

# 覆冰导线舞动非线性数值模拟方法<sup>\*</sup>

刘小会<sup>1</sup>, 严波<sup>1</sup>, 张宏雁<sup>2</sup>, 周松<sup>3</sup>

(1. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400030;

2. 四川电力试验研究院, 成都 610071;

3. 四川省电力工业调整试验所, 成都 610016)

(陈山林推荐)

**摘要:** 基于覆冰导线所受空气动力的非线性和导线大幅运动的几何非线性, 利用虚功原理建立覆冰导线非线性运动方程, 采用具有 3 个平动自由度和 1 个扭转自由度的三结点等参单元, 得到基于更新 Lagrange 格式的覆冰导线的非线性动力学有限元方程. 采用 Newmark 时间积分和 Newton-Raphson 非线性迭代法求解有限元方程. 编制了相应的计算程序, 利用算例验证了方法和程序的正确性. 进而利用该方法通过对典型覆冰线路的数值模拟, 揭示了当覆冰线路在垂直和水平方向固有频率之间存在整数倍关系的情况下, 可能出现的一种新的舞动模式, 其可理解为非线性动力系统的饱和现象.

**关键词:** 覆冰导线; 舞动; 几何非线性; 数值模拟

**中图分类号:** TB122 **文献标识码:** A

## 引 言

导线覆冰以后, 在自然风作用下产生非线性气动力而使导线作低频大幅振动, 这种现象称为舞动. 舞动发生时导线会产生竖直、水平和扭转 3 个方向的复杂耦合振动. 由于舞动持续时间长, 幅值会达到数米甚至十几米, 所以舞动形成后对高压输电线路造成极大的破坏作用, 严重时可以导致大面积电力供应瘫痪.

自 20 世纪 30 年代发现架空输电线舞动现象以来, 人们便开始对输电线舞动进行了研究. 目前国际上普遍接受的有 Den Hartog 垂直舞动理论<sup>[1]</sup>和 Nigol 等扭转舞动理论<sup>[2]</sup>. 在舞动的数值模拟研究方面, Simpson 曾利用传递矩阵法和动刚度法分析了多分裂导线的动态特性<sup>[3]</sup>. Yu 和 Desai 等人提出了三自由度模型分析研究导线的舞动<sup>[4]</sup>. Desai 等人则采用三结点等参单元的有限元方法来研究导线的舞动, 并采用振型叠加法求解有限元方程<sup>[5]</sup>. 国内学者何铮和钱天虹则采用振型叠加法的思想建立了分裂导线舞动的数学模型, 并进而对中山口大跨越三分裂导线的舞动进行了数值计算分析<sup>[6]</sup>. 上述数值分析方法多数基于振型叠加法, 对系统方程

\* 收稿日期: 2008-09-13; 修订日期: 2009-02-17

基金项目: 国家电网公司科技资助项目(2007-1-77); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC, 2006BB6149)

作者简介: 刘小会(1981—), 男, 内蒙古人, 博士生(E-mail: cqxlxh@sohu.com);

严波, 教授, 博士(联系人. Tel: +86-23-65102561; E-mail: boyan@cqu.edu.cn).

进行了线性化处理。由于导线是悬垂柔性体，舞动属于大位移小应变的非线性问题，因而采用这类方法可能带来较大的误差。此外，国内的王丽新等<sup>[7]</sup>也采用梁单元对覆冰导线的舞动进行了非线性数值模拟，由于导线的抗弯刚度小，不适合采用梁单元进行模拟，且没有考虑覆冰后由于偏心而产生的惯性作用。

本文采用 Desai 等给出的三结点索单元<sup>[5]</sup>，建立了模拟覆冰导线舞动的基于更新 Lagrange 格式的有限元方程。由于考虑了导线运动过程中的几何非线性以及覆冰产生的偏心惯性作用，因而与实际更接近。该方法可以应用于任意多分裂导线的情况。

## 1 覆冰导线舞动的有限元方程

覆冰导线的舞动是一典型的几何非线性问题，其伸长变形一般认为在线弹性小变形范围。对于固体力学一般问题，采用更新的 Lagrange 格式，在  $t + \Delta t$  时刻的虚功方程可写成如下形式<sup>[8]</sup>：

$$\int_{t+\Delta t} \delta u_i \rho^{t+\Delta t} \dot{u}_i^{t+\Delta t} dV + \int_V {}_t D_{ijkl} \delta e_{kl} \delta e_{ij}^t dV + \int_V {}_t \tau_{ij} \delta {}_t \eta_{ij}^t dV = \int_{t+\Delta t} \delta u_k f_k^{t+\Delta t} dS_\sigma + \int_{t+\Delta t} \delta u_k \rho^{t+\Delta t} f_k^{t+\Delta t} dV - \int_V {}_t \tau_{ij} \delta e_{ij}^t dV, \quad (1)$$

式中  $\rho^{t+\Delta t}$ ， $u_i^{t+\Delta t}$ ， $\dot{u}_i^{t+\Delta t}$  分别是  $t + \Delta t$  时刻的密度、位移和加速度， ${}_t D_{ijkl}$  是本构张量， ${}_{t+} e_{kl}$  和  ${}_{t+} \eta_{ij}$  是 Green 应变增量的线性和非线性部分， ${}_t \tau_{ij}$  是  $t$  时刻的 Cauchy 应力，由于更新 Lagrange 格式以  $t$  时刻的构形为参考构形， $t$  时刻的 Cauchy 应力和 Kirchhoff 应力  ${}_t S_{ij}$  相等， ${}_{t+} t_k$  和  ${}_{t+} f_k^{t+\Delta t}$  分别是体积载荷和面载荷， ${}_{t+\Delta t} dV$  和  ${}_{t+\Delta t} dS_\sigma$  分别是  $t + \Delta t$  时刻的微元体积和微元面积。

### 1.1 单元分析

现在讨论三结点曲线索单元。单元的每一结点具有 3 个平动自由度和 1 个扭转自由度。采用更新 Lagrange 格式<sup>[5]</sup>，设  $t$  时刻索单元任一点的空间坐标为  ${}^t x_i$ ， $t + \Delta t$  时刻为  ${}^{t+\Delta t} x_i$ ，沿导线轴的自然坐标为  $S$ ，如图 1 所示。从  $t$  时刻到  $t + \Delta t$  时刻的位移为  $u_i$ ，关于  $S$  坐标的旋转角为  $\theta$ ，单元结点位移向量  $q^e$  由下式定义：

$$q^e = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \theta^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \theta^2 \quad u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3 \quad \theta^3]^T. \quad (2)$$

上式中右上标表示单元中局部结点编号。从  $t$  时刻到  $t + \Delta t$  时刻单元上任意一点(导线截面中心点)的位移和转角可以表示为

$$[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \theta]^T = Nq^e. \quad (3)$$

形状函数矩阵  $N$  为

$$N = [N_1 I \quad N_2 I \quad N_3 I], \quad (4)$$

$I$  是  $4 \times 4$  阶的单位矩阵，形函数  $N_k$  为<sup>[5]</sup>

$$\begin{cases} N_1 = \frac{2S^2}{l_e^2} - \frac{3S}{l_e} + 1, \\ N_2 = -\frac{4S^2}{l_e^2} + \frac{4S}{l_e}, \quad N_3 = \frac{2S^2}{l_e^2} - \frac{S}{l_e}, \end{cases} \quad (5)$$

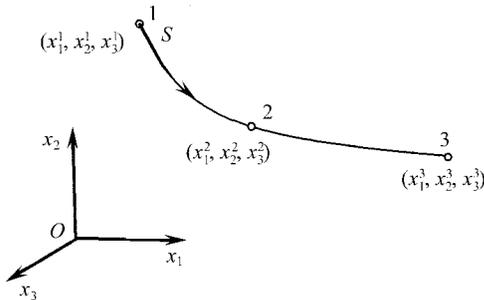


图 1 三结点抛物线单元

这里  $l_e$  是单元的长度。

现以导线任意截面的中心点为原点, 建立和整体坐标系平行的局部坐标系  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , 该坐标系随导线一起平动, 如图 2 所示. 假设导线的弧垂很小, 所以在  $t + \Delta t$  时刻导线截面上任意一点的位移  $u'_i$  可以用索单元截面中点 ( $O$  点) 的位移  $u_i$  表示,

$$[u'_1 \quad u'_2 \quad u'_3]^T = \mathbf{H}\mathbf{N}\mathbf{q}^e, \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x'_3 \\ 0 & 0 & 1 & x'_2 \end{bmatrix}.$$

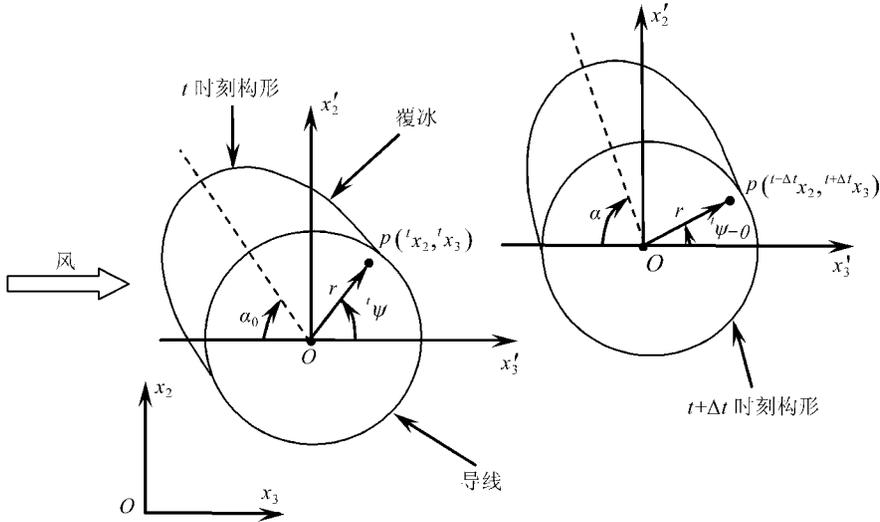


图 2 覆冰导线截面

对于大位移小应变问题, 可以忽略材料密度的变化. 把式(6)代入虚功方程(1)中的第 1 项可以得到

$$\begin{aligned} \int_{t+\Delta t} \delta u'_i \rho^+ \Delta t' u'_i dV &= \int_{l_e} \int_A \rho \delta(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{N}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{N}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^e dA dS = \\ &= \int_{l_e} \delta \mathbf{q}^e \mathbf{N}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{N}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^e dS, \end{aligned} \quad (7)$$

其中对称矩阵  $\boldsymbol{\mu}$  ( $4 \times 4$  矩阵) 中的非零元素的定义如下:

$$\begin{cases} \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu = \int_A \rho dA, & \mu_{24} = -S_{x_2} = -\int_A \rho x'_3 dA, \\ \mu_{34} = S_{x_3} = \int_A \rho x'_2 dA, & \mu_{44} = \mathbf{I}_0 = \int_A \rho (x'^2_2 + x'^2_3) dA. \end{cases} \quad (8)$$

现以  $t$  时刻为参考构形,  $t + \Delta t$  时刻导线的轴向 Green 应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}, \quad (9)$$

其中线性项  $\boldsymbol{\varepsilon}_l$  和非线性项  $\boldsymbol{\varepsilon}_{nl}$  分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \frac{\partial x'_i}{\partial S} \frac{\partial u_i}{\partial S}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial S} \frac{\partial u_i}{\partial S}. \quad (10)$$

考虑到导线只受轴向拉力和扭矩作用, 且认为轴向和扭转变形之间的相互影响很小, 则公式(1)左边第 2 项可以写成

$$\int_{V'} d_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta_{ieij} {}^t dV = \int_{V'} \delta_t \epsilon_{il} E_t \epsilon_l {}^t dV + \int_{l_e} \delta_t \Theta G J {}^t \Theta dS = \int_{l_e} A \delta(\mathbf{q}^e)^T {}^t \mathbf{B}^T \mathbf{D} {}^t \mathbf{B} \mathbf{q}^e dS, \quad (11)$$

式中  $A$ ,  $E$  和  $GJ$  分别是导线的横截面积、弹性模量和扭转刚度. 应变矩阵  $\mathbf{B}$  具有如下形式:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3],$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial S} \frac{\partial N_k}{\partial S} & \frac{\partial^t x_2}{\partial S} \frac{\partial N_k}{\partial S} & \frac{\partial^t x_3}{\partial S} \frac{\partial N_k}{\partial S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial S} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (12)$$

弹性矩阵  $\mathbf{D}$  为

$$\mathbf{D} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} AE & 0 \\ 0 & GJ \end{bmatrix}. \quad (13)$$

设  $t$  时刻导线上受到的拉力为  $T$ , 公式(1)中左边第3项可写成

$$\int_{V'} {}^t \tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} {}^t dV = \int_{l_e} \delta_t \epsilon_{il} T dS = \int_{l_e} \delta(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{G}^T {}^t \mathbf{T} \mathbf{G} \mathbf{q}^e dS, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial S} \mathbf{m} & \frac{\partial N_2}{\partial S} \mathbf{m} & \frac{\partial N_3}{\partial S} \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad {}^t \mathbf{T} = {}^t T \mathbf{m}, \quad (15)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

如图2所示, 导线截面上任意一点  $P$  在  $t$  时刻的极坐标为  $(r, {}^t \phi)$ , 在  $t + \Delta t$  时刻的极坐标为  $(r, {}^t \phi - \theta)$ , 则  $t + \Delta t$  时刻  $P$  点在  $x_2$  方向的位移可以表示为

$$u_2' = u_2 + r[\sin({}^t \phi - \theta) - \sin {}^t \phi]. \quad (16)$$

由于从  $t$  时刻到  $t + \Delta t$  时刻的转角很小, 故  $\sin \theta \approx \theta$ . 若重力沿  $x_2$  的负方向, 公式(1)右边第2项可以化简为

$$- \int_{V'} \rho_g \delta u_2' dV = - \int_{V'} \rho_g \delta u_2 dV + \int_{V'} \delta \theta \rho_g r \cos {}^t \phi \cos \theta dV + \int_{l_e} g \delta \mathbf{q}^e \mathbf{L} \mathbf{q}^e dS, \quad (17)$$

这里

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{x_3} \end{bmatrix},$$

式中

$$S_{x_3} = \int_{A_T} \rho x_2 dA = \int_{A_T} \rho r \sin {}^t \phi dA.$$

式(17)中的右端第1项为导线在垂直方向平动时重力的虚功, 第2项为导线扭转时重力产生的偏心力矩的虚功. 若将导线在自重和覆冰作用下的平衡状态作为初始状态, 则该两项消失. 把

第3项移到方程左边,可得覆冰导线的偏心刚度矩阵的积分表达形式.

导线  $t$  时刻的轴向拉力为  ${}^tT$ , 扭矩为  ${}^tM$ , 公式(1)中的右边最后一项成为

$$\int_V {}^t\tau_{ij} \delta_{ij} e_j^t dV = \int_V ({}^t\sigma \delta^t \varepsilon_i + {}^t\tau \delta^t \Theta) dV = \int_{l_e} \delta(\mathbf{q}^e)^T {}^t\mathbf{B}^T \begin{bmatrix} {}^tT & 0 \\ 0 & {}^tM \end{bmatrix} dS. \quad (18)$$

拉力和扭矩可以通过下式计算

$${}^tT = AE {}^t\varepsilon_s + T_0, \quad {}^tM = GJ \frac{\partial {}^t\theta}{\partial S}, \quad (19)$$

其中  ${}^t\varepsilon_s$  为导线  $t$  时刻的轴向应变, 可以由式(9) 计算,  $T_0$  为覆冰导线的初始轴向力.

作用在导线上的气动力荷载依赖于覆冰导线的几何特征和风与导线之间的相对攻角  $\alpha$ . 气动力荷载由下式确定:

$$\begin{bmatrix} F_L & F_D & M_0 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} U_{\text{rel}}^2 d \begin{bmatrix} C_L(\alpha) & C_D(\alpha) & dC_\theta(\alpha) \end{bmatrix}^T, \quad (20)$$

其中  $\rho_{\text{air}}$  和  $d$  分别是空气的密度和无覆冰导线的直径,  $U_{\text{rel}}$  为水平风速度, 下角标 L 和 D 分别表示升力和阻力.  $C_i$  为空气动力系数, 通常用攻角的 3 次多项式近似

$$C_i = a_{i0} + a_{i1}\alpha + a_{i2}\alpha^2 + a_{i3}\alpha^3, \quad (21)$$

可由风洞试验确定. 由此可以计算单元结点外载荷向量

$$\mathbf{F}^e = \int_0^e \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 & F_{x_2} & F_{x_3} & M_0 \end{bmatrix}^T dS. \quad (22)$$

## 1.2 邻跨导线和绝缘子串的模拟

邻档输电线和绝缘子串在  $x_1$  方向的影响可以用线性弹簧模拟其刚度. Veletsos 和 Darbre<sup>[9]</sup> 给出了模拟电线和绝缘子串的等效弹簧刚度:

$$\frac{1}{K_{ST}} = \frac{L}{AE} + \frac{p_y^2 L_x^3}{12H^3} \quad (23)$$

$$K_{lx_1} = \frac{1}{L_1} \left( p_y L + \frac{W_1}{2} \right), \quad K_{lx_3} = K_{lx_1} + \frac{2H}{L_x}, \quad (24)$$

式中  $K_{ST}$  是邻档导线的等效弹簧刚度,  $L$  和  $L_x$  分别是在两邻近输电塔之间覆冰导线长度和水平档距.  $p_y$  是单位长度导线的重力,  $H$  是静止状态下导线张力的水平分量.  $K_{lx_1}$  和  $K_{lx_3}$  分别是绝缘子串在  $x_1$  和  $x_3$  方向的刚度,  $L_1$  和  $W_1$  分别是绝缘子串的长度和重量.

## 1.3 更新 Lagrange 格式的有限元方程

将式(7)、(11)、(14)、(17)、(18)和(22)代入方程(1)并考虑阻尼, 则可得更新 Lagrange 格式的单元平衡方程

$$\mathbf{M}^e {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{q}}^e + {}^t\mathbf{C}^e {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}^e + {}^t\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^e - {}^t\mathbf{Q}^e, \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_0^l \mathbf{N}^T {}^{t+\Delta t} \mu N dS, \quad {}^t\mathbf{Q}^e = \int_0^l {}^t\mathbf{B}^T \begin{bmatrix} {}^tT & 0 \\ 0 & {}^tM \end{bmatrix} dS, \\ {}^t\mathbf{K}^e &= {}^t\mathbf{K}_t^e + {}^t\mathbf{K}_\sigma^e + {}^t\mathbf{K}_{\text{ice}}^e = \\ &= \int_0^l A_t \mathbf{B}^T \mathbf{D} {}^t\mathbf{B} dS + \int_0^l \mathbf{G}^T {}^t\mathbf{T} \mathbf{G} dS - g \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{L} N dS. \end{aligned}$$

对单元方程进行组集可得到系统方程

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{q}} + {}^t\mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{q}} + {}^t\mathbf{K}\mathbf{q} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}, \quad (26)$$

其中,  ${}^t\mathbf{C}$  和  ${}^t\mathbf{K}$  分别是  $t$  时刻结构的阻尼阵和刚度阵.  $\mathbf{q}$  是结点位移增量向量,  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}}$  和  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$  分别为  $t + \Delta t$  时刻结点的加速度、速度和载荷向量,  ${}^t\mathbf{Q}$  是  $t$  时刻的内部结点载荷向量.

结构阻尼的确定比较困难,对于导线可以采用 Raleigh 阻尼<sup>[10]</sup>,即

$$c_{ij} = \beta_{k1} m_{ij} + \beta_{k2} k_{ij} \quad (k = x_2, \theta) \quad (27)$$

其中  $m_{ij}$  和  $k_{ij}$  分别是结构质量阵和刚度阵中的元素,而系数  $\beta_{k1}$  和  $\beta_{k2}$  分别采用下面的表达式进行计算

$$\beta_{k1} = \frac{2\xi_{k1}\omega_{k1}\omega_{k2}}{\omega_{k2} + \omega_{k1}}, \quad \beta_{k2} = \frac{2(\xi_{k2}\omega_{k2} - \xi_{k1}\omega_{k1})}{(\omega_{k2}^2 - \omega_{k1}^2)}, \quad (28)$$

其中  $\xi_{k1}$  和  $\xi_{k2}$  是对应于两个频率  $\omega_{k1}$  和  $\omega_{k2}$  的阻尼比.

## 2 动力平衡方程的求解

采用 Newmark 时间积分和 Newton-Raphson 法迭代求解方程(26)的递推公式如下<sup>[8]</sup>:

$$\begin{aligned} & \left[ {}^t\mathbf{K}^{(l)} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C} \right] \mathbf{q}^{(l)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(l)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{(l)} - \\ & \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\alpha\Delta t^2}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(l)} - {}^t\mathbf{q}) - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{q}} - \left[ \frac{1}{2\alpha} - 1 \right] {}^t\ddot{\mathbf{q}} \right] - \\ & \mathbf{C} \left[ \frac{\delta}{\alpha\Delta t}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(l)} - {}^t\mathbf{q}) - \left[ \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right] {}^t\dot{\mathbf{q}} - \left[ \frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right] \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{q}} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(l)} - {}^t\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(l+1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(l)} = \mathbf{q}^{(l)},$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(0)} = {}^t\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \sum_{l=0}^k \mathbf{q}^{(l)} \quad (k \text{ 为迭代次数}).$$

每一增量步完成后,都需要根据计算得到的  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(l)}$  和  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}}^{(l)}$  更新  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(l)}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{(l)}$  以及刚度矩阵,直至满足收敛准则.

## 3 数值算例

### 3.1 算例 1

为了验证本文方法和程序的正确性,利用算例与 ABAQUS 软件计算结果进行比较.如图 3 所示,一根两端固定的输电线档距为 100 m,在自重作用下导线的弧垂为 4.05 m.导线截面直径  $d = 27.63 \times 10^{-3}$  m,弹性模量  $E = 6.9 \times 10^4$  MPa, Poisson 比  $\nu = 0.3$ ,密度  $\rho = 2519$  kg/m<sup>3</sup>.采用本文算法,导线用 20 个单元进行离散,经对多种网格划分的计算结果比较,对于该模型 20 个二次单元足以保证其计算精度. ABAQUS 软件中没有具有扭转自由度的索单元,在此利用梁单元,通过释放其弯曲变形对应的转动自由度模拟,采用 40 个两结点线性梁单元离散模型.两个模型的总结点数相同.在导线各结点上同时施加水平载荷、垂直载荷和扭矩.这些载荷随时间的变化规律相同,如图 4 中所示,其最大值分别取 1 N、2 N 和 1 N·m.在 ABAQUS 中施加载荷时选用 smooth step 进行加载,对载荷变化折点进行光滑处理.为便于比较,本文计算程序中载荷也作了相同的光滑处理.

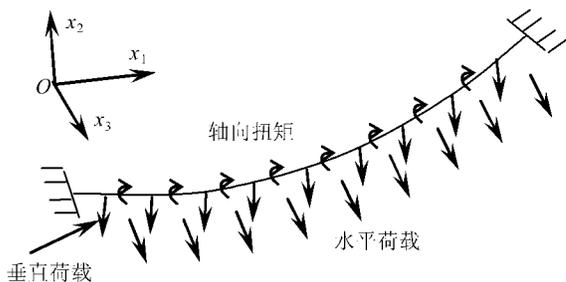


图3 单档导线模型

图5给出了由本文方法和 ABAQUS 得到的导线中点竖向位移、水平位移和扭转角随时间的变化。由于导线的转动惯量较小，其转角变化与扭矩载荷的变化几乎同步。从图5中可见，用本文方法和 ABAQUS 得到的计算结果非常吻合，导线中点垂直方向位移、水平方向位移和扭角最大值的相对误差分别为 1.2%、0.4% 和 0.6%。从而验证了本文方法和程序的正确性。

### 3.2 算例 2

本算例利用文献[5]取自文献[11]的导线舞

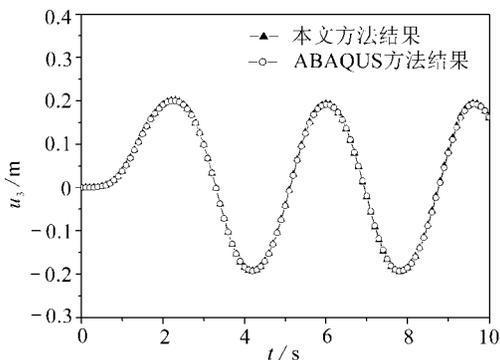
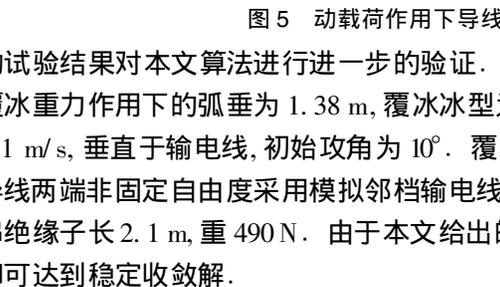
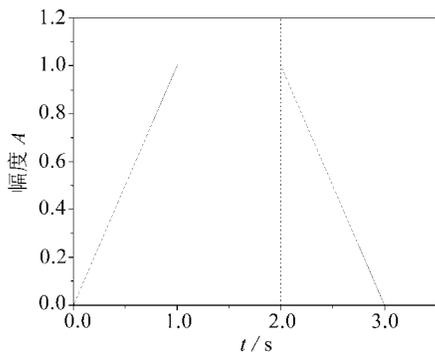
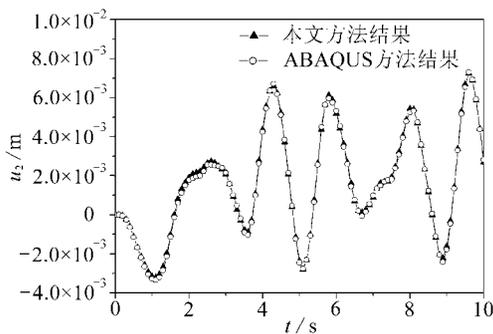
(a)  $x_2$  方向位移(b)  $x_3$  方向位移

图4 载荷随时间变化规律



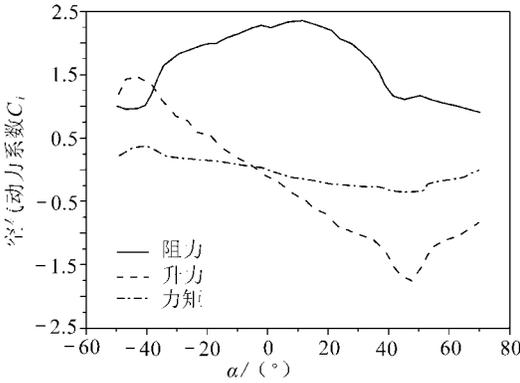
(c) 扭转角

图5 动载荷作用下导线中点位移和扭角随时间的变化

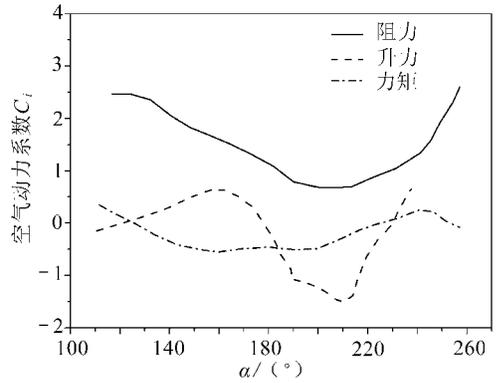
动试验结果对本文算法进行进一步的验证。该输电线模型为单档，档距为 125.88 m，在导线和覆冰重力作用下的弧垂为 1.38 m，覆冰冰型为 D 型。输电线的物理参数如表 1 所示。风速为 4.1 m/s，垂直于输电线，初始攻角为  $10^\circ$ 。覆冰导线的空气动力系数取自文献[5]，参见图 6。导线两端非固定自由度采用模拟邻档输电线和绝缘子串的等效弹簧约束，参见 1.2 小节。每串绝缘子长 2.1 m，重 490 N。由于本文给出的是二次单元，通过验证，本算例采用 15 个索单元即可达到稳定收敛解。

表 1 模拟舞动的物理参数

参数	符号	单位	算例 2	算例 3
轴向刚度	$AE$	N	$13.30 \times 10^6$	$25.53 \times 10^6$
扭转刚度	$GJ$	$N \cdot m^2 \cdot rad^{-1}$	101	153
水平拉力	$H$	N	$21.73 \times 10^3$	$15.0 \times 10^3$
裸线直径	$d$	m	$18.8 \times 10^{-3}$	$23.5 \times 10^{-3}$
邻档等效刚度	$K_{SF}$	$N \cdot m^{-1}$	$75.97 \times 10^3$	$75.97 \times 10^3$
$x_2$ 方向阻尼比	$\xi_{2x}$		$0.08 \times 10^{-2}$	$1.60 \times 10^{-2}$
$\theta$ 方向阻尼比	$\xi_\theta$		$3.79 \times 10^{-2}$	$5.70 \times 10^{-2}$
单位长度质量	$\mu$	$kg \cdot m^{-1}$	1.53	1.66
单位长度转动惯量	$I$	$kg \cdot m^2 \cdot m^{-1}$	$57.02 \times 10^{-4}$	$1.56 \times 10^{-4}$
单位长度 $x_2$ 轴质量矩	$S_{x_2}$	$kg \cdot m \cdot m^{-1}$	$0.459 \times 10^{-3}$	$2.722 \times 10^{-3}$
单位长度 $x_3$ 轴质量矩	$S_{x_3}$	$kg \cdot m \cdot m^{-1}$	$-0.145 \times 10^{-3}$	$-0.830 \times 10^{-3}$

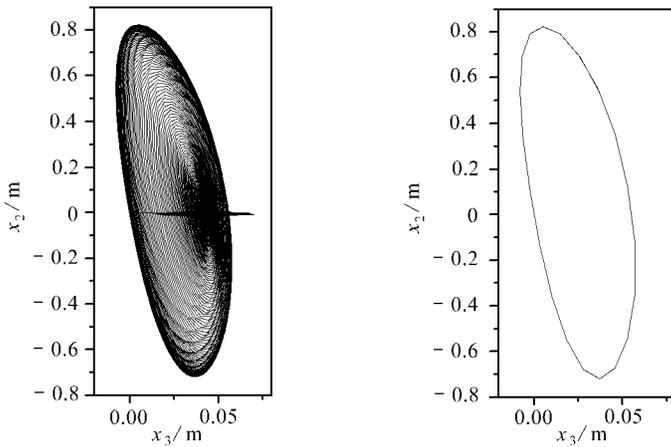


(a) 算例 2



(b) 算例 3

图 6 覆冰导线空气动力系数与攻角的关系<sup>[5]</sup>



(a) 舞动轨迹

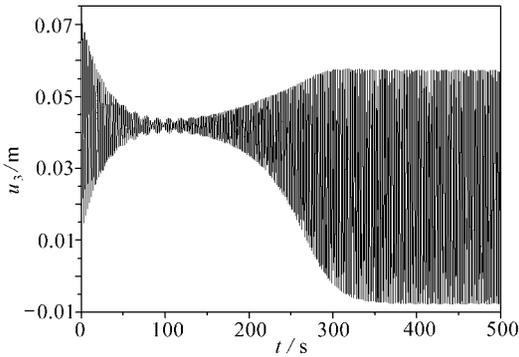
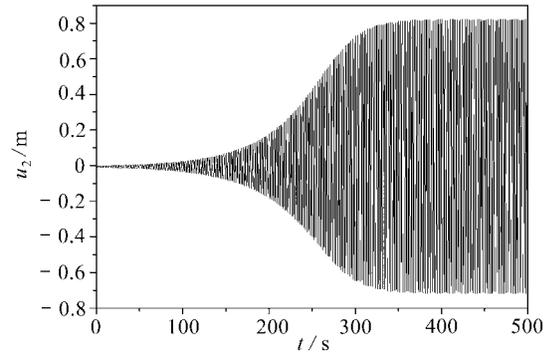
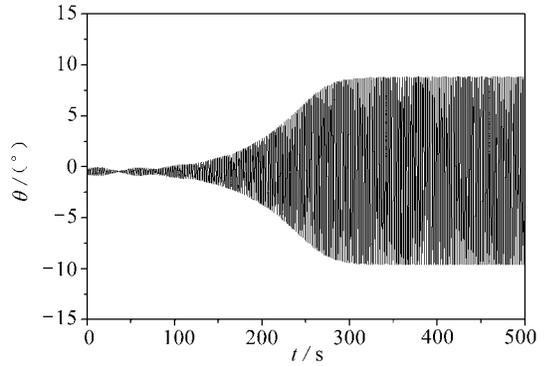
(b) 稳定后舞动轨迹

图 7 导线中点的舞动轨迹(算例 2)

图 7 和图 8 分别给出了计算得到的导线中点的舞动轨迹和位移的时间历程. 从图中可以看出, 开始时导线在平衡位置附近小幅摆动, 随着时间的推移, 振幅不断增加, 直至形成一个近

似的椭圆轨迹. 这种舞动模式即为邓哈托 (Den Hartog) 垂直舞动. 在稳定状态下, 文献 [5] 采用模态分解法计算得到的结果, 垂直方向的振动幅度为 1.58 m, 水平方向为 0.04 m, 本文结果分别为 1.544 m 和 0.058 m. 两者的相对差分别为 2.3% 和 31.1%.

在文献 [5] 的计算方法中, 将式 (21) 中空气动力系数常数项对应的力作为静力施加在模型上, 进而计算在扰动项作用下的动力响应. 在该文的计算模型中, 导线静止状态的弧垂 1.38 m 是在

(b)  $x_3$  方向位移(a)  $x_2$  方向位移

(c) 转角

图 8 导线中点位移时间历程(算例 2)

导线和覆冰重力及升力常数项作用下产生的. 这种载荷的处理方法反而使本文的计算复杂化, 故本文将空气动力系数常数项对应的载荷仍作为动力载荷施加在导线上. 因此, 本文模型中的弧垂 1.38 m 是仅在导线和覆冰重力作用下产生的. 虽然升力很小, 这仍可能是导致本文得到的水平方向振幅与文献 [5] 的结果差别较大的原因之一. 除此之外, 文献 [5] 的线性化处理也是一个重要的原因.

此外, 图 9 给出了采用本文方法数值模拟计算得到的导线中点的垂直位移和文献 [11] 给出的试验观测结果之间的比较, 可见两者一致.

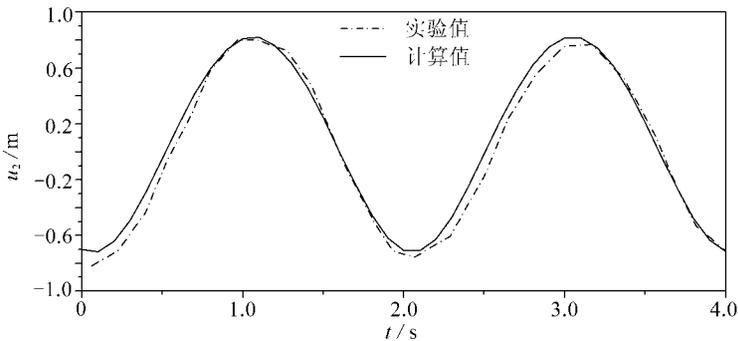
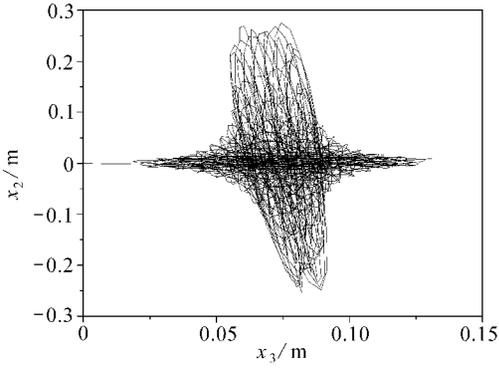


图 9 导线中点垂直位移计算值与试验观测值的比较

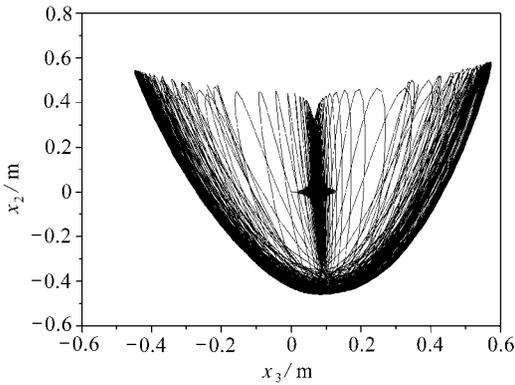


(a) 舞动开始时的轨迹

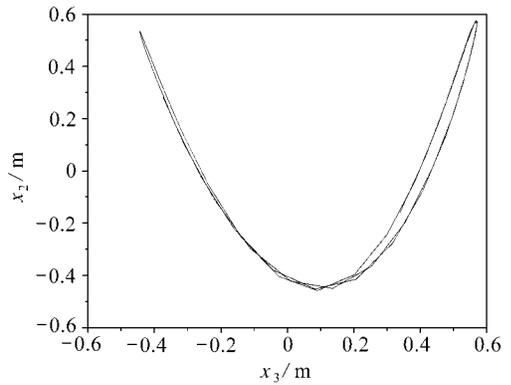
### 3.3 算例 3

本算例中输电线档距仍为 125.88 m, 在导线和覆冰重力作用下的弧垂为 2.12 m, 其它物理参数和空气动力系数分别见表 1 和图 6. 初始攻角为  $180^\circ$ . 在模拟该问题时, 通过改变风速发现, 当风速为 5.5 m/s 时, 出现了一种新的舞动模式. 与算例 2 一样, 采用 15 个索单元离散输电线.

图 10 和图 11 分别给出了导线中点的舞动轨迹和位移的时间历程. 可以看出, 在开始的一段时间, 导线在平衡位置附近作小幅摆动, 由于空气负阻尼的影响, 导致能量逐渐积累, 垂直方向的幅度



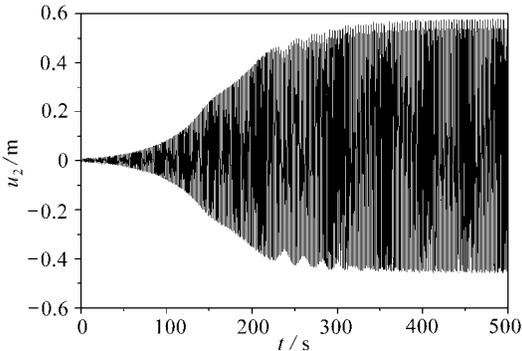
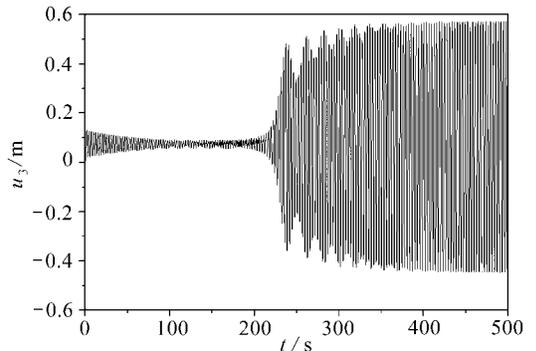
(b) 舞动轨迹

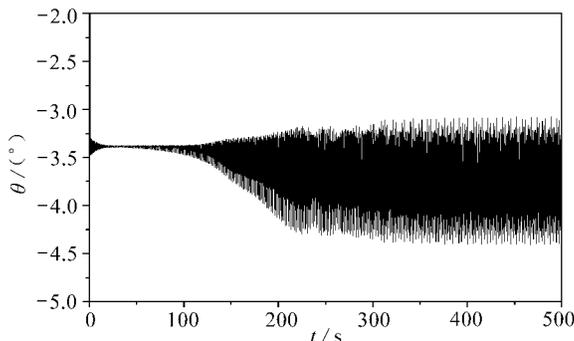


(c) 稳定后的舞动轨迹

图 10 导线中点的舞动轨迹(算例 3)

渐增加, 直至稳定, 见图 10(a). 当垂直方向的振动幅值趋于稳定后, 导线水平方向的振动幅值开始逐渐增加, 其舞动轨迹参见图 10(b). 导线最后达到稳定后的舞动轨迹如图 10(c). 经对该模型进行模态分析发现, 该导线垂直方向的一阶振动频率为 0.695, 水平方向的频率为 0.378, 两者接近倍数关系, 这种运动模式可以理解为非线性动力系统的饱和现象, 是一种新的舞动模式. 而采用线性化的数值模拟方法, 可能无法揭示这一现象.

(a)  $x_2$  方向位移(b)  $x_3$  方向位移



(c) 转角

图 11 导线中点的位移时间历程

## 4 结 论

本文利用虚功原理建立了模拟覆冰导线舞动的非线性动力学方程,具体给出了三结点索单元的更新 Lagrange 格式的有限元非线性方程及其求解方法,并通过数值算例验证了方法的正确性.通过对典型覆冰导线舞动的数值模拟发现,当导线垂直方向的一阶振动固有频率与水平方向振动固有频率近似为倍数关系时,可能引发一种新的舞动模式.该种舞动模式可以理解为非线性动力系统的饱和现象,利用线性化的分析方法可能难以揭示的这一现象,因而采用非线性方法分析覆冰导线的舞动是十分必要的.值得一提的是,这种舞动模式尚需通过试验或实际观察进行验证.此外,利用本文方法可以容易地对任意多分裂导线的舞动问题进行模拟研究.

### [参 考 文 献]

- [1] Den Hartog J P. Transmission line vibration due to sleet[J]. Transaction AIEE, 1932, **51**(Part 4): 1074-1086.
- [2] Nigol O, Clarke G J. Conductor galloping and its control based on torsional mechanism[J]. Ontario Hydro Research Quarterly, 1974, **26**(2): 31-41.
- [3] Simpson A. Determination of the natural frequencies of multi-conductor overhead transmission lines [J]. Sound and Vibration, 1974, **20**(4): 417-449.
- [4] Yu P, Desai Y M, Shah A H, et al. Three-degree-of-freedom model for galloping—Part I: formulation [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1993, **119**(12): 2404-2425.
- [5] Desai Y M, Yu P, Popplewell N, et al. Finite element modeling of transmission line galloping[J]. Computers and Structures, 1995, **57**(3): 407-420.
- [6] 何 铿, 钱天虹. 覆冰三分裂导线扭控舞动的分析计算[J]. 华中理工大学学报, 1998, **26**(10): 16-18.
- [7] 王丽新, 杨文兵, 杨新华, 等. 输电线路舞动的有限元分析[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2004, **21**(1): 76-80.
- [8] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [9] Veletsos A S, Darbre G R. Dynamic stiffness of parabolic cables[J]. International Journal Earthquake Engineering & Structure Dynamics, 1983, **11**(3): 367-401.
- [10] Barbieri N, Honorato de Souza Junior O, Barbieri R. Dynamical analysis of transmission line cables—Part 2: damping estimation[J]. Mechanical System and Signal Processing, 2004, **18**(3): 671-

681.

- [11] Edwards A T, Madeyski A. Progress report on the investigation of galloping of transmission line conductors[J]. Power Apparatus and Systems, Part III Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 1956, 75(3): 666-686.

## Nonlinear Numerical Simulation Method for Galloping of Iced Conductor

LIU Xiao-hui<sup>1</sup>, YAN Bo<sup>1</sup>, ZHANG Hong-yan<sup>2</sup>, ZHOU Song<sup>3</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China ;

2. Sichuan Electric Power Test & Research Institute, Chengdu 610071, P. R. China ;

3. Sichuan Electric Power Industry Commission & Test Institute, Chengdu 610016, P. R. China )

**Abstract:** Based on the principle of virtual work, an updated Lagrangian finite element formulation for the geometrical large deformation analysis of galloping of the iced conductor in an overhead transmission line was developed. In the procedure of numerical simulation, a three-node isoparametric cable element with three translational and one torsional degrees-of-freedom at each node was employed to discretize the transmission line; and the nonlinear dynamic system equation was solved by the Newmark time integration method and the Newton-Raphson nonlinear iteration strategy. Numerical examples were employed to demonstrate the efficiency of the presented method and the developed finite element program. Furthermore, a new possible galloping mode, which may reflect the saturation phenomenon of nonlinear dynamic system, was discovered on the condition that the lowest order of vertical natural frequency of the transmission line is approximately two times of the horizontal one.

**Key words:** iced conductor; galloping; geometric nonlinearity; numerical simulation