文章编号: 1000-0887(2009) 04-0479-05

非线性耗散-色散方程行波解的存在性*

M·B·A·曼索

(南山谷大学 吉纳理学院 数学系, 吉纳, 埃及)

(陈立群推荐)

摘要: 非线性耗散-色散方程出现在很多物理现象中. 基于动力系统理论, 利用几何奇摄动法, 当耗散项系数充分小时, 研究了该方程行波解的存在性. 结果表明, 在常微分方程组的一个三维系统中, 行波依靠二维的慢流变形而存在. 然后利用 Melnikov 方法, 在该流形中建立了同宿轨道的存在性, 它与方程的孤立波解相对应. 进一步, 给出了某些数值计算, 得到该波轨道的近似.

关 键 词: 耗散-色散方程; 奇摄动; 行波

中图分类号: O175.29; O347; O193 文献标识码: A

引 言

考虑如下模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\tau\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\delta\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \tag{1}$$

其中, α, β, γ, τ 和 δ 为常数. 该模型方程出现在稀薄液体膜、浅层 Benard-Marangoni 对流和其他系统中, 参见文献[1]及其中的参考文献. 可以认为, 方程(1)是耗散-摄动 Korteweg-de Vries (KdV) 方程, 其中, β, τ, δ 比 α, γ 小得多. 方程(1)也可以看作色散和反向二次扩散很小, 即 γ 和 τ 很小的 Kuramoto-Sivashinsky 方程的扩展.

文献[2-4]利用渐近理论得到了方程(1)的精确解, 表现为局部固定的非线性波形式, 或者系数上受某些约束的耗散孤立波形式. 文献[1]对方程(1)这样的解也进行了数值研究.

本文将方程(1)考虑为奇摄动 KdV 方程. 即是说, 方程(1)中所有耗散项的系数相对于其它系数很小, 即 $\beta=\varepsilon b$, $\tau=\varepsilon r$, $\delta=\varepsilon s$, $\varepsilon\ll 1$. 则方程(1)可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\varepsilon\left(b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+s\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)=0. \tag{2}$$

我们利用动力系统方法, 特别是几何奇摄动法, 以及不变流形理论, 研究方程(2)行波解的存在性[5-9].

1 主要结果

不失一般性, 行波的形式为 $u(x,t)=u(z)$, $z=x-ct$, $c\geqslant 0$, 对方程(2)积分之后, 并设

* 收稿日期: 2008-06-09; 修订日期: 2009-03-06

作者简介: M. B. A. Mansour (E-mail: mah_mansour@hotmail.com).

本文原文为英文, 黄绍红 译, 张禄坤 校.

其积分常数为 0, 得

$$- cu + \frac{\alpha}{2}u^2 + \gamma\frac{d^2u}{dz^2} + \varepsilon\left(b\frac{du}{dz} + ru\frac{du}{dz} + s\frac{d^3u}{dz^3}\right) = 0, \tag{3}$$

或者, 看作一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dz} = v, \ \dfrac{dv}{dz} = w, \\ s\varepsilon\dfrac{dw}{dz} = cu - \dfrac{\alpha}{2}u^2 - b\varepsilon v - r\varepsilon uv - \gamma w. \end{cases} \tag{4}$$

若 $\varepsilon = 0$, 则方程组(4) 简化为

$$\frac{du}{dz} = v, \ \frac{dv}{dz} = \frac{1}{\gamma}\left(cu - \frac{\alpha}{2}u^2\right).$$

这就是 KdV 方程行波解的常微分方程动力学系统.

若 ε 不为 0, 方程(4) 定义一个常微分方程组的动力系统, 其解进入三维相空间(u, v, w). 在该相空间中有临界点$(u, v, w) = (0, 0, 0)$ 和$(u_e, 0, 0)$, 其中, $u_e = 2c/\alpha$, 并且这些平衡点与 ε 无关.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(4) 并不是 R^3 中的动力系统, 此问题可以通过变换 $z = \varepsilon\xi$ 来解决. 此时该系统变为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\zeta} = \varepsilon v, \ \dfrac{dv}{d\zeta} = \varepsilon w, \\ s\dfrac{dw}{d\zeta} = cu - \dfrac{\alpha}{2}u^2 - b\varepsilon v - r\varepsilon uv - \gamma w. \end{cases} \tag{5}$$

在方程(4) 中, 令 $\varepsilon \to 0$, 得到

$$\frac{du}{dz} = v, \ \frac{dv}{dz} = w, \ 0 = cu - \frac{\alpha}{2}u^2 - \gamma w. \tag{6}$$

这样, 系统(6) 的流限于集合

$$M_0 = \left\{(u, v, w) \in R^3: cu - \frac{\alpha}{2}u^2 - \gamma w = 0\right\}, \tag{7}$$

并且其动力学性质由式(6) 的前两个方程确定.

由 Fenichel 的文献[5], 若快变系统(5) 的线性化, 限于 M_0, 确有零实部的 M_0 维精确特征值, 则 M_0 为标准双曲流形. 该快变系统线性化, 限于 M_0, 有矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c - \alpha u & 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

且其特征值为 0, 0, $-\gamma$. 因而 M_0 是标准的双曲型, 由几何奇摄动理论, 意味着对 $\varepsilon > 0$, 存在一个二维流形 M_ε. 为了显式地确定 M_ε, 有

$$M_\varepsilon = \left\{(u, v, w) \in R^3: w = h(u, v, \varepsilon) + \frac{1}{\gamma}\left(cu - \frac{\alpha}{2}u^2\right)\right\}, \tag{8}$$

其中, 函数 h 待定且满足

$$h(u, v, 0) = 0. \tag{9}$$

将上式代入慢变系统(4), 则 h 必满足

$$s\varepsilon\left[v\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v}\left(h + \frac{1}{\gamma}\left(cu - \frac{\alpha}{2}u^2\right)\right) + \frac{1}{\gamma}\left(cu - \frac{\alpha}{2}u^2\right) + \frac{1}{\gamma}(c - \alpha u)v\right] =$$

$$-b\varepsilon v - r\varepsilon uv - \gamma h.$$

由于 ε 为小参数，我们尝试对该偏微分方程的解按 ε 正规摄动展开．因为 ε= 0 时 f 为 0，设

$$h(u, v, \varepsilon) = \varepsilon h_1(u, v) + O(\varepsilon^2). \tag{10}$$

将 $h(u, v, \varepsilon)$ 代入以上方程，并设 ε 的系数为 0，得

$$h_1(u, v) = \frac{1}{\gamma^2}((\alpha s - \gamma r)u - (b\gamma + sc))v. \tag{11}$$

因此，限于 M_ε 的慢变系统(4) 由下式给出:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\gamma}\left(cu - \dfrac{\alpha}{2}u^2\right) + \dfrac{\varepsilon}{\gamma^2}((\alpha s - \gamma r)u - (b\gamma + sc))v + O(\varepsilon^2). \end{cases} \tag{12}$$

注意，当 ε= 0 时，方程(12) 简化为 KdV 方程对应的系统．我们现在来证明，当 ε> 0 充分小时，方程组(12) 存在一个同宿轨道．为此，我们要用到 Melnikov 函数的自变量[10]．当 ε= 0 时，同宿轨道 $q_0(z) = (u_0(z), v_0(z))$ 如下:

$$u_0(z) = \frac{3c}{\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\gamma}}z\right)$$

和

$$v_0(z) = -\frac{6c}{\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\gamma}}z\right)\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\gamma}}z\right),$$

则 Melnikov 函数为

$$M(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty}(f(q^0(z)) \wedge g(q^0(z), 0))\mathrm{d}z + O(\varepsilon),$$

其中，算子 ∧ 定义为 $f \wedge g = f_1 g_2 - f_2 g_1$．故

$$\begin{aligned} M(0) = {} & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma^2}\left((\alpha s - \gamma r)\frac{3c}{\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\gamma}}z\right) - (b\gamma + sc)\right) \times \\ & \left(-\frac{6c}{\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\gamma}}z\right)\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\gamma}}z\right)\right)^2 \mathrm{d}z = \\ & \frac{144c^2}{15\alpha^2\gamma^2}\left(\frac{16c(\alpha s - \gamma r)}{7\alpha} - b\gamma - sc\right). \end{aligned} \tag{13}$$

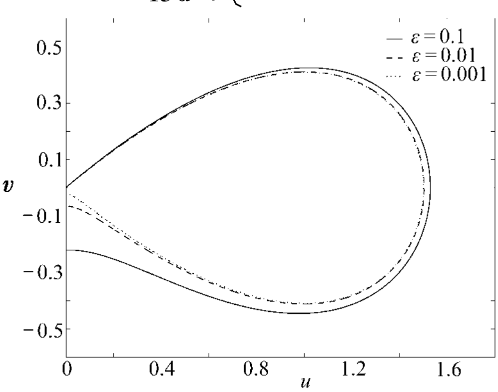

图 1　临界点(0, 0, 0) 的同宿轨道轨迹解投影

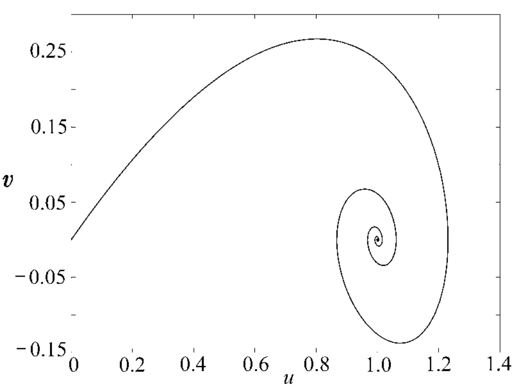

图 2　两个临界点(0, 0, 0) 和 $(u_e, 0, 0)$ 时的异宿轨迹投影

因此,存在同宿轨道的可解性条件为 $M(0) = 0$. 该同宿轨道对应于方程(2)的孤立波解. 这一点将为本文的某些数值计算所证明.

作为一个初值问题, 我们来求解系统(4). 其初值条件就是系统(4)稳态(0,0,0)的不稳定流形上的一个近似点. 不同系数数值解的结果示于图1、2. 图1给出了 $\alpha = \gamma = 2.0$, $b = -1.0$, $r = s = 1.0$, $c = 1.0$ 和 $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ 时同宿轨道的投影. 显然, 当 ε 变大时, 同宿轨道出现破裂.

图2给出了当 b 大于0时临界点 $(0, 0, 0)$ 和 $(u_e, 0, 0)$ 时的异宿轨迹投影. 显然, 临界点 $(0, 0, 0)$ 和 $(u_e, 0, 0)$ 时的异宿轨迹在三维相空间中, 依赖于二维流形存在. 这些异宿轨迹仅对应于扭状(振荡扭结)波.

2 结　　论

本文研究了很多物理现象中出现的非线性色散-耗散方程. 利用动力学系统的方法, 特别是几何奇摄动法, 当耗散项系数充分小时, 研究了该方程行波解的存在性. 结果表明, 在三维行波常微分方程组中, 行波依靠一个二维的慢变流形而存在. 然后, 利用 Melnikov 方法, 在该慢流形内, 通过适当的稳定和不稳定流形的横截交叉, 确定了同宿轨道的存在. 这也就确定了该方程存在孤立行波解. 进一步, 通过求解一个初值问题, 给出的某些数值计算, 近似地显示那些同宿轨道, 对应于孤立行波解.

[参　考　文　献]

[1] Kliakhandler I L, Porubov A V, Velarde M G. Localized finite-amplitude disturbances and selection of solitary waves[J]. Phys Rev E, 2000, **62**: 4959-4962.

[2] Lou S Y, Huang G X, Ruan H Y. Exact solitary waves in a convecting fluid[J]. J Phys A, 1991, **24**(11): L587-L590.

[3] Porubov A V. Exact travelling wave solutions of nonlinear evolution equation of surface waves in a convecting fluid[J]. J Phys A, 1993, **26**(17): L797-L800.

[4] Velarde M G, Nekorkin V I, Maksimov A G. Further results on the evolution of solitary waves and their bound states of a dissipative Korteweg-de Vries equation[J]. Internat J Bifurcation Chaos, 1995, **5**(3): 831-839.

[5] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations[J]. J Differantial Equations, 1979, **31**(1): 53-98.

[6] Jones C K R T. Geometric singular perturbation theory[A]. In: Johnson R, Ed. Dynamical Systems[C]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[7] Ruan S G, Xiao D M. Stability of steady states and existence of travelling waves in a vector-disease model[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, Sect A, 2004, **134**(5): 991-1011.

[8] Ktrychko Y N, Bartuccelli M V, Blyuss K B. Persistence of traveling wave solutions of a fourth order diffusion system[J]. J Comput Appl Math, 2005, **176**(2): 433-443.

[9] Mansour M B A. Existence of traveling wave solutions in a hyperbolie-elliptic system of equations[J]. Comm Math Sci, 2006, **4**: 731-739.

[10] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcation of Vector Fields[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

Existence of Traveling Wave Solutions for a Nonlinear Dissipative-Dispersive Equation

M. B. A. Mansour
(Mathematics Department, Faculty of Science at Qena, South Valley University, Qena, Egypt)

Abstract: A dissipative-dispersive nonlinear equation which appears in many physical phenomena is considered. By using dynamical systems method, specifically the geometric singular perturbation method, the existence of traveling wave solutions of the equation when the dissipative terms have sufficiently small coefficients was investigated. It was shown that the traveling waves exist on a two-dimensional slow manifold in a three-dimensional system of ODEs. Then, by using the Melnikov method, the existence of a homoclinic orbit in this manifold, which corresponds to a solitary wave solution of the equation, was established. Furthermore, some numerical computations were presented to show approximations of such wave orbits.

Key words: dissipative-dispersive equation; singular perturbations; traveling waves