文章编号: 1000-0887(2009) 04-0495-10

依赖于一阶导数的 $(n-1, 1)$ 共轭 m 点边值问题正解的存在性*

纪玉德, 郭彦平, 禹长龙

(河北科技大学 理学院, 石家庄 050018)

(郭兴明推荐)

摘要: 利用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理的推广定理, 讨论了一类边值问题, 给出了相应依赖于一阶导数的非线性 n 阶 m 点边值问题至少一个正解的存在性. 对于 n 阶 m 点边值问题, 给出了相应的 Green 函数, 证明了在非线性项 f 满足一定的增长条件下至少存在 1 个正解. 并且给出了一个例子来说明所获得的结果.

关 键 词: Green 函数; 锥上的不动点定理; 正解; 高阶微分方程

中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

在许多的不同应用数学和应用物理方面提出了常微分方程多点边值问题. Il'in 和 Moiseev[1-2] 首先对二阶线性常微分方程多点边值问题进行了研究. 自那以后, 非线性二阶多点边值问题已经被许多作者进行了研究. 相关的可参考文献[3-8]. 最近, 在文献[9]中, Guo 利用 Krasnoselskii's 不动点定理的推广定理, 获得了二阶三点边值问题

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x, x') = 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = 0, \ x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases}$$

至少存在 1 个正解. 其中 $\alpha > 0$, $\eta \in (0, 1)$, $\alpha\eta < 1$, 并且 f 是非负连续函数. 这篇文章是允许非线性项 f 依赖于 x 的一阶导数所获得正解的少量工作之一.

对于非线性 n 阶三点边值问题

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + a(t)f(u) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \ u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, \ u(1) = \alpha u(\eta), \end{cases}$$

$n \geqslant 2$, $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha\eta^{n-1} < 1$, $f(t) \in C([0, 1], [0, \infty))$ 是超线性的或次线性的. Eloe 和 Ahmad[10] 利用 Krasnoselskii's 不动点定理讨论了至少 1 个正解的存在性. 受文献[9-10]的启发, 本文主要研究非线性 n 阶 m 点边值问题

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + f(t, u, u') = 0, & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \ u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, \ u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) \end{cases} \tag{1}$$

* 收稿日期: 2008-04-10; 修订日期: 2009-02-14
基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(A2006000298)
作者简介: 纪玉德(1979—), 男, 内蒙古赤峰人, 讲师, 硕士(联系人. E-mail: jiyude-1980@163.com).

正解的存在性,其中 $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, m-2)$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{m-2} < \xi_{m-1} = 1$, $0 < \sum_{i=1}^{m-2} k_i \xi_i^{n-1} < 1$ 并且 $f: [0, 1] \times [0, \infty) \times \mathbf{R} \to [0, \infty)$ 是连续的. 我们将赋予非线性项 f 一定的增长条件,保证非线性 n 阶 m 点边值问题(1)至少存在1个正解. 为了获得我们的结果,我们首先给出边值问题(1)相关的 Green 函数,其次通过利用 Krasnoselskii 不动点定理的推广定理和 Green 函数的性质,证明了边值问题(1)至少存在1个正解.

在这篇文章中假设如下条件成立:

(H_1) $n \geqslant 2$, $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, m-2)$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{m-2} < \xi_{m-1} = 1$, 并且 $0 < \sum_{i=1}^{m-2} k_i \xi_i^{n-1} < 1$;

(H_2) $f: [0, 1] \times [0, \infty) \times \mathbf{R} \to [0, \infty)$ 是连续的.

1 预备知识

定义 1.1 设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的 Banach 空间. 称一个非空闭凸集合 $K \subset E$ 是一个锥,如果

(i) $au \in K$ 对于所有的 $u \in K$ 和所有的 $a \geqslant 0$ 成立;

(ii) $u, -u \in K$ 必有 $u = 0$.

定义 1.2 称 α 是 K 上的非负连续凹泛函,如果 $\alpha: K \to [0, \infty)$ 是连续的,且对所有 $x, y \in K$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\alpha(tx + (1-t)y) \geqslant t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y)$. 称 γ 是 K 上的非负连续凸泛函,如果 $\gamma: K \to [0, \infty)$ 是连续的,且对所有 $x, y \in K$ 和 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma(tx + (1-t)y) \leqslant t\gamma(x) + (1-t)\gamma(y)$.

设 K 为 E 上的锥, α, β 为 $E \mapsto \mathbf{R}^+$ 上的两个连续凸泛函,满足 $\alpha(\lambda x) = |\lambda| \alpha(x)$, $\beta(\lambda x) = |\lambda| \beta(x)$, $\forall x \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 并且 $\|x\| \leqslant M \max\{\alpha(x), \beta(x)\}$, $x \in E$ 且 $\alpha(x) \leqslant \alpha(y)$, $x, y \in K$, $x \leqslant y$, 其中 $M > 0$ 是1个常数.

定理 1.1(最大值原理)[11] 设 $n \geqslant 2$, $h(t) \in C^{(n)}[a, b]$ 满足 $h^{(n)}(t) \leqslant 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, 并且

$$h^{(k)}(a) \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-2, \tag{2}$$

$$h(b) \geqslant 0, \tag{3}$$

则 $h(t) \geqslant 0$, $a \leqslant t \leqslant b$. 另外,如果在 $[a, b]$ 的任何一个非平凡的紧子区间上 $h^{(n)}(t) < 0$, 或者如果式(2)和(3)之一是严格的不等式,则 $h(t) > 0$, $a < t < b$.

定理 1.2[9] 设 $r_2 > r_1 > 0$, $L > 0$ 是常数,并且

$$\Omega_i = \{x \in E \mid \alpha(x) < r_i, \beta(x) < L\}, \qquad i = 1, 2$$

是 E 上的两个有界开集,令

$$D_i = \{x \in E \mid \alpha(x) = r_i\}, \qquad i = 1, 2.$$

另外假设 $T: K \mapsto K$ 是一个全连续的算子且满足

(A_1) $\alpha(Tu) < r_1$, $u \in D_1 \cap K$; $\alpha(Tu) > r_2$, $u \in D_2 \cap K$;

(A_2) $\beta(Tu) < L$, $u \in K$;

(A_3) 存在一个 $p \in (\Omega_2 \cap K) \setminus \{0\}$ 使 $\alpha(p) \neq 0$ 且 $\alpha(x + \lambda p) \geqslant \alpha(x)$, $x \in K$, $\lambda \geqslant 0$.

则 T 在 $(\Omega_2 \setminus \Omega_1) \cap K$ 上至少有1个不动点.

2 预备引理

引理 2.1 设 $\sum_{i=1}^{m-2} k_i \xi_i^{n-1} \neq 1$, 则对于 $y(t) \in C[0, 1]$, 边值问题

$$\begin{cases} u^{(n)}(t)+y(t)=0, & t\in(0,1), \\ u(0)=0,\ u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0,\ u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}k_iu(\xi_i) \end{cases} \tag{4}$$

有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s+\frac{t^{n-1}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\int_0^1\frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s-\frac{t^{n-1}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s.$$

证明　设

$$u(t)=-\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s+At^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}A_it^i+B.$$

因为 $u^{(i)}(0)=0$, $i=0,1,2,\cdots,n-2$, 我们得到 $B=0$ 和 $A_i=0$, $i=1,2,\cdots,n-2$. 现在我们通过 $u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}k_iu(\xi_i)$ 来解 A. 由于

$$-\int_0^1\frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s+A=\sum_{i=1}^{m-2}k_i\left(-\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s+A\xi_i^{n-1}\right),$$

我们得到

$$A=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\int_0^1\frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s.$$

因此, 式(4) 有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s+\frac{t^{n-1}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\int_0^1\frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s-\frac{t^{n-1}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{n-1}}{(n-1)!}y(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2.2　设 $0<\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}<1$, 如果 $y(t)\in C[0,1]$ 且 $y(t)\geqslant 0$, $t\in(0,1)$, 则边值问题(4) 的唯一解 $u(t)$ 满足

$$\min_{t\in[\xi_{m-2},1]}u(t)\geqslant\gamma\|u\|, \tag{5}$$

其中　$\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$,　$\gamma=\min\left\{\frac{k_{m-2}(1-\xi_{m-2})}{1-k_{m-2}\xi_{m-2}},\ k_{m-2}\xi_{m-2}^{n-1},\ k_1\xi_1^{n-1},\ \xi_{m-2}^{n-1}\right\}$.

证明　我们将给出 $u(t)$ 满足严格的微分不等式 $u^{(n)}(t)<0$, $0<t<1$ 情形的详细证明. 一旦式(5) 在这种情形下被获得, 我们假设 $u(t)$ 满足微分不等式并且令

$$u(\varepsilon,t)=u(t)+\varepsilon t^{n-1}\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}-t\right),$$

则对于 $\varepsilon > 0$, $u(\varepsilon, t)$ 满足严格的微分不等式. 对 $\varepsilon \to 0^+$ 取极限, 表明 $u(t)$ 满足式(5).

如果 $u(t)$ 在 $t = t$ 取得最大值, 则 $\|u\| = u(t)$. 反复应用 Rolle 定理以及严格的微分不等式, 我们知道 $u(t)$ 在 $[t, 1]$ 上是递减的并且是下凹的.

情形 1 $0 < \sum_{i=1}^{m-2} k_i < 1$. 首先, 假设 $t \leqslant \xi_{m-2} < 1$, 则 $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) = u(1)$. 从式(4), 我们有 $u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) \geqslant k_{m-2} u(\xi_{m-2})$. 根据 $u(t)$ 在 $[t, 1]$ 是递减的和非负凹的, 我们有 $((u(t) - u(1))/(t - 1))(\xi_{m-2} - 1) + u(1) \leqslant u(\xi_{m-2})$, 从而

$$u(t) \leqslant u(1) + \frac{u(1) - u(\xi_{m-2})}{1 - \xi_{m-2}}(t - 1) \leqslant u(1) + \frac{u(1) - u(\xi_{m-2})}{1 - \xi_{m-2}}(0 - 1) =$$
$$u(1) - \frac{u(1)}{1 - \xi_{m-2}} + \frac{u(\xi_{m-2})}{1 - \xi_{m-2}} \leqslant u(1) - \frac{u(1)}{1 - \xi_{m-2}} + \frac{u(1)}{k_{m-2}(1 - \xi_{m-2})} \leqslant$$
$$u(1)\frac{1 - k_{m-2}\xi_{m-2}}{k_{m-2}(1 - \xi_{m-2})}.$$

因此, $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) \geqslant \gamma \|u\|$.

其次, 假设 $\xi_{m-2} < t < 1$, 我们知道 $u(t)$ 在 $t < t$ 上是递增的, 在 $t < t$ 上是递减的. 此种情形 $0 < \sum_{i=1}^{m-2} k_i < 1$ 表明 $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) = u(1)$. 事实上, 因为 $u(\xi_1) \leqslant u(\xi_2) \leqslant \cdots \leqslant u(\xi_{m-3}) \leqslant u(\xi_{m-2})$, 则 $u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_{m-2}) < u(\xi_{m-2})$. 令 $h(t) = u(t) - u(t) t^{n-1}$, $0 < t < t$. 根据定理 1.1 利用 $a = 0$, $b = t$, 得 $h(t) = u(t) - u(t) t^{n-1} \geqslant 0$, $0 < t < t$. 即 $u(t) \geqslant u(t) t^{n-1}$, $0 < t < t$. 因此, 特别地, $u(\xi_{m-2}) \geqslant u(t)\xi_{m-2}^{n-1}$, 蕴涵着 $u(t) \geqslant u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) \geqslant k_{m-2} u(\xi_{m-2}) \geqslant k_{m-2}\xi_{m-2}^{n-1} u(t)$, $\xi_{m-2} \leqslant t \leqslant 1$. 这样, $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) \geqslant \gamma \|u\|$.

情形 2 $\sum_{i=1}^{m-2} k_i \geqslant 1$. 首先, 假设 $u(\xi_{m-2}) > u(1)$, 则 $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) = u(1)$, 表明 $t \in [\xi_1, 1]$. 事实上, 如果 $t \in [0, \xi_1]$, 则 $u(\xi_1) \geqslant u(\xi_2) \geqslant \cdots \geqslant u(\xi_{m-3}) \geqslant u(\xi_{m-2}) > u(1)$, 并且 $u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) > \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(1) \geqslant u(1)$. 矛盾. 令 $h(t) = u(t) - u(t) t^{n-1}$, $0 < t < t$. 根据定理 1.1 利用 $a = 0$, $b = t$, 得 $h(t) = u(t) - u(t) t^{n-1} \geqslant 0$, $0 < t < t$. 即 $u(t) \geqslant u(t) t^{n-1}$, $0 < t < t$. 因此, 特别地, $u(\xi_1) \geqslant u(t)\xi_1^{n-1}$, 蕴涵着

$$u(t) \geqslant u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) \geqslant k_1 u(\xi_1) \geqslant k_1 \xi_1^{n-1} u(t), \qquad \xi_{m-2} \leqslant t \leqslant 1. \tag{6}$$

因此, $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) \geqslant \gamma \|u\|$.

其次, 假设 $u(\xi_{m-2}) \leqslant u(1)$, 则 $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) = u(\xi_{m-2})$. 因此, $t \in [\xi_{m-2}, 1]$, 这样式(6) 容易被修正为 $u(t) \geqslant u(\xi_{m-2}) \geqslant u(t)\xi_{m-2}^{n-1}$, $\xi_{m-2} \leqslant t \leqslant 1$. 因此, $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) \geqslant \gamma \|u\|$.

引理 2.3 设 $0 < \sum_{i=1}^{m-2} k_i \xi_i^{n-1} < 1$, 则边值问题

$$\begin{cases} -u^{(n)}(t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \ u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, & u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) \end{cases} \tag{7}$$

的 Green 函数是

$$G(t,s)=\frac{1}{M}\begin{cases}-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum\limits_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right],\\ \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,\ \xi_{i-1}\leqslant s\leqslant\min\{\xi_i,t\},\ i=1,2,\cdots,m-1;\\ t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum\limits_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right],\\ \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,\ \max\{\xi_{i-1},t\}\leqslant s\leqslant\xi_i,\ i=1,2,\cdots,m-1,\end{cases}$$

其中 $M=(n-1)!\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)$.

证明　当 $0\leqslant t\leqslant\xi_1$ 时，式(4)的唯一解可以表示为

$$\begin{aligned}u(t)=\frac{1}{M}\Bigg\{&\int_0^t\Bigg[-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+\\&t^{n-1}\left((1-s)^{n-1}-\sum_{j=1}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right)\Bigg]y(s)\mathrm{d}s+\\&\int_t^{\xi_1}t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum_{j=1}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right]y(s)\mathrm{d}s+\\&\sum_{i=2}^{m-2}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right]y(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{\xi_{m-2}}^1t^{n-1}(1-s)^{n-1}y(s)\mathrm{d}s\Bigg\}.\end{aligned}$$

当 $\xi_{r-1}\leqslant t\leqslant\xi_r$, $2\leqslant r\leqslant m-2$ 时，式(4)的唯一解可以表示为

$$\begin{aligned}u(t)=\frac{1}{M}\Bigg\{&\int_0^{\xi_1}\Bigg[-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+\\&t^{n-1}\left((1-s)^{n-1}-\sum_{j=1}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right)\Bigg]y(s)\mathrm{d}s+\\&\sum_{i=2}^{r-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\Bigg[-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+\\&t^{n-1}\left((1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right)\Bigg]y(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{\xi_{r-1}}^{t}\Bigg[-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+\\&t^{n-1}\left((1-s)^{n-1}-\sum_{j=r}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right)\Bigg]y(s)\mathrm{d}s+\\&\int_t^{\xi_r}t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum_{j=r}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right]y(s)\mathrm{d}s+\\&\sum_{i=r+1}^{m-2}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right]y(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{\xi_{m-2}}^1t^{n-1}(1-s)^{n-1}y(s)\mathrm{d}s\Bigg\}.\end{aligned}$$

当 $\xi_{m-2}\leqslant t\leqslant 1$ 时，式(4)的唯一解可以表示为

$$u(t)=\frac{1}{M}\Bigg\{\int_0^{\xi_1}\Bigg[-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+$$

$$t^{n-1}\left((1-s)^{n-1}-\sum_{j=1}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right)\Bigg]y(s)\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{i=2}^{m-2}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\Bigg[-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+$$

$$t^{n-1}\left((1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right)\Bigg]y(s)\mathrm{d}s+$$

$$\int_{\xi_{m-2}}^{t}\left[-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+t^{n-1}(1-s)^{n-1}\right]y(s)\mathrm{d}s+$$

$$\int_t^1 t^{n-1}(1-s)^{n-1}y(s)\mathrm{d}s\Bigg\}.$$

因此,式(4)的唯一解是 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s$.

引理2.4 设 $0<\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}<1$, 则边值问题(7)的Green函数 $G(t,s)\geqslant 0$, $0\leqslant t, s\leqslant 1$.

证明 当 $0\leqslant t\leqslant 1$, $\xi_{i-1}\leqslant s\leqslant \min\{\xi_i, t\}$, $i=1,2,\cdots,m-1$ 时,

$$G(t,s)=\frac{1}{(n-1)!\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)}\Bigg\{-(t-s)^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)+$$

$$t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right]\Bigg\}=$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\Bigg[t^{n-1}(1-s)^{n-1}-(t-s)^{n-1}+$$

$$t^{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}(1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\Bigg]\geqslant 0;$$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$, $\max\{\xi_{i-1}, t\}\leqslant s\leqslant \xi_i$, $i=1,2,\cdots,m-1$ 时,

$$G(t,s)=\frac{1}{(n-1)!\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)}t^{n-1}\left[(1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}\right]=$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[t^{n-1}(1-s)^{n-1}+t^{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}(1-s)^{n-1}-\sum_{j=i}^{m-2}k_j(\xi_j-s)^{n-1}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\right]\geqslant 0.$$

3 主要结果

设 $E=C^1([0,1],\mathbf{R})$, 定义 E 上的范数 $\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}(u^2(t)+(u'(t))^2)^{1/2}$. 令 $K=\{u(t)\in E\mid u(t)$ 是$[0,1]$上的非负函数$\}$.

定义 E 上的两个泛函 α, β 如下:

$$\alpha(u)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|,\quad \beta(u)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u'(t)|,\qquad \forall u\in E,$$

则 $\|u\|\leqslant\sqrt{2}\max\left\{\alpha(u),\beta(u)\right\}$，并且

$$\alpha(\lambda u)=|\lambda|\alpha(u),\ \beta(\lambda u)=|\lambda|\beta(u),\ \forall u\in E,\ \lambda\in\mathbf{R},$$
$$\alpha(u)\leqslant\alpha(v),\ \forall u,v\in K,\ u\leqslant v.$$

如果条件(H_1)成立，由引理2.4，则式(7)的Green函数 $G(t,s)\geqslant 0$，令 $y(t)=1$，我们有

$$\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=-\frac{t^n}{n!}+\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^n\right)t^{n-1}}{n!\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)}.\tag{8}$$

令

$$M=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s,\tag{9}$$

$$m=\max_{t\in[\xi_{m-2},1]}\int_{\xi_{m-2}}^1 G(t,s)\mathrm{d}s,\tag{10}$$

$$Q=\frac{2n-1-n\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}+(n-1)\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^n}{n!\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)}.\tag{11}$$

定理3.1 如果条件(H_1)、(H_2)成立，另外假设存在非负常数 $0<c<\gamma b<b<L$，使 $f(t,u,v)$ 满足如下增长条件：

(H_3) $f(t,u,v)<c/M,\ (t,u,v)\in[0,1]\times[0,c]\times[-L,L]$；

(H_4) $f(t,u,v)\geqslant b/m,\ (t,u,v)\in[\xi_{m-2},1]\times[\gamma b,b]\times[-L,L]$；

(H_5) $f(t,u,v)<L/Q,\ (t,u,v)\in[0,1]\times[0,b]\times[-L,L]$.

则边值问题(1)至少存在1个正解 $u(t)$，且满足

$$c<\alpha(u)<b,\ |u'(t)|<L.$$

证明 令

$$\Omega_1=\left\{u\in E\,\|\,u(t)|<c,\ |u'(t)|<L\right\},$$
$$\Omega_2=\left\{u\in E\,\|\,u(t)|<b,\ |u'(t)|<L\right\}$$

为 E 上的两个有界开集，且设

$$D_1=\left\{u\in E\mid\alpha(u)=c\right\},\ D_2=\left\{u\in E\mid\alpha(u)=b\right\}.$$

令 $f_1(t,u,v)=f(t,u_0,v_0)$，其中 $u_0=\min\left\{u,b\right\}$；$v_0=\max\left\{\min\left\{v,L\right\},-L\right\}$. 则 $f_1\in C([0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R}\to[0,\infty))$. 定义算子

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f_1(t,u(s),u'(s))\mathrm{d}s.$$

显然，$T:K\to K$ 是全连续算子，并且存在 $p\in(\Omega_2\cap K)\setminus\left\{0\right\}$ 使 $\alpha(p)\neq 0$ 且 $\alpha(u+\lambda p)\geqslant\alpha(u)$ 对所有的 $u\in K$，$\lambda\geqslant 0$ 都成立. 因此，定理1.2的条件(A_3)满足.

对于 $u\in D_1\cap K$，$\alpha(u)=c$，由条件(H_2)、(H_3)和式(9)可得

$$\alpha(Tu)=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s)f_1(t,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|<$$
$$\frac{c}{M}\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=c.$$

对于 $u\in D_2\cap K$，$\alpha(u)=b$，利用引理2.2，我们有 $u(t)\geqslant\gamma\alpha(u)=\gamma b,\ t\in[\xi_{m-2},1]$.

因此, 由条件(H_2)、(H_4) 和式(10) 可得

$$\alpha(Tu) = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s)f_1(t,u(s),u'(s))\,\mathrm{d}s\right| > \max_{t\in[0,1]}\left|\int_{\xi_{m-2}}^1 G(t,s)f_1(t,u(s),u'(s))\,\mathrm{d}s\right| \geqslant \frac{b}{m}\max_{t\in[\xi_{m-2},1]}\int_{\xi_{m-2}}^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s = b.$$

因此, 定理 1.2 的条件(A_1) 满足.

对于 $u\in K$, 由条件(H_2)、(H_5) 和式(11) 可得

$$\begin{aligned}\beta(Tu) = \max_{t\in[0,1]}\Bigg| &-\int_0^t \frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}f_1(t,u(s),u'(s))\,\mathrm{d}s + \\ &\frac{t^{n-2}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\int_0^1\frac{(1-s)^{n-2}}{(n-2)!}f_1(t,u(s),u'(s))\,\mathrm{d}s - \\ &\frac{t^{n-2}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{n-1}}{(n-2)!}f_1(t,u(s),u'(s))\,\mathrm{d}s\Bigg| < \\ &\Bigg|\frac{2-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\int_0^1\frac{(1-s)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}s + \\ &\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}\frac{(\xi_i-s)^{n-1}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}s\Bigg|\frac{L}{Q} = \\ &\frac{2n-1-n\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}+(n-1)\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n}}{n!\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\xi_i^{n-1}\right)}\frac{L}{Q} = L.\end{aligned}$$

因此, 定理 1.2 的条件(A_2) 满足.

由定理 1.2 可知: 存在 $u\in(\Omega_2\setminus\Omega_1)\cap K$ 使 $u = Tu$. 因此, $u(t)$ 是边值问题(1) 的正解, 且满足

$$c < \alpha(u) < b,\ |u'(t)| < L.$$

4　例　子

在这一节, 我们举一个简单的例子来说明我们所获得的结果. 考虑如下边值问题:

$$\begin{cases} u^{(3)}(t) + f(t,u,u') = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0,\ u(1) = u(1/2), \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$
f(t,u,v)=\begin{cases}\dfrac{9^3}{7^3}\times 36\times\dfrac{4+\sin v}{3}, & 0\leqslant u\leqslant 6,\ -20\,000\leqslant v\leqslant 20\,000,\\[2mm] p(u)\times\dfrac{4+\sin v}{3}, & 6\leqslant u\leqslant 10,\ -20\,000\leqslant v\leqslant 20\,000,\\[2mm] \dfrac{40\times 48\times 9^3}{299+38\sqrt{19}}\times\left(1+\dfrac{u-10}{40-10}\right)\times\dfrac{4+\sin v}{3}, & \\ & 10\leqslant u\leqslant 40,\ -20\,000\leqslant v\leqslant 20\,000,\\[2mm] \dfrac{80\times 48\times 9^3}{299+38\sqrt{19}}\times\dfrac{4+\sin v}{3}, & u\geqslant 40,\ v<-20\,000\ \text{或}\ v>20\,000,\end{cases}
$$

其中 $p(u)$ 满足

$$
p(6)=\frac{9^3}{7^3}\times 36,\quad p(10)=\frac{40\times 48\times 9^3}{299+38\sqrt{19}},\quad p''(u)=0,\qquad u\in(6,10).
$$

我们注意到 $n=3, m=3, k_1=1, \xi_1=1/2$. 顺便, 直接计算可以得到

$$
M=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s=\max_{t\in[0,1]}\left(-\frac{t^3}{6}+\frac{7}{36}t^2\right)=\frac{7^3}{9^3\times 12},
$$

$$
m=\max_{t\in[1/2,1]}\int_{1/2}^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s=\max_{t\in[1/2,1]}\frac{1}{36}\left(-6t^3+10t^2-\frac{9}{2}t+\frac{3}{4}\right)=
$$

$$
\frac{299+38\sqrt{19}}{9^3\times 48},
$$

$$
Q=1,
$$

$$
\gamma=1/4.
$$

如果我们取 $c=6, b=40, L=20\,000$, 则可得

$$
f(t,u,v)=\frac{9^3}{7^3}\times 36\times\frac{4+\sin v}{3}\leqslant\frac{9^3}{7^3}\times 60<\frac{c}{M},
$$

$$
(t,u,v)\in[0,1]\times[0,6]\times[-20\,000,20\,000];
$$

$$
f(t,u,v)=\frac{40\times 48\times 9^3}{299+38\sqrt{19}}\times\left(1+\frac{u-6}{40-6}\right)\times\frac{4+\sin v}{3}\geqslant\frac{b}{m},
$$

$$
(t,u,v)\in[0,1]\times[10,40]\times[-20\,000,20\,000];
$$

$$
f(t,u,v)<\frac{20\,000}{1}=\frac{L}{Q},
$$

$$
(t,u,v)\in[0,1]\times[0,40]\times[-20\,000,20\,000].
$$

从而定理 3.1 的所有条件都满足. 因此, 根据定理 3.1 我们知道边值问题(12) 至少存在 1 个正解 $u(t)$ 满足

$$
6<\max_{0\leqslant t\leqslant 1}u(t)<40,\quad \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{|u'(t)|\}<20\,000.
$$

致谢 本文作者感谢河北科技大学校立基金(XL2006040)对本文的资助.

[参 考 文 献]

[1] Il'in V A, Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator[J]. Differential Equations, 1987, **23**(8): 979-987.

[2] Il'in V A, Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects[J]. Differential Equations, 1987, **23**(7): 803-810.

[3] MA Ru-yun. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problems[J]. Electronic

Journal of Differential Equations, 1999, **34**(4): 1-8.

[4] MA Ru-yun. Existence theorems for a second order m-point boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1997, **211**(2): 545-555.

[5] MA Ru-yun. Positive solutions for second order three-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters, 2001, **14**(1): 1-5.

[6] MA Ru-yun. Existence theorems for a second order three-point boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1997, **212**(2): 430-442.

[7] LIU Xiu-jun, QIU Ji-qing, GUO Yan-ping. Three positive solutions for second-order m-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, **156**(3): 733-742.

[8] GUO Yan-ping, SHAN Wen-rui, GE Wei-gao. Positive solutions for second-order m-point boundary value problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, **151**(2): 415-424.

[9] GUO Yan-ping, GE Wei-gao. Positive solutions for three-point boundary value problems with dependence on the first order derivatives[J]. J Math Anal Appl, 2004, **290**(1): 291-301.

[10] Eloe Paul W, Ahmad Bashir. Positive solutions of a nonlinear nth boundary value problems with nonlocal conditions[J]. Applied Mathematics Letters, 2005, **18**(5): 521-527.

[11] Eloe Paul W, Henderson Johnny. Positive solutions for $(n-1, 1)$ conjugate boundary value problems [J]. Nonlinear Anal, 1997, **28**(10): 1669-1680.

Positive Solutions for $(n-1, 1)$ m-Point Boundary Value Problems With Dependence on the First Order Derivative

JI Yu-de, GUO Yan-ping, YU Chang-long

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, P.R. China)

Abstract: Using the extension of Krasnoselskii's fixed point theorem in a cone, the existence of at least one positive solution to the nonlinear nth order m-point boundary value problem with dependence on the first order derivative was proved. The associated Green's function for the nth order m-point boundary value problem was given, and growth conditions were imposed on nonlinear term f which ensure existence of at least one positive solutions. A simple example was presented to illustrate applications of the obtained results.

Key words: Green's function; fixed point theorem in a cone; positive solution; higher-order differential equation