应用数学和力学, 第 30 卷 第 4 期
2009 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 4, Apr. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 04-0484-11

一般正倒向重随机微分方程的解*

朱庆峰[1], 石玉峰[2], 宫献军[2]

(1. 山东财政学院 统计与数理学院, 济南 250014;
2. 山东大学 数学学院, 济南 250100)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了一类正倒向重随机微分方程, 其涵盖了以前的包括随机 Hamilton 系统的很多情况. 通过连续性方法, 在较弱的单调条件下得到了其解的存在唯一性结果. 然后研究了正倒向重随机微分方程的解依赖于参数的连续性和可微性.

关 键 词: 正倒向重随机微分方程; 连续性方法; H- 单调

中图分类号: O211.63; O211.5 文献标识码: A

引 言

自从 1990 年 Pardoux 和 Peng[1] 提出了倒向随机微分方程理论, 倒向随机微分方程和正倒向随机微分方程理论得到了广泛的研究(见 El Karoui, Peng 和 Quenez[2]; Ma 和 Yong[3]) . 一般地, 一个正倒向随机微分方程包含一个 Itô 型正向随机微分方程和一个耦合的 Pardoux-Peng 型倒向随机微分方程[1] . Antonelli[4], Ma, Protter 和 Yong[5] 等对正倒向随机微分方程进行了一系列的研究, 并应用到金融中. 其中一个研究方向是由 Hu 和 Peng[6] 首先提出, 由 Peng 和 Wu[7], Yong[8], Peng 和 Shi[9] 以及 Peng[10] 作了进一步的研究, 并且 Peng[10] 推广了由 Bismut[11] 于 1973 年提出的随机 Hamilton 系统.

最近, Peng 和 Shi[12] 引入了一类时间对称的正倒向随机微分方程, 其中的正向方程和倒向方程都是 Pardoux 和 Peng[13] 引入的“倒向重随机微分方程”. 这些方程包含耦合的一个正向重随机微分方程和一个倒向重随机微分方程, 从而推广了正倒向随机微分方程的概念.

本文中我们将在 Peng 和 Shi[12] 工作的基础上进一步深入研究这一类正倒向重随机微分方程. 此类系统能应用于随机偏微分方程的 Feynman-Kac 公式的研究, 以及随机 Hamilton 系统的推广, 因而在力学中必将有重要的应用前景. 我们将减弱文献[12] 中的单调性假设, 且处理更一般的情形, 比如, 正向方程和倒向方程的维数不同且初始条件不是常数而是函数的情况. 这是研究随机偏微分方程的 Feynman-Kac 公式必然出现的问题. 我们通过由 Peng 和 Wu[7] 引入

* 收稿日期: 2008-03-13; 修订日期: 2009-02-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771122) ; 山东省自然科学基金资助项目(Y2006A08) ; 国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2007CB814900)

作者简介: 朱庆峰(1978—) , 男, 山东泰安人, 讲师, 硕士(E-mail: zhuqf508@sohu.com) ;
石玉峰, 教授(联系人. E-mail: yfshi@sdu.edu.cn) .

的 $\boldsymbol{H}$- 矩阵方法和文献[14] 中的方法来处理上述情况．然而由于本文减弱了单调条件 我们需要与文献[13] 中一样的限制 即函数 $\boldsymbol{g}$ 关于 z 和函数 $\boldsymbol{G}$ 关于 $\boldsymbol{Z}$ 的 Lipschitz 常数 λ 需要满足 $0<\lambda<1$.

令 $(\Omega\ \mathscr{F}\ P)$ 是一个概率空间 $[0\ T]$ 是一个固定的任意大的时间区间．假设 $\{W_t; 0\leqslant t\leqslant T\}$ 和 $\{B_t; 0\leqslant t\leqslant T\}$ 是定义于 $(\Omega\ \mathscr{F}\ P)$ 分别取值于 R^d 和 R^l 的两个完全独立的标准 Brown 运动．令 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{F}$ 中全部 P- 零集的集合．对于每个 $t\in[0\ T]$ 我们定义 $\mathscr{F}_t\cdot\mathscr{F}_t^{W}\vee\mathscr{F}_{t\ T}^{B}$ 其中 $\mathscr{F}_t^{W}=\mathscr{N}\vee\sigma\{W_r-W_0; 0\leqslant r\leqslant t\}$ $\mathscr{F}_{t\ T}^{B}=\mathscr{N}\vee\sigma\{B_r-B_t; t\leqslant r\leqslant T\}$. 注意 $\{\mathscr{F}_t\ t\in[0\ T]\}$ 是既不增也不减的 故不能构成一个信息流．设 $M^2(0\ T; R^n)$ 为全部的 $\mathscr{F}_t$ - 可测的 n 维实值随机过程 $\{v_t; t\in[0\ T]\}$ 且满足 $\mathrm{E}\int_0^T|v_t|^2\mathrm{d}t<\infty$ 的空间．显然 $M^2(0\ T; R^n)$ 是 Hilbert 空间．对于给定的 $\boldsymbol{u}\in M^2(0\ T; R^d)$ 和 $\boldsymbol{v}\in M^2(0\ T; R^l)$ 定义(标准)正向 Itô积分 $\int_0 \boldsymbol{u}_s\mathrm{d}\boldsymbol{W}_s$ 和倒向 Itô积分 $\int_{\cdot} \boldsymbol{v}_s\mathrm{d}\boldsymbol{B}_s$. 它们都属于 $M^2(0\ T; \mathbf{R})$[13].

考虑如下形式的正倒向重随机微分方程:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{y}_t=\Psi(\boldsymbol{Y}_0)+\displaystyle\int_0^t\boldsymbol{f}(s\ \boldsymbol{y}_s\ \boldsymbol{Y}_s\ \boldsymbol{z}_s\ \boldsymbol{Z}_s)\,\mathrm{d}s+\\
\qquad\displaystyle\int_0^t\boldsymbol{g}(s\ \boldsymbol{y}_s\ \boldsymbol{Y}_s\ \boldsymbol{z}_s\ \boldsymbol{Z}_s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}_s-\int_0^t\boldsymbol{z}_s\mathrm{d}\boldsymbol{B}_s\\
\boldsymbol{Y}_t=\Phi(\boldsymbol{y}_T)-\displaystyle\int_t^T\boldsymbol{F}(s\ \boldsymbol{y}_s\ \boldsymbol{Y}_s\ \boldsymbol{z}_s\ \boldsymbol{Z}_s)\,\mathrm{d}s-\\
\qquad\displaystyle\int_t^T\boldsymbol{G}(s\ \boldsymbol{y}_s\ \boldsymbol{Y}_s\ \boldsymbol{z}_s\ \boldsymbol{Z}_s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{B}_s-\int_t^T\boldsymbol{Z}_s\mathrm{d}\boldsymbol{W}_s.
\end{cases}
\tag{1}
$$

当方程(1)不涉及倒向 Itô积分时, 即当 $\boldsymbol{G}\equiv\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{g}\ \boldsymbol{F}$ 是独立于 $\boldsymbol{z}$ $\Psi(\boldsymbol{Y}_0)$ 退化为独立于 $\boldsymbol{Y}_0$ 的常向量时, 这个方程组将退化为由 Hu 和 Peng[6] 等研究的正倒向随机微分方程．另一方面, Pardoux 和 Peng[13] 提出了一类新的倒向随机微分方程, 称为“倒向重随机微分方程”．本文的目的是综合上述两个结果, 研究方程(1)解的存在唯一性以及解依赖于参数的连续性和可微性．在单调性假设下(见(H1)和(H2)), 我们应用首先由 Peng[15] 引入的连续性方法来解方程(1)．Yong[8] 对这种方法作了更详尽的讨论．方程(1)推广了由 Peng 和 Shi[12] 引进的时间对称的正倒向随机微分方程．

在第 1 节给出基本假设和解的存在唯一性定理以及唯一性的证明．第 2 节给出先验估计．第 3 节证明了存在性．在第 4 节, 研究正倒向重随机微分方程解依赖于参数的连续性和可微性．

1　问题的提出和存在唯一性定理

考虑如下形式的正倒向重随机微分方程:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{f}(t\ \boldsymbol{y}_t\ \boldsymbol{Y}_t\ \boldsymbol{z}_t\ \boldsymbol{Z}_t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(t\ \boldsymbol{y}_t\ \boldsymbol{Y}_t\ \boldsymbol{z}_t\ \boldsymbol{Z}_t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t-\boldsymbol{z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\\
\qquad\qquad\boldsymbol{y}_0=\Psi(\boldsymbol{Y}_0)\\
\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_t=\boldsymbol{F}(t\ \boldsymbol{y}_t\ \boldsymbol{Y}_t\ \boldsymbol{z}_t\ \boldsymbol{Z}_t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{G}(t\ \boldsymbol{y}_t\ \boldsymbol{Y}_t\ \boldsymbol{z}_t\ \boldsymbol{Z}_t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t+\boldsymbol{Z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t\\
\qquad\qquad\boldsymbol{Y}_T=\Phi(\boldsymbol{y}_T)
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中

$$\boldsymbol{F}:\ \Omega\times[0\ \ T]\times R^{n}\times R^{m}\times R^{n\times l}\times R^{m\times d}\to\ R^{m}$$
$$\boldsymbol{f}:\ \Omega\times[0\ \ T]\times R^{n}\times R^{m}\times R^{n\times l}\times R^{m\times d}\to\ R^{n}$$
$$\boldsymbol{G}:\ \Omega\times[0\ \ T]\times R^{n}\times R^{m}\times R^{n\times l}\times R^{m\times d}\to\ R^{m\times l}$$
$$\boldsymbol{g}:\ \Omega\times[0\ \ T]\times R^{n}\times R^{m}\times R^{n\times l}\times R^{m\times d}\to\ R^{n\times d}$$
$$\Psi:\ \Omega\times R^{m}\to\ R^{n}\qquad \Phi:\ \Omega\times R^{n}\to\ R^{m}.$$

给定一个 $m\times n$ 满秩矩阵$\boldsymbol{H}$ 引入记号 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})$ $\boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{u})=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\ \ \boldsymbol{Hf}\ \ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\ \ \boldsymbol{Hg})(t\ \ \boldsymbol{u})$. 其中 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{1}\cdots\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{l})$ 和 $\boldsymbol{Hg}=(\boldsymbol{Hg}_{1}\cdots\boldsymbol{Hg}_{d})$. 采用 R^{n} R^{m} $R^{m\times l}$ 和 $R^{n\times d}$ 里通常的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 Euclidean 范数 $|\cdot|$. 文中所有等式和不等式都是在 $\mathrm{d}t\times\mathrm{d}P$ 意义下在 $[0\ \ T]\times\Omega$ 上几乎必然成立的.

定义 1.1 $\mathscr{F}_{t}$– 可测的四元随机过程 $(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})\in M^{2}(0\ T;R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 如果使得方程(2) 成立, 则被称为正倒向重随机微分方程(2) 的解.

如下单调性假设是我们的主要假设:

(H1)

$$\langle\boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{u})-\boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{u})\ \ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\rangle\leqslant-\mu_{1}(|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})|^{2}+|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z})|^{2})-$$
$$\mu_{2}(|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y})|^{2}+|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z})|^{2})$$
$$\forall\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})\quad\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})\in R^{n}\times R^{m}\times R^{n\times l}\times R^{m\times d}\quad\forall t\in[0\ \ T].$$

(H2)

$$\langle\Psi(\boldsymbol{Y})-\Psi(\boldsymbol{Y})\ \ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y})\rangle\leqslant-\beta_{2}|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y})|^{2}\qquad\forall\boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{Y}\in R^{m}$$
$$\langle\Phi(\boldsymbol{y})-\Phi(\boldsymbol{y})\ \ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})\rangle\geqslant\beta_{1}|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})|^{2}\qquad\forall\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{y}\in R^{n}$$

其中 μ_{1} μ_{2} β_{1} 和 β_{2} 是给定的非负常数 满足 $\mu_{1}+\mu_{2}>0$ $\beta_{1}+\beta_{2}>0$ $\mu_{1}+\beta_{2}>0$ 和 $\mu_{2}+\beta_{1}>0$. 而且要求当 $m>n$ 时 $\mu_{1}>0$ $\beta_{1}>0$; 当 $m<n$ 时 $\mu_{2}>0$ $\beta_{2}>0$.

还假设

(H3) 对每个 $\boldsymbol{u}\in R^{n+m+n\times l+m\times d}$ $\boldsymbol{A}(\cdot\ \ \boldsymbol{u})$ 是定义在$[0\ \ T]$ 上 $\mathscr{F}_{t}$– 可测的向量过程 且 $\boldsymbol{A}(\cdot\ \ \boldsymbol{0})\in M^{2}(0\ T;\ R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 对每个 $\boldsymbol{y}\in R^{n}$ $\Phi(\boldsymbol{y})$ 是 $\mathscr{F}_{T}$– 可测的随机向量 且 $\Phi(\boldsymbol{0})\in L^{2}(\Omega\ \mathscr{F}_{T}\ \ P;R^{n})$ 对每个 $\boldsymbol{Y}\in R^{m}$ $\Psi(\boldsymbol{Y})$ 是 $\mathscr{F}_{0}$– 可测的随机向量 且 $\Psi(\boldsymbol{0})\in L^{2}(\Omega\ \mathscr{F}_{0}\ \ P;R^{m})$.

(H4) $\boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{u})$ 和 Φ Ψ 满足 Lipschitz 条件: 存在常数 $k>0$ 和 $0<\lambda<1$ 满足 $\forall\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{u}\in R^{n+m+n\times l+m\times d}$ $\forall t\in[0\ \ T]$

$$|\boldsymbol{f}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})-\boldsymbol{f}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})|^{2}\leqslant$$
$$k(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}|^{2}+|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}|^{2}+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}|^{2}+|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}|^{2})$$
$$|\boldsymbol{F}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})-\boldsymbol{F}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})|^{2}\leqslant$$
$$k(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}|^{2}+|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}|^{2}+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}|^{2}+|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}|^{2})$$
$$|\boldsymbol{g}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})-\boldsymbol{g}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})|^{2}\leqslant$$
$$k(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}|^{2}+|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}|^{2}+|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}|^{2})+\lambda|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}|^{2}$$
$$|\boldsymbol{G}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})-\boldsymbol{G}(t\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})|^{2}\leqslant$$
$$k(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}|^{2}+|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}|^{2}+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}|^{2})+\lambda|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}|^{2}$$
$$|\Psi(\boldsymbol{Y})-\Psi(\boldsymbol{Y})|\leqslant k|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}|\quad|\Phi(\boldsymbol{y})-\Phi(\boldsymbol{y})|\leqslant k|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}|.$$

我们的主要结果是下面的存在唯一性定理.

定理 1.1　假设(H1)~(H4)下, 方程(2)在 $M^2(0\ \ T; R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 中有唯一解.

定理的证明分唯一性和存在性两部分, 先证明唯一性, 在下一部分证明存在性.

证明(唯一性)　令 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})$ 和 $\boldsymbol{U}'=(\boldsymbol{y}'\ \ \boldsymbol{Y}'\ \ \boldsymbol{z}'\ \ \boldsymbol{Z}')$ 是方程(2) 的两个解. 设 $\hat{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}'=(\hat{\boldsymbol{y}}\ \ \hat{\boldsymbol{Y}}\ \ \hat{\boldsymbol{z}}\ \ \hat{\boldsymbol{Z}})=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\ \ \boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}'\ \ \boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\ \ \boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}')$. 在$[0\ \ T]$ 上对$\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}\ \ \hat{\boldsymbol{Y}}\rangle$应用 It0公式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T\ \ \Phi(\boldsymbol{y}_T)-\Phi(\boldsymbol{y}'_T)\rangle-\mathrm{E}\langle \boldsymbol{H}(\Psi(\boldsymbol{Y}_0)-\Psi(\boldsymbol{Y}'_0))\ \ \hat{\boldsymbol{Y}}_0\rangle=\\
&\quad\mathrm{E}\int_0^T\langle \boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{U}_t)-\boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{U}'_t)\ \ \hat{\boldsymbol{U}}_t\rangle\mathrm{d}t\leqslant\\
&\quad-\mu_1\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{y}'_t)|^2+|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{z}'_t)|^2)\mathrm{d}t-\\
&\quad\mu_2\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_t-\boldsymbol{Y}'_t)|^2+|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_t-\boldsymbol{Z}'_t)|^2)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

由假设(H1) 和(H2) , 可得

$$
\begin{aligned}
&\mu_1\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{y}'_t)|^2+|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{z}'_t)|^2)\mathrm{d}t+\\
&\quad\mu_2\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_t-\boldsymbol{Y}'_t)|^2+|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_t-\boldsymbol{Z}'_t)|^2)\mathrm{d}t\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

如果 $m>n\ \ \mu_1>0$ 我们有 $|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{y}'_t)|^2\equiv 0\ \ |\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{z}'_t)|^2\equiv 0$. 那么 $\boldsymbol{y}_t\equiv\boldsymbol{y}'_t$ 和 $\boldsymbol{z}_t\equiv\boldsymbol{z}'_t$. 特别地 $\Phi(\boldsymbol{y}_T)=\Phi(\boldsymbol{y}'_T)$. 从而 由倒向重随机微分方程解的唯一性结果[13] 可得 $\boldsymbol{Y}_t\equiv\boldsymbol{Y}'_t$ 和 $\boldsymbol{Z}_t\equiv\boldsymbol{Z}'_t$.

如果 $m<n\ \ \mu_2>0$ 我们有 $|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_t-\boldsymbol{Y}'_t)|^2\equiv 0\ \ |\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_t-\boldsymbol{Z}'_t)|^2\equiv 0$. 那么 $\boldsymbol{Y}_t\equiv\boldsymbol{Y}'_t$ 和 $\boldsymbol{Z}_t\equiv\boldsymbol{Z}'_t$. 特别地 $\Psi(\boldsymbol{Y}_0)=\Psi(\boldsymbol{Y}'_0)$. 从而 由倒向重随机微分方程解的唯一性结果[13] 可得 $\boldsymbol{y}_t\equiv\boldsymbol{y}'_t$ 和 $\boldsymbol{z}_t\equiv\boldsymbol{z}'_t$.

当 $m=n$ 时, 类似于上面的情况, 可得结果. 唯一性得证.

注 1.1　在存在唯一性的证明中, (H1) 和(H2)可替换为

(H1)′

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{u})-\boldsymbol{A}(t\ \ \boldsymbol{u})\ \ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\rangle\geqslant\mu_1(|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})|^2+|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z})|^2)+\\
&\quad\mu_2(|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y})|^2+|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z})|^2)\\
&\forall\,\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})\ \ \boldsymbol{u}=(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})\in R^n\times R^m\times R^{n\times l}\times R^{m\times d}\quad\forall\,t\in[0\ \ T].
\end{aligned}
$$

(H2)′

$$
\begin{aligned}
&\langle\Psi(\boldsymbol{Y})-\Psi(\boldsymbol{Y})\ \ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y})\rangle\geqslant\beta_2|\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y})|^2\qquad\forall\,\boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{Y}\in R^m\\
&\langle\Phi(\boldsymbol{y})-\Phi(\boldsymbol{y})\ \ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})\rangle\leqslant-\beta_1|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y})|^2\qquad\forall\,\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{y}\in R^n.
\end{aligned}
$$

其中 $\mu_1\ \ \mu_2\ \ \beta_1$ 和 β_2 是给定的非负常数 满足 $\mu_1+\mu_2>0\ \ \beta_1+\beta_2>0\ \ \mu_1+\beta_2>0$ 和 $\mu_2+\beta_1>0$. 而且要求当 $m>n$ 时 $\mu_1>0\ \ \beta_1>0$; 当 $m<n$ 时 $\mu_2>0\ \ \beta_2>0$.

2　先验估计

存在性的证明结合了上面的技巧和 Peng[15] 引入的先验估计方法. 为使证明更清晰和易于理解, 分析 3 种情况: $m<n\ \ m>n\ \ m=n$.

第 1 种情形　当 $m > n$ 时 $\mu_1 > 0$ $\beta_1 > 0$.　考虑一族正倒向重随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{y}_t = [\alpha\boldsymbol{f}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \boldsymbol{f}_0(t)]\mathrm{d}t - \boldsymbol{z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t + [\alpha\boldsymbol{g}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \boldsymbol{g}_0(t)]\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t \\ \mathrm{d}\boldsymbol{Y}_t = [\alpha\boldsymbol{F}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) - (1-\alpha)\mu_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{F}_0(t)]\mathrm{d}t + \boldsymbol{Z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t + \\ \qquad [\alpha\boldsymbol{G}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) - (1-\alpha)\mu_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{G}_0(t)]\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t \\ \boldsymbol{y}_0 = \alpha\Psi(\boldsymbol{Y}_0) + \phi \quad \boldsymbol{Y}_T = \alpha\Phi(\boldsymbol{y}_T) + (1-\alpha)\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_T + \varphi \end{cases} \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})$ 和 $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0) \in M^2(0\ \ T; R^{m+n+m\times l+n\times d})$ $\phi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_0\ \ P; R^n)$ 以及 $\varphi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_T\ \ P; R^m)$ 是任意给定的.

当 $\alpha = 1$ 时 方程(3) 解的存在意味着方程(2) 解的存在．当 $\alpha = 0$ 时 由倒向重随机微分方程解的存在唯一性[13] 方程(3) 是唯一可解的．下面的引理在连续性方法中是关键的 它给出了对固定的 $\alpha = \alpha_0 \in [0\ \ 1)$ 若方程(3) 是唯一可解的 则存在某个与 α_0 无关的正常数 δ_0 使对 $\alpha \in [\alpha_0\ \ \alpha_0 + \delta_0]$ 方程(3) 也唯一可解.

引理 2.1　假设 $m > n$ 和假设(H1)～(H4), 若对某个 $\alpha_0 \in [0\ \ 1)$ $\phi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_0\ \ P; R^n)$ $\varphi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_T\ \ P; R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0) \in M^2(0\ \ T; R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(3) 是唯一可解的 则存在某一与 α_0 无关的正常数 δ_0 使对 $\alpha \in [\alpha_0\ \ \alpha_0 + \delta_0]$ $\phi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_0\ \ P; R^n)$ $\varphi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_T\ \ P; R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0) \in M^2(0\ \ T; R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(3) 在 $M^2(0\ \ T; R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 中也唯一可解.

证明　当 $\alpha = \alpha_0$ 时 对 $\phi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_0\ \ P; R^n)$ $\varphi \in L^2(\Omega\ \mathscr{F}_T\ \ P; R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0) \in M^2(0\ \ T; R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(3) 存在唯一解 则对每个 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z}) \in M^2(0\ \ T; R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 存在唯一的 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z}) \in M^2(0\ \ T; R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 满足如下的方程:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\boldsymbol{y}_t = [\alpha_0\boldsymbol{f}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \delta\boldsymbol{f}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \boldsymbol{f}_0(t)]\mathrm{d}t - \boldsymbol{z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t + \\ &\qquad [\alpha_0\boldsymbol{g}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \delta\boldsymbol{g}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \boldsymbol{g}_0(t)]\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t \\ &\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_t = [\alpha_0\boldsymbol{F}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) - (1-\alpha_0)\mu_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_t + \delta(\boldsymbol{F}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \mu_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_t) + \boldsymbol{F}_0(t)]\mathrm{d}t + \\ &\qquad \boldsymbol{Z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t + [\alpha_0\boldsymbol{G}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) - (1-\alpha_0)\mu_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{z}_t + \\ &\qquad \delta(\boldsymbol{G}(t\ \ \boldsymbol{U}_t) + \mu_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{z}_t) + \boldsymbol{G}_0(t)]\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t \\ &\boldsymbol{y}_0 = \alpha_0\Psi(\boldsymbol{Y}_0) + \delta\Psi(\boldsymbol{Y}_0) + \phi \\ &\boldsymbol{Y}_T = \alpha_0\Phi(\boldsymbol{y}_T) + (1-\alpha_0)\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_T + \delta(\Phi(\boldsymbol{y}_T) - \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}_T) + \varphi \end{aligned}$$

这里 $\delta \in (0\ \ 1)$ 且独立于 α_0.　我们的目的是证明下面的映射:

$$\boldsymbol{U} = I_{\alpha_0+\delta}(\boldsymbol{U}): M^2(0\ \ T; R^{n+m+n\times l+m\times d}) \to M^2(0\ \ T; R^{n+m+n\times l+m\times d})$$

对于足够小的 $\delta > 0$ 是压缩的.

令

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{U}' = (\boldsymbol{y}'\ \ \boldsymbol{Y}'\ \ \boldsymbol{z}'\ \ \boldsymbol{Z}') \in M^2(0\ \ T; R^{n+m+n\times l+m\times d}) \\ &(\boldsymbol{y}'\ \ \boldsymbol{Y}'\ \ \boldsymbol{z}'\ \ \boldsymbol{Z}') = \boldsymbol{U}' = I_{\alpha_0+\delta}(\boldsymbol{U}') \\ &\hat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}' = (\hat{\boldsymbol{y}}\ \ \hat{\boldsymbol{Y}}\ \ \hat{\boldsymbol{z}}\ \ \hat{\boldsymbol{Z}}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\ \ \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\ \ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\ \ \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}') \\ &\hat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}' = (\hat{\boldsymbol{y}}\ \ \hat{\boldsymbol{Y}}\ \ \hat{\boldsymbol{z}}\ \ \hat{\boldsymbol{Z}}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\ \ \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\ \ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\ \ \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}'). \end{aligned}$$

在 $[0\ \ T]$ 上对 $\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}\ \ \hat{\boldsymbol{Y}}\rangle$ 应用 Itô公式, 得到

$$\mathrm{E}\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T\ \ \alpha_0\hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T) + (1-\alpha_0)\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T\rangle -$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^T \langle \alpha_0(\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{U}_t)-\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{U}_t')),\ \hat{\boldsymbol{U}}_t\rangle \mathrm{d}t+\\
&(1-\alpha_0)\mu_1\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_t|^2+|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_t|^2)\mathrm{d}t=\\
&\mathrm{E}\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T,\ \delta\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T\rangle-\mathrm{E}\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T,\ \delta\hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T)\rangle+\mathrm{E}\langle \boldsymbol{H}(\alpha_0\hat{\Psi}(\boldsymbol{Y}_0)+\delta\hat{\Psi}(\boldsymbol{Y}_0)),\ \hat{\boldsymbol{Y}}_0\rangle+\\
&\delta\mathrm{E}\int_0^T(\langle \hat{\boldsymbol{Y}}_t,\ \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{f}}(t,\boldsymbol{U}_t)\rangle+\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_t,\ \hat{\boldsymbol{F}}(t,\boldsymbol{U}_t)\rangle+\langle \hat{\boldsymbol{Z}}_t,\ \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{g}}(t,\boldsymbol{U}_t)\rangle+\\
&\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_t,\ \hat{\boldsymbol{G}}(t,\boldsymbol{U}_t)\rangle)\mathrm{d}t+\delta\mu_1\mathrm{E}\int_0^T(\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_t,\ \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_t\rangle+\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_t,\ \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_t\rangle)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{f}}(t,\boldsymbol{U}_t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{U}_t)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{U}_t'),\quad \hat{\boldsymbol{g}}(t,\boldsymbol{U}_t)=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{U}_t)-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{U}_t')\\
&\hat{\boldsymbol{F}}(t,\boldsymbol{U}_t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{U}_t)-\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{U}_t'),\quad \hat{\boldsymbol{G}}(t,\boldsymbol{U}_t)=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{U}_t)-\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{U}_t')\\
&\hat{\Psi}(\boldsymbol{Y}_0)=\Psi(\boldsymbol{Y}_0)-\Psi(\boldsymbol{Y}_0'),\quad \hat{\Psi}(\boldsymbol{Y}_0)=\Psi(\boldsymbol{Y}_0)-\Psi(\boldsymbol{Y}_0')\\
&\hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T)=\Phi(\boldsymbol{y}_T)-\Phi(\boldsymbol{y}_T'),\quad \hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T)=\Phi(\boldsymbol{y}_T)-\Phi(\boldsymbol{y}_T').
\end{aligned}
$$

由 $m>n$ 和假设(H1)~(H4),可得

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha_0+\alpha_0\beta_1)\mathrm{E}|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\mu_1\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_t|^2+|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_t|^2)\mathrm{d}t\leqslant\\
&\quad\delta C\mathrm{E}\int_0^T(|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2+|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2)\mathrm{d}t+\\
&\quad\delta C(\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中常数 $C>0$. 此后 C 将是适当的常数,它可以逐行不同且只依赖于 Lipschitz 常数 k, λ, μ_1, β_1, $\boldsymbol{H}$ 及 T. 显然 $1-\alpha_0+\alpha_0\beta_1\geqslant\beta$, $\beta=\min(1,\beta_1)>0$.

另外,对 $(\hat{\boldsymbol{Y}},\hat{\boldsymbol{Z}})=(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}',\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}')$ 应用估计的通常技术. 在 $[t,T]$ 上对 $|\hat{\boldsymbol{Y}}_t|^2$ 应用 Itô 公式,有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_T|^2-\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_t|^2=\\
&\quad 2\mathrm{E}\int_t^T\langle \hat{\boldsymbol{Y}}_s,\ \alpha_0\hat{\boldsymbol{F}}(s,\boldsymbol{U}_s)-(1-\alpha_0)\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s+\delta(\hat{\boldsymbol{F}}(s,\boldsymbol{U}_s)+\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s)\rangle\mathrm{d}s-\\
&\quad \mathrm{E}\int_t^T|\alpha_0\hat{\boldsymbol{G}}(s,\boldsymbol{U}_s)-(1-\alpha_0)\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s+\delta(\hat{\boldsymbol{G}}(s,\boldsymbol{U}_s)+\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s)|^2\mathrm{d}s+\\
&\qquad \mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Z}}_s|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由假设(H4),可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_t|^2+\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Z}}_s|^2\mathrm{d}s=\\
&\quad \mathrm{E}|\alpha_0\hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T)+(1-\alpha_0)\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T+\delta(\hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T)-\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T)|^2-\\
&\quad 2\mathrm{E}\int_t^T\langle \hat{\boldsymbol{Y}}_s,\ \alpha_0\hat{\boldsymbol{F}}(s,\boldsymbol{U}_s)-(1-\alpha_0)\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s+\delta(\hat{\boldsymbol{F}}(s,\boldsymbol{U}_s)+\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s)\rangle\mathrm{d}s+\\
&\quad \mathrm{E}\int_t^T|\alpha_0\hat{\boldsymbol{G}}(s,\boldsymbol{U}_s)-(1-\alpha_0)\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s+\delta(\hat{\boldsymbol{G}}(s,\boldsymbol{U}_s)+\mu_1\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s)|^2\mathrm{d}s\leqslant
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\mathrm{E}[\alpha_0^2|\hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T)|^2+(1-\alpha_0)^2|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\delta^2|\hat{\Phi}(\boldsymbol{y}_T)|^2+\delta^2|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2]+\\
&2\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Y}}_s|(\alpha_0|\hat{\boldsymbol{F}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|+(1-\alpha_0)\mu_1|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s|+\delta|\hat{\boldsymbol{F}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|+\\
&\delta\mu_1|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s|)\mathrm{d}s+\mathrm{E}\int_t^T\left[\frac{1+\lambda}{2\lambda}\alpha_0^2|\hat{\boldsymbol{G}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|^2\right]\mathrm{d}s+\\
&3\mathrm{E}\int_t^T\left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}((1-\alpha_0)^2\mu_1^2|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s|^2+\delta^2|\hat{\boldsymbol{G}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|^2+\delta^2\mu_1^2|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s|^2)\right]\mathrm{d}s\leqslant\\
&C\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\delta C\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\\
&\mathrm{E}\int_t^T\left[\left(\frac{4k}{1-\lambda}|\hat{\boldsymbol{Y}}_s|^2+\frac{1-\lambda}{4k}|\hat{\boldsymbol{F}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|^2\right)+(1-\alpha_0)\mu_1(|\hat{\boldsymbol{Y}}_s|^2+|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s|^2)\right]\mathrm{d}s+\\
&\delta\mathrm{E}\int_t^T[(|\hat{\boldsymbol{Y}}_s|^2+|\hat{\boldsymbol{F}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|^2)+\mu_1(|\hat{\boldsymbol{Y}}_s|^2+|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_s|^2)]\mathrm{d}s+\\
&\mathrm{E}\int_t^T\left[\frac{1+\lambda}{2\lambda}|\hat{\boldsymbol{G}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|^2\right]\mathrm{d}s+\\
&3\mathrm{E}\int_t^T\left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}((1-\alpha_0)^2\mu_1^2|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s|^2+\delta^2|\hat{\boldsymbol{G}}(s\ \boldsymbol{U}_s)|^2+\delta^2\mu_1^2|\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{z}}_s|^2)\right]\mathrm{d}s\leqslant\\
&C\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\delta C\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+C\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Y}}_s|^2\mathrm{d}s+\delta C\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{U}}_s|^2\mathrm{d}s+\\
&C\mathrm{E}\int_t^T(|\hat{\boldsymbol{y}}_s|^2+|\hat{\boldsymbol{z}}_s|^2)\mathrm{d}s+\frac{3+\lambda}{4}\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Z}}_s|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_t|^2+\frac{1-\lambda}{4}\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Z}}_s|^2\mathrm{d}s\leqslant\\
&\quad C\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Y}}_s|^2\mathrm{d}s+\\
&\quad C(\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\delta\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2)+C\mathrm{E}\int_t^T(|\hat{\boldsymbol{y}}_s|^2+|\hat{\boldsymbol{z}}_s|^2+\delta|\hat{\boldsymbol{U}}_s|^2)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_t|^2+\mathrm{E}\int_t^T|\hat{\boldsymbol{Z}}_s|^2\mathrm{d}s\leqslant\\
&\quad C(\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\delta\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2)+C\mathrm{E}\int_0^T(|\hat{\boldsymbol{y}}_t|^2+|\hat{\boldsymbol{z}}_t|^2+\delta|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2)\mathrm{d}t\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall t\in[0\ T].
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2+\mathrm{E}\int_0^T(|\hat{\boldsymbol{Y}}_t|^2+|\hat{\boldsymbol{Z}}_t|^2)\mathrm{d}t\leqslant\\
&\quad C(\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\delta\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2)+C\mathrm{E}\int_0^T(|\hat{\boldsymbol{y}}_t|^2+|\hat{\boldsymbol{z}}_t|^2+\delta|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

结合上面的两个估计(4)和(5),对于足够大的常数 C 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\int_0^T|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2\mathrm{d}t+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2\leqslant\\
&\quad\delta C\Bigg(\mathrm{E}\int_0^T|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2\mathrm{d}t+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2+
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{E}\int_0^T|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2\mathrm{d}t+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2\Big).$$

取 $\delta_0=1/(3C)$．容易看出 对于固定的 $\delta\in[0\ \ \delta_0]$ 映射 $I_{\alpha_0+\delta}$ 是压缩的, 即

$$\mathrm{E}\int_0^T|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2\mathrm{d}t+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2\leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\int_0^T|\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2\mathrm{d}t+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2+\mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2\right).$$

从而这个映射存在唯一不动点 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{Z})\in M^2(0\ \ T;R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 它就是当 $\alpha=\alpha_0+\delta$ $\delta\in[0\ \ \delta_0]$ 时方程(3)的解．证毕．

第2种情形　当 $m<n$ 时 $\mu_2>0$ $\beta_2>0$．考虑一族正倒向重随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_t=[\alpha\boldsymbol{f}(t\ \ \boldsymbol{U}_t)-(1-\alpha)\mu_2\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_t+\boldsymbol{f}_0(t)]\mathrm{d}t-\boldsymbol{z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t+\\ \qquad[\alpha\boldsymbol{g}(t\ \ \boldsymbol{U}_t)-(1-\alpha)\mu_2\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_t+\boldsymbol{g}_0(t)]\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t\\ \mathrm{d}\boldsymbol{Y}_t=[\alpha\boldsymbol{F}(t\ \ \boldsymbol{U}_t)+\boldsymbol{F}_0(t)]\mathrm{d}t-\boldsymbol{Z}_t\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t+[\alpha\boldsymbol{G}(t\ \ \boldsymbol{U}_t)+\boldsymbol{G}_0(t)]\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\\ \boldsymbol{y}_0=\alpha\Psi(\boldsymbol{Y}_0)+(1-\alpha)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_0+\psi\quad \boldsymbol{Y}_T=\alpha\Phi(\boldsymbol{y}_T)+\varphi.\end{cases}\tag{6}$$

当 $\alpha=0$ 时, 由倒向重随机微分方程解的存在唯一性[13], 方程(6)是唯一可解的．当 $\alpha=1$ 时, 方程(6)解的存在意味着方程(2)解的存在．类似于引理2.1的论述, 也可以得到如下引理:

引理2.2　假设 $m<n$ 和假设(H1)~(H4), 若对某个 $\alpha_0\in[0\ \ 1)$ $\psi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_0\ \ P;R^n)$ $\varphi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_T\ \ P;R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0)\in M^2(0\ \ T;R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(6)是唯一可解的 则存在某一与 α_0 无关的正常数 δ_0 使对 $\alpha\in[\alpha_0\ \ \alpha_0+\delta_0]$ 和 $\psi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_0\ \ P;R^n)$ $\varphi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_T\ \ P;R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0)\in M^2(0\ \ T;R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(6)在 $M^2(0\ \ T;R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 也唯一可解．

第3种情形　当 $m=n$ 时, 由假设(H1)和(H2), 只需考虑:

1) 如果 $\mu_1>0$ $\mu_2\geqslant0$ $\beta_1>0$ $\beta_2\geqslant0$ 有与引理2.1相同的结果;

2) 如果 $\mu_1\geqslant0$ $\mu_2>0$ $\beta_1\geqslant0$ $\beta_2>0$ 可以得到引理2.2相同的结果．

3　定理1.1存在性的证明

现在给出定理1.1存在性的证明．

证明(存在性)　首先考虑 $m>n$ 的情形．当 $\alpha=0$ 时 对于 $\psi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_0\ \ P;R^n)$ $\varphi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_T\ \ P;R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0)\in M^2(0\ \ T;R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(3)有唯一解．由引理2.1知 存在与 α 无关的正常数 $\delta_0=\delta_0(k\ \ \lambda\ \ \beta_1\ \ \mu_1\ \ \boldsymbol{H}\ \ T)$ 使得对 $\delta\in[0\ \ \delta_0]$ $\psi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_0\ \ P;R^n)$ $\varphi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_T\ \ P;R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0)\in M^2(0\ \ T;R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(3)当 $\alpha=\delta$ 时有唯一解．由于 δ_0 只依赖于 k λ β_1 μ_1 $\boldsymbol{H}$ T 可以重复 N 次这一过程 使得 $1\leqslant N\delta_0<1+\delta_0$．特别地 当 $\alpha=1$ 时 取 $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0)\equiv\boldsymbol{0}$ $\varphi\equiv\boldsymbol{0}$ $\psi\equiv\boldsymbol{0}$ 方程(3)在 $M^2(0\ \ T;R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 中有唯一解．

再考虑 $m<n$ 的情形．当 $\alpha=0$ 时 对于 $\psi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_0\ \ P;R^n)$ $\varphi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_T\ \ P;R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \ \boldsymbol{G}_0\ \ \boldsymbol{g}_0)\in M^2(0\ \ T;R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(6)有唯一解．由引理2.2知 存在与 α 无关的正常数 $\delta_0=\delta_0(k\ \ \lambda\ \ \beta_2\ \ \mu_2\ \ \boldsymbol{H}\ \ T)$ 使得对 $\delta\in[0\ \ \delta_0]$ $\psi\in L^2(\Omega\ \ \mathscr{F}_0\ \ P;R^n)$ $\varphi\in L^2(\Omega$

$\mathscr{F}_T\ P; R^m)$ $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \boldsymbol{G}_0\ \boldsymbol{g}_0) \in M^2(0\ T;\ R^{m+n+m\times l+n\times d})$ 方程(6) 当 $\alpha = \delta$ 时有唯一解. 由于 δ_0 只依赖于 $k\ \ \lambda\ \beta_2\ \mu_2\ \boldsymbol{H}\ T$ 可以重复 N 次这一过程 使得 $1 \leqslant N\delta_0 < 1+\delta_0$. 特别地 当 $\alpha = 1$ 时 取 $(\boldsymbol{F}_0\ \boldsymbol{f}_0\ \boldsymbol{G}_0\ \boldsymbol{g}_0) \equiv \boldsymbol{0}$ $\varphi \equiv \boldsymbol{0}$ $\psi \equiv \boldsymbol{0}$ 方程(6) 在 $M^2(0\ T; R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 中有唯一解.

类似于上面的情形, 当 $m = n$ 时, 也可得存在性结果. 存在性得证.

4 正倒向重随机微分方程对参数的依赖性

本节中, 讨论正倒向重随机微分方程的解对参数的连续性和可微性. 令 $\left\{\boldsymbol{f}_\alpha\ \boldsymbol{g}_\alpha\ \boldsymbol{F}_\alpha\ \boldsymbol{G}_\alpha\ \Psi_\alpha\ \Phi_\alpha\ \alpha \in \mathbf{R}\right\}$ 为一族正倒向重随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{y}_t^\alpha = \boldsymbol{f}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{z}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}_t^\alpha)\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{z}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}_t^\alpha)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t - \boldsymbol{z}_t^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t \\ \boldsymbol{y}_0^\alpha = \Psi_\alpha(\boldsymbol{Y}_0^\alpha) \\ \mathrm{d}\boldsymbol{Y}_t^\alpha = \boldsymbol{F}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{z}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}_t^\alpha)\mathrm{d}t + \boldsymbol{G}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{z}_t^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}_t^\alpha)\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t + \boldsymbol{Z}_t^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{W}_t \\ \boldsymbol{Y}_T^\alpha = \Phi_\alpha(\boldsymbol{y}_T^\alpha). \end{cases} \tag{7}$$

其解记为 $(\boldsymbol{y}^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}^\alpha\ \ \boldsymbol{z}^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}^\alpha)$.

假定

$$(\mathrm{H5})\begin{cases} 1)\ \left\{\boldsymbol{f}_\alpha\ \boldsymbol{g}_\alpha\ \boldsymbol{F}_\alpha\ \boldsymbol{G}_\alpha\ \Psi_\alpha\ \Phi_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{R}\right\} \text{ 关于相同的常数 } k \text{ 满足等度} \\ \quad \text{Lipschitz 条件(见(H4))}; \\ 2)\ \left\{\boldsymbol{f}_\alpha\ \boldsymbol{g}_\alpha\ \boldsymbol{F}_\alpha\ \boldsymbol{G}_\alpha\ \Psi_\alpha\ \Phi_\alpha\right\} \text{ 分别在 } M^2(0\ T; R^{n+m+n\times d+m\times l}) \text{ 和} \\ \quad L^2(\Omega\ \mathscr{F}_0\ P; R^n) \times L^2(\Omega\ \mathscr{F}_T\ P; R^m) \text{ 中关于 } \alpha \text{ 是连续的}. \end{cases}$$

有下面的连续性结果.

定理 4.1 令 $\left\{\boldsymbol{f}_\alpha\ \boldsymbol{g}_\alpha\ \boldsymbol{F}_\alpha\ \boldsymbol{G}_\alpha\ \Psi_\alpha\ \Phi_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{R}\right\}$ 为一族正倒向重随机微分方程(7), 满足假设(H1)~(H5), 其解记为 $(\boldsymbol{y}^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}^\alpha\ \ \boldsymbol{z}^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}^\alpha)$. 则函数族 $\left\{(\boldsymbol{y}^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}^\alpha\ \ \boldsymbol{z}^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}^\alpha);\ \alpha \in \mathbf{R}\right\}$ 在 $M^2(0\ T; R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 中关于 α 是连续的.

证明 为记号简便, 仅证方程(7)的解在 $\alpha = 0$ 时连续. 只需证 $\alpha \to 0$ 时 $(\boldsymbol{y}^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}^\alpha\ \ \boldsymbol{z}^\alpha\ \ \boldsymbol{Z}^\alpha\ \ \boldsymbol{y}_T^\alpha\ \ \boldsymbol{Y}_0^\alpha)$ 在 $M^2(0\ T; R^{n+m+n\times l+m\times d}) \times L^2(\Omega\ \mathscr{F}_T\ P; R^n) \times L^2(\Omega\ \mathscr{F}_0\ P; R^m)$ 中 收敛于 $(\boldsymbol{y}^0\ \ \boldsymbol{Y}^0\ \ \boldsymbol{z}^0\ \ \boldsymbol{Z}^0\ \ \boldsymbol{y}_T^0\ \ \boldsymbol{Y}_0^0)$.

令 $\hat{\boldsymbol{U}}_t = \boldsymbol{U}_t^\alpha - \boldsymbol{U}_t^0 = (\hat{y}_t\ \ \hat{Y}_t\ \ \hat{z}_t\ \ \hat{\boldsymbol{Z}}_t) = (\boldsymbol{y}_t^\alpha - \boldsymbol{y}_t^0\ \ \boldsymbol{Y}_t^\alpha - \boldsymbol{Y}_t^0\ \ \boldsymbol{z}_t^\alpha - \boldsymbol{z}_t^0\ \ \boldsymbol{Z}_t^\alpha - \boldsymbol{Z}_t^0)$. 则

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{y}}_t = (\boldsymbol{f}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^\alpha) - \boldsymbol{f}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0))\mathrm{d}t + (\boldsymbol{g}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^\alpha) - \boldsymbol{g}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t - \hat{\boldsymbol{z}}_t\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t$$

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{Y}}_t = (\boldsymbol{F}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^\alpha) - \boldsymbol{F}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0))\mathrm{d}t + (\boldsymbol{G}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^\alpha) - \boldsymbol{G}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0))\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t + \hat{\boldsymbol{Z}}_t\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_0 = \Psi_\alpha(\boldsymbol{Y}_0^\alpha) - \Psi_0(\boldsymbol{Y}_0^0)\quad \hat{\boldsymbol{Y}}_T = \Phi_\alpha(\boldsymbol{y}_T^\alpha) - \Phi_0(\boldsymbol{y}_T^0).$$

对 $(\hat{\boldsymbol{y}}_t\ \ \hat{\boldsymbol{z}}_t)$ $(\hat{\boldsymbol{Y}}_t\ \ \hat{\boldsymbol{Z}}_t)$ 和 $\langle \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{y}}_t\ \ \hat{\boldsymbol{Y}}_t\rangle$ 应用 It0公式, 利用引理 2.1 中类似的技巧, 可以得到

$$\mathrm{E}\int_0^T |\hat{\boldsymbol{U}}_t|^2\mathrm{d}t + \mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{y}}_T|^2 + \mathrm{E}|\hat{\boldsymbol{Y}}_0|^2 \leqslant$$

$$C\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{f}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0) - \boldsymbol{f}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0)|^2 + |\boldsymbol{g}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0) - \boldsymbol{g}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0)|^2)\mathrm{d}t +$$

$$C\mathrm{E}\int_0^T(|\boldsymbol{F}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0) - \boldsymbol{F}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0)|^2 + |\boldsymbol{G}_\alpha(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0) - \boldsymbol{G}_0(t\ \ \boldsymbol{U}_t^0)|^2)\mathrm{d}t +$$

$$CE|\Phi_\alpha(y_T^0)-\Phi_0(y_T^0)|^2+CE|\Psi_\alpha(Y_0^0)-\Psi_0(Y_0^0)|^2$$

这里 $C>0$ 依赖于Lipschitz常数 $k,\lambda,\mu_1,\beta_1,\mu_2,\beta_2,H$ 及 T. 从而由假设(H5)可以得到,当 $\alpha\to 0$ 时,在 $M^2(0,T;R^{n+m+n\times l+m\times d})\times L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P;R^n)\times L^2(\Omega,\mathscr{F}_0,P;R^m)$ 中 $(y^\alpha,Y^\alpha,z^\alpha,Z^\alpha,y_T^\alpha,Y_0^\alpha)$ 收敛于 $(y^0,Y^0,z^0,Z^0,y_T^0,Y_0^0)$. 证毕.

下面,讨论方程(7)的解关于参数的可微性.

定理 4.2 令 $\{f_\alpha,g_\alpha,F_\alpha,G_\alpha,\Psi_\alpha,\Phi_\alpha;\alpha\in\mathbf{R}\}$ 为一族正倒向重随机微分方程(7),满足假设(H1)~(H4)并假设

(H6) $\begin{cases} 1)\ \text{对每个 } \alpha\in\mathbf{R},\ \{f_\alpha(t,U),g_\alpha(t,U),F_\alpha(t,U),G_\alpha(t,U),\Psi_\alpha(Y),\Phi_\alpha(y)\} \\ \quad\ \text{分别关于}(U,Y,y)\text{连续可微且导数一致有界;} \\ 2)\ \text{函数族}\{f_\alpha,g_\alpha,F_\alpha,G_\alpha,\Psi_\alpha,\Phi_\alpha;\alpha\in\mathbf{R}\}\text{关于 }\alpha\text{ 是可微的.} \end{cases}$

其解记为 $(y^\alpha,Y^\alpha,z^\alpha,Z^\alpha)$. 那么函数族 $\{(y^\alpha,Y^\alpha,z^\alpha,Z^\alpha);\alpha\in\mathbf{R}\}$ 在 $M^2(0,T;R^{n+m+n\times l+m\times d})$ 中关于 α 可微的,且在 $\alpha=\alpha_0$ 处的导数是如下线性正倒向重随机微分方程的解 $(\delta_\alpha y^{\alpha_0},\delta_\alpha Y^{\alpha_0},\delta_\alpha z^{\alpha_0},\delta_\alpha Z^{\alpha_0})$:

$$\begin{aligned} d\delta_\alpha y_t^{\alpha_0}={}&[\delta_\alpha f_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})+\delta_y f_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha y_t^{\alpha_0})+\delta_Y f_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Y_t^{\alpha_0})+\\ &\delta_z f_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha z_t^{\alpha_0})+\delta_Z f_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Z_t^{\alpha_0})]dt+\\ &[\delta_\alpha g_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})+\delta_y g_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha y_t^{\alpha_0})+\delta_Y g_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Y_t^{\alpha_0})+\\ &\delta_z g_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha z_t^{\alpha_0})+\delta_Z g_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Z_t^{\alpha_0})]dW_t-(\delta_\alpha z_t^{\alpha_0})dB_t \end{aligned}\tag{8a}$$

$$\begin{aligned} d\delta_\alpha Y_t^{\alpha_0}={}&[\delta_\alpha F_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})+\delta_y F_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha y_t^{\alpha_0})+\delta_Y F_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Y_t^{\alpha_0})+\\ &\delta_z F_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha z_t^{\alpha_0})+\delta_Z F_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Z_t^{\alpha_0})]dt+\\ &[\delta_\alpha G_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})+\delta_y G_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha y_t^{\alpha_0})+\delta_Y G_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Y_t^{\alpha_0})+\\ &\delta_z G_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha z_t^{\alpha_0})+\delta_Z G_{\alpha_0}(t,U_t^{\alpha_0})(\delta_\alpha Z_t^{\alpha_0})]dB_t+(\delta_\alpha Z_t^{\alpha_0})dW_t \end{aligned}\tag{8b}$$

$$\delta_\alpha y_0^{\alpha_0}=\delta_Y\Psi_{\alpha_0}(Y_0^{\alpha_0})(\delta_\alpha Y_0^{\alpha_0})+\delta_\alpha\Psi_{\alpha_0}(Y_0^{\alpha_0})\tag{8c}$$

$$\delta_\alpha Y_T^{\alpha_0}=\delta_y\Phi_{\alpha_0}(y_T^{\alpha_0})(\delta_\alpha y_T^{\alpha_0})+\delta_\alpha\Phi_{\alpha_0}(y_T^{\alpha_0}).\tag{8d}$$

Peng 和 Wu[7] 证明了正倒向随机微分方程的解关于参数的可微性. 结合 Peng 和 Wu[7] 的方法与定理1.1和定理4.1,容易得到上面的定理4.2. 证明略. 正倒向重随机微分方程的解有了这些重要的性质,可以使得正倒向重随机微分方程的应用更广泛.

[参 考 文 献]

[1] Pardoux E, Peng S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems Control Letters, 1990, **14**(1): 55-61.

[2] El Karoui N, Peng S G, Quenez M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathematical Finance, 1997, **7**(1): 1-71.

[3] Ma J, Yong J M. Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications[M]. Lecture Notes in Mathematics, **1702**, Berlin: Springer, 1999.

[4] Antonelli F. Backward-forward stochastic differential equations[J]. The Annals of Applied Probability, 1993, **3**(3): 777-793.

[5] Ma J, Protter P, Yong J M. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—a

four step scheme[J]. Probab Theory Related Fields, 1994, **98**(2): 339-359.

[6] Hu Y, Peng S G. Solution of forward-backward stochastic differential equations[J]. Probab Theory Related Fields, 1995, **103**(2): 273-283.

[7] Peng S G, Wu Z. Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control[J]. SIAM J Control Optim, 1999, **37**(3): 825-843.

[8] Yong J M. Finding adapted solutions of forward-backward stochastic differential equations—method of continuation[J]. Probab Theory Related Fields, 1997, **107**(3): 537-572.

[9] Peng S G, Shi Y F. Infinite horizon forward-backward stochastic differential equations[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2000, **85**(1): 75-92.

[10] Peng S G. Problem of eigenvalues of stochastic Hamiltonian systems with boundary conditions[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2000, **88**(2): 259-290.

[11] Bismut J M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control[J]. Journal of Mathematial Analysis and Applications, 1973, **44**(4): 384-404.

[12] Peng S G, Shi Y F. A type of time-symmetric forward-backward stochastic differential equations[J]. C R Acad Sci Paris, Ser Ⅰ, 2003, **336**(9): 773-778.

[13] Pardoux E, Peng S G. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear parabolic SPDE's[J]. Probab Theory Related Fields, 1994, **98**(2): 209-227.

[14] Shi Y F. Singularly perturbed boundary value problems[J]. Acta Mathematicae Applacatea Sinica, 1999, **15**(4): 409-417.

[15] Peng S G. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations[J]. Stochastics, 1991, **37**(1/2): 61-74.

Solutions of General Forward-Backward Doubly Stochastic Differential Equations

ZHU Qing-feng[1], SHI Yu-feng[2], GONG Xian-jun[2]

(1. School of Statistics and Mathematics, Shandong University of Finance, Jinan 250014, P. R. China;

2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P. R. China)

Abstract: A general type of forward-backward doubly stochastic differential equations (FBDSDEs in short) was studied, which extends many important equations well studied before, including stochastic Hamiltonian systems. Under some much weaker monotonicity assumptions, the existence and uniqueness results for measurable solutions were established by means of a method of continuation. Furthermore the continuity and differentiability of the solutions of FBDSDEs depending on parameters were discussed.

Key words: forward-backward doubly stochastic differential equations; method of continuation; ***H***-monotone