

例 5.2.2 长方体梁和刚性基的接触问题分析^[21]

如图 3 所示,梁的横截面为 $10 \times 120 \text{ mm}^2$,其长度为 500 mm,以其窄的一面(即 $10 \times 500 \text{ mm}^2$ 的面)平放在刚性基上. 1992N 的施压加在梁的中部,弹性模量为 9500 MPa ,泊松比为 0.3,摩擦系数取 0.3.

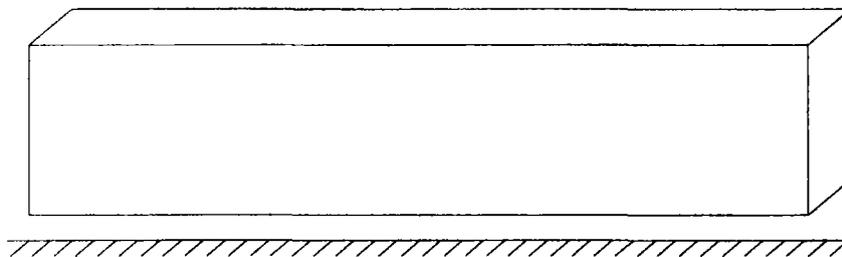


图 3 梁和刚性基的接触

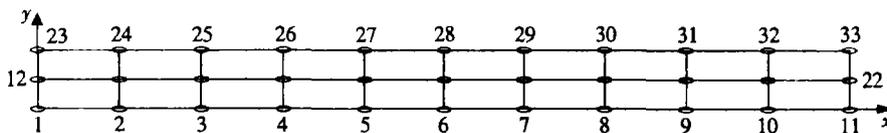


图 4 接触区域的离散

将梁的接触区域离散了 33 个接触点对,见图 4. 计算结果表明梁的两端和刚性基没有接触,三排接触点 1~11、12~22、23~33 间的法向接触应力值的差别非常小,见图 5.

6 结 论

本文针对空间弹性接触问题分析给出基于 NCP 函数的互补问题的非内点光滑化算法,采用的是凝聚函数光滑化方法. 该算法不仅思想简单,而且具有精度高、存储少、收敛快等优点. 本文在给出具体算法过程描述的基础上,通过数值算例说明了所给出的光滑算法的有效性.

非线性力学中除了接触问题中包含有不等式和互补关系,还有其它力学问题(如弹塑性问题等)中也涉及不等式和互补条件(线性互补或非线性互补),我们总可以考虑将它们用等价的非线性光滑方程组来代替,由此使这类问题可以通过本文的算法加以求解. 尤其当这类力学问题的规模较大时,本光滑算法的优势会更加明显. 所以,深入的研究与进一步的广泛应用是

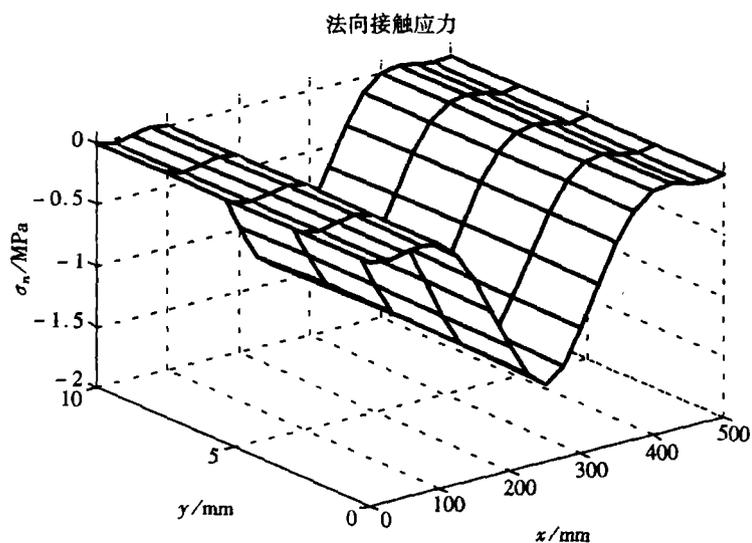


图5 接触区域的法向接触应力分布

十分必要的。

[参 考 文 献]

- [1] Demyanov V F, Stavroulakis G E, Polyakova L N. *Quasidifferentiability and Nonsmooth Modeling in Mechanics, Engineering and Economics* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] Kikuchi N, Oden J T. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods* [M]. Philadelphia: SIAM, 1988.
- [3] 钟万勰,张洪武,吴承伟.参变量变分原理及其在工程中的应用[M].北京:科学出版社,1997.
- [4] 陈国庆,陈万吉,冯恩民.三维接触问题非线性互补原理及算法[J].中国科学(A辑),1995,25(11):1181—1190.
- [5] 李学文,陈万吉.三维接触问题的非光滑算法[J].计算力学学报,2000,17(1):43—49.
- [6] Christensen P W, Klarbring A, Pang J S, et al. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998,42:145—173.
- [7] ZHANG Hong-wu, ZHONG Wan-xie, GU Yuan-xian. A combined parametric quadratic programming and iteration method for 3D elastic-plastic frictional contact problem analysis[J]. *Comput Meths Appl Mech Engrg*, 1998,155: 307—324.
- [8] ZHANG Hong-wu. Parametric variational principle for elastic-plastic consolidation analysis of saturated porous media[J]. *Int J Numer Anal Meths Geomechanics*, 1995,19: 851—867.
- [9] ZHANG Hong-wu, Schrefler B A. Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media: one dimensional model[J]. *European Journal of Solid Mechanics, A/Solids*, 2000,19(3): 503—524.
- [10] ZHANG Hong-wu, Galvanetto U, Schrefler B A. Local analysis and global nonlinear behaviour of periodic assemblies of bodies in elastic contact[J]. *Computational Mechanics*, 1999,24(4): 217—229.
- [11] 张洪武,顾元宪,钟万勰.传热与接触两类问题耦合作用的有限元分析[J].固体力学学报,2000,21(3):217—224.
- [12] Billups S C, Murty K G. Complementarity problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000,124:303—318.
- [13] Wright S. J. *Primal-Dual Interior-Point Methods* [M]. Philadelphia: SIAM Publications, 1997.

- [14] 修乃华,高自友. 互补问题算法的新进展[J]. 数学进展,1999,28(3):193—210.
- [15] Ferris M C, Kanzow C. Complementarity and related problems: A survey[A]. In: Pardalos P M, Resende M G C Eds; *Handbook on Applied Optimization* [C]. New York: Oxford University Press, 2002,514—530.
- [16] CHEN Chun-hui, Mangasarian O L. Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems[J]. *Mathematical Programming*, 1995,71: 51—69.
- [17] CHEN Bing-tong, XIU Nai-hua. A Global linear and local quadratic non-interior continuation method for nonlinear complementarity problems based on Chen-Mangasarian smoothing functions[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 1999,9:605—623.
- [18] Burke J V, XU Song. The global linear convergence of a non-interior path following algorithm for linear complementarity problems[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1998,23:719—734.
- [19] 李兴斯. 一类不可微优化问题的有效解法[J]. 中国科学, A辑, 1994,24(4):371—377.
- [20] Kanzow C. Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems[J]. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1996,17(4):851—868.
- [21] Buczkowski R, Kleiber M. Elasto-plastic interface model for 3D-frictional orthotropic contact problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997,40:599—619.

Non-Interior Smoothing Algorithm for Frictional Contact Problems

ZHANG Hong-wu, HE Su-yan, LI Xing-si

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: A new algorithm for solving the three-dimensional elastic contact problem with friction is presented. The algorithm is a non-interior smoothing algorithm based on an NCP-function. The parametric variational principle and parametric quadratic programming methods were applied to the analysis of three-dimensional frictional contact problem. The solution of the contact problem was finally reduced to a linear complementarity problem, which was reformulated as a system of nonsmooth equations via an NCP-function. A smoothing approximation to the nonsmooth equations was given by the aggregate function. A Newton method was used to solve the resulting smoothing nonlinear equations. The algorithm presented is easy to understand and implement. The reliability and efficiency of this algorithm are demonstrated both by the numerical experiments of LCP in mathematical way and the examples of contact problems in mechanics.

Key words: three-dimensional frictional contact problem; parametric quadratic programming method; linear complementarity problem; NCP-function; aggregate function; non-interior smoothing algorithm