应用数学和力学, 第 30 卷 第 3 期
2009 年 3 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 3, Mar. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 03-0369-10

一类四阶非线性波动方程的初值问题*

陈国旺[1], 侯长顺[2]

(1. 郑州大学 数学系, 郑州 450052;
2. 河南工业大学 理学院, 郑州 450052)

(戴世强推荐)

摘要: 应用压缩映射原理和延拓定理, 在分数次 Sobolev 空间中, 证明一类四阶非线性波动方程的初值问题, 存在唯一的整体广义解和整体古典解. 还给出该初值问题解爆破的充分条件.

关 键 词: 四阶非线性波动方程; 初值问题; 整体解; 解的爆破

中图分类号: O175.29; O175.27 文献标识码: A

引 言

本文研究下列四阶非线性波动方程的初值问题:

$$v_{tt} - a_1 v_{xx} - a_2 v_{xxt} - a_3 v_{xxtt} = f(v_x)_x, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{1}$$

$$v(x, 0) = v_0(x),\ v_t(x, 0) = v_1(x), \qquad x \in \mathbf{R} \tag{2}$$

和方程

$$v_{tt} - c_1 v_{xx} - c_2 v_{xxtt} = f(v_x)_x, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{3}$$

具有初值条件

$$v(x, 0) = v_0(x),\ v_t(x, 0) = v_1(x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

的问题, 其中, $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2 > 0$ 为常数, $v(x, t)$ 为未知函数, $f(y)$ 为给定的非线性函数, $v_0(x), v_1(x)$ 为给定的初值函数, 下标 x 及 t 表示求偏导数.

方程(1) 和如下的四阶非线性波动方程:

$$v_{tt} - c_0^2[1 + na_n v_x^{n-1}]v_{xx} - \beta v_{xxtt} = \gamma v_{xxt} \tag{4}$$

有紧密联系, 其中, $c_0^2, \beta, \gamma > 0$, $a_n \neq 0$ 为常数, n 为自然数. 方程(4) 是朱位秋在文献[1] 中研究弹性杆中的非线性波时提出的, 并将方程(4) 简化为广义的 Korteweg-de Vries-Burgers 方程, 讨论了它的弧立子解的存在性, 但没有研究方程(4) 的任何定解问题. 显然方程(4) 是方程(1) 的特殊情况. 文献[2-3] 研究了非线性弹性杆的应变弧波, 并着重讨论了杆的物理参数和几何参数对于波动的影响, 提出了如下的四阶非线性波动方程:

$$v_{tt} - [b_0 + nb_1 v_x^{n-1}]v_{xx} - b_2 v_{xxtt} = 0, \tag{5}$$

其中, $b_0, b_2 > 0$ 为常数, b_1 为任意实数, n 为自然数. 同样在文献[2] 中庄蔚和杨桂通将方程(5) 简化为 KdV 方程, 研究了其弧波解的存在性和其它性质, 但没有对方程(5) 的定解问题作

* 收稿日期: 2008-08-11; 修订日期: 2009-01-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671182)
作者简介: 陈国旺(1935—), 男, 河北万全人, 教授, 博士(联系人. E-mail: chenguowang@zzu.edu.cn).

任何研究. 显见方程(3)包含方程(5). 因为方程(4)的模型考虑了阻尼,所以在方程(4)中出现了阻尼项 γv_{xxt}, 这就是方程(4)与方程(5)主要不同之处.

方程(1)、方程(3)至(5)还与著名的 IMBq 方程[4]

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} = (v^3)_{xx} \tag{6}$$

和 Pochhammer-Cheer 方程(称其为 PC 方程)[5]

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} = \frac{1}{p}(v^p)_{xx} \tag{7}$$

有密切的关系, 其中, $p = 3$ 或 $p = 5$.

方程(6)和方程(7)可以写成

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} = f(v)_{xx}, \tag{8}$$

其中, $f(y)$ 是非线性函数.

因此方程(1)和方程(3)属于一类方程, 方程(8)属于另一类方程(称之为广义 IMBq 方程), 它们的相同之处有一样的主项(除方程(1)有阻尼项外), 但有不同的非线性项, 所以证明方程(1)(或(3))解的存在性方法与证明方程(8)解的存在性方法有所不同. 对于一维的和多维的广义 IMBq 方程的初边值问题和初值问题已有很多结果(见文献[6-10]). 对于方程(1)和方程(3), 当前只有初边值问题有结果(见文献[11-13]). 现在我们还没见到关于方程(1)和(3)初值问题的文献.

本文证明初值问题(1)和(2)或初值问题(3)和(2)在分数次 Sobolev 空间 $C([0,\infty); H^s(\mathbf{R}))(s \geqslant 2)$ 中存在唯一的整体广义解; 当 $s > 5/2$ 时存在唯一的整体古典解. 还证明问题(1)和(2)或问题(3)和(2)的解在有限时刻爆破.

因为证明方程(1)和(2)有唯一的整体解和将其转化为等价的积分方程时, 积分号下含有非线性项 $\varphi(v_x)_x$ (见方程(14)), 这对证明解的存在性, 增加了困难. 由于方程(1)含有阻尼项 v_{xxt}, 所以讨论解的爆破时产生了难度.

利用尺度变换 $v(x,t) = u(y,t) = u(\sqrt{a_3}x, t)$ 方程(1)可变为

$$u_{tt} - \frac{a_1}{a_3}u_{yy} - \frac{a_2}{a_3}u_{yyt} - u_{yytt} = \frac{1}{\sqrt{a_3}}f\left(\frac{1}{\sqrt{a_3}}u_y\right)_y. \tag{9}$$

不失一般性, 我们将研究下列初值问题整体解的存在性与唯一性:

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} - u_{xxtt} = \varphi(u_x)_x, \qquad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{11}$$

其中, $\alpha = a_1/a_3$, $\beta = a_2/a_3$, $u_0(x) = v_0(\sqrt{a_3}x)$ 和 $u_1(x) = v_1(\sqrt{a_3}x)$.

本文采用以下记号和概念, $L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示通常的 $\mathbf{R}$ 上的 L^p 函数空间, 并赋予范数 $\|f\|_p = \|f\|_{L^p}$, 特别地 $\|f\| = \|f\|_2$; $H^s(\mathbf{R})$ 是通常的 $\mathbf{R}$ 上的 Sobolev 空间, 具有范数 $\|f\|_{H^s} = \|(I - \partial_x^2)^{s/2}f\| = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}\|$, 其中, s 为实数, $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换, I 为恒等算子, $\partial_x = \partial/\partial x$.

为了证明问题(10)和(11)的整体广义解和整体古典解的存在性, 需要下面的引理.

引理 1[10] 假设 $f \in C^k(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$, $u \in H^s \cap L^\infty$ 且 $k = [s] + 1$, 其中, $s \geqslant 0$. 若 $\|u\|_\infty \leqslant M$, 则有

$$\|f(u)\|_{H^s} \leqslant K_1(M)\|u\|_{H^s},$$

其中, $K_1(M)$ 为依赖于 M 的常数.

引理 2[14] 设 $s \geqslant 0, f \in C^k(\mathbf{R})(k = [s] + 1)$. 若 $u, v \in H^s \cap L^\infty$, 且 $\|u\|_\infty \leqslant M$, $\|v\|_\infty \leqslant M$, 则

$$\|f(u) - f(v)\|_{H^s} \leqslant K_2(M)\|u - v\|_{H^s},$$

其中, $K_2(M)$ 为依赖于 M 的常数.

为证明初值问题(10)和(11)的广义解的存在性, 我们将通过一个二阶常微分方程的基本解, 把初值问题(10)和(11)转化为积分方程. 为此, 令 $G(x)$ 为如下常微分方程:

$$w(x) - w_{xx}(x) = 0 \tag{12}$$

的基本解, 即 $G(x) = (1/2)\mathrm{e}^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$. 对 $G(x)$ 容易证明下面的引理成立.

引理 3

(i) $G(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 连续且 $G(x) > 0$;

(ii) $G(x)$ 满足方程 $G(x) - G_{xx}(x) = \delta(x)$, 其中 $\delta(x)$ 为 Dirac δ 函数;

(iii) $G \in L^q(\mathbf{R})$, 其中 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 且 $\|G\|_1 = 1$;

(iv) $\|G * f\|_{H^s} = \|f\|_{H^{s-2}}$.

假设 $u \in C^2([0, T]; H^s(\mathbf{R}))(s \geqslant 2)$ 是问题(10)和(11)的广义解, 则方程(10)可改写成如下形式:

$$u_{tt} = G * [\alpha u_{xx} + \beta u_{xxt} + \varphi(u_x)_x], \tag{13}$$

其中, $(u * v)(x) = \int_{\mathbf{R}} u(y)v(x - y)\mathrm{d}y$ 为 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的卷积. (13) 式对 t 积分两次和利用 $(\partial^2/\partial x^2)(G * f) = G * f - f$, 可知初值问题(10)和(11)与下列积分方程等价:

$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & u_0(x) + [\beta u_0(x) + u_1(x) - \beta(G * u_0)(x)]t + \\ & \alpha\int_0^t (t - \tau)[(G * u)(x, \tau) - u(x, \tau)]\mathrm{d}\tau + \beta\int_0^t [(G * u)(x, \tau) - \\ & u(x, \tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^t (t - \tau)[G * \varphi(u_x)_x](x, \tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{14}$$

定义 1 对任意 $T > 0$, 如果 $u \in C([0, T]; H^s(\mathbf{R}))(s \geqslant 2)$ 满足积分方程(14), 则称 $u(x, t)$ 为积分方程(14)的连续解或初值问题(10)和(11)的广义解. 如果 $T < \infty$, 则称 $u(x, t)$ 是初值问题(10)和(11)的局部广义解; 如果 $T = \infty$, 则称 $u(x, t)$ 是初值问题(10)和(11)的整体广义解.

1 问题(10)和(11)整体解的存在唯一性

1.1 问题(10)和(11)局部解的存在唯一性

本节利用压缩映射原理证明积分方程(14)的局部连续解和整体连续解的存在唯一性. 为此, 先定义函数空间 $X(T) = C([0, T]; H^s(\mathbf{R}))(s > 3/2)$, 并赋予范数

$$\|u\|_{X(T)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(\cdot, t)\|_{H^s}, \qquad \forall u \in X(T).$$

易见, $X(T)$ 是一 Banach 空间. 对于 $w \in X(T)$ 定义算子 S 为

$$\begin{aligned} Sw(x, t) = {} & u_0(x) + [\beta u_0(x) + u_1(x) - \beta(G * u_0)(x)]t + \\ & \alpha\int_0^t (t - \tau)[(G * w)(x, \tau) - w(x, \tau)]\mathrm{d}\tau + \\ & \beta\int_0^t [(G * w)(x, \tau) - w(x, \tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^t (t - \tau)[G * \varphi(w_x)_x](x, \tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

当 $s > 3/2$ 时, 由 Sobolev 嵌入定理, 知 $u \in C([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbf{R}))$ 且

$$\| u(\cdot, t) \|_\infty,\quad \| u_x(\cdot, t) \|_\infty \leqslant C_1 \| u(\cdot, t) \|_{H^s},$$

其中, $C_1 > 0$ 是常数和以后的 $C_i(T)\ (i = 2, 3, \dots)$ 为仅依赖于 T 的常数. 由此可知, S 映 $X(T)$ 到 $X(T)$.

其次, 对初始值 $u_0, u_1 \in H^s(\mathbf{R})$, 令 $M = \| u_0 \|_{H^s} + \| u_1 \|_{H^s}$. 定义集合

$$P(M, T) = \left\{ u \mid u \in X(T),\ \| u \|_{X(T)} \leqslant 2M + 1 \right\}.$$

显然, 对每一 $M, T > 0$, $P(M, T)$ 是 $X(T)$ 的非空有界闭凸子集. 我们的目的是指出 S 在 $P(M, T)$ 中有唯一不动点.

引理 1.1　假定 $s > 3/2$, $u_0, u_1 \in H^s(\mathbf{R})$, $\varphi \in C^{[s]+1}(\mathbf{R})$, $\varphi(0) = 0$, 则 S 映 $P(M, T)$ 到 $P(M, T)$, 且如果 T 相对于 M 适当小, 则映射 $S: P(M, T) \to P(M, T)$ 是严格压缩的.

证明　设 $w \in P(M, T)$. 由 Sobolev 嵌入定理知, 当 $s > 3/2$ 时,

$$H^s(\mathbf{R}) \to C_B^1(\mathbf{R}),$$

于是

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| w(\cdot, t) \|_\infty,\quad \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| w_x(\cdot, t) \|_\infty \leqslant 2M + 1, \qquad \forall w \in P(M, T).$$

由引理 1 和引理 3, 有

$$\| G * w \|_{H^s} = \| w \|_{H^{s-2}} \leqslant \| w \|_{H^s}, \tag{16}$$

$$\| G * \varphi(w_x)_x \|_{H^s} = \| \varphi(w_x)_x \|_{H^{s-2}} \leqslant \| \varphi(w_x) \|_{H^{s-1}} \leqslant$$
$$K_1(2M + 1) \| w_x \|_{H^{s-1}} \leqslant K_1(2M + 1) \| w \|_{H^s}. \tag{17}$$

根据(15)至(17)式、积分型 Minkowski 不等式及 Minkowski 不等式, 得

$$\| Sw \|_{H^s} \leqslant \| u_0 \|_{H^s} + [2\beta \| u_0 \|_{H^s} + \| u_1 \|_{H^s}] T +$$
$$2\beta \int_0^t \| w(\cdot, \tau) \|_{H^s} d\tau + 2\alpha \int_0^t (t - \tau) \| w(\cdot, \tau) \|_{H^s} d\tau +$$
$$K_1(2M + 1) \int_0^t (t - \tau) \| w(\cdot, \tau) \|_{H^s} d\tau. \tag{18}$$

由(18)式推出

$$\| Sw \|_{X(T)} \leqslant M + (6\beta M + M + 2\beta) T + \left(\alpha + \frac{1}{2} K_1(2M + 1) \right) (2M + 1) T^2.$$

若 T 满足

$$T \leqslant \min\left\{ \frac{1}{6\beta + 1}, \frac{1}{\sqrt{2(\alpha + (1/2) K_1(2M + 1))(2M + 1)}} \right\}, \tag{19}$$

则 $\| Sw \|_{X(T)} \leqslant 2M + 1$. 从而, 若(19)式成立, 则 S 映 $P(M, T)$ 到 $P(M, T)$.

现证明 S 是严格压缩的. 令 $T > 0$ 和 $w_1, w_2 \in P(M, T)$ 是给定的, 利用引理 1 至 3、积分型 Minkowski 不等式及 Minkowski 不等式, 从(15)式知

$$\| Sw_1 - Sw_2 \|_{X(T)} \leqslant$$
$$2\beta \| w_1 - w_2 \|_{X(T)} T + \left(\alpha + \frac{1}{2} K_2(2M + 1) \right) \| w_1 - w_2 \|_{X(T)} T^2.$$

若 T 满足(19)式和

$$T \leqslant \min\left\{ \frac{1}{8\beta}, \frac{1}{2\sqrt{\alpha + (1/2) K_2(2M + 1)}} \right\}, \tag{20}$$

则 $\| Sw_1 - Sw_2 \|_{X(T)} \leqslant (1/2) \| w_1 - w_2 \|_{X(T)}$. 引理证毕.

定理 1.1　假设 $s \geqslant 2$, $u_0, u_1 \in H^s(\mathbf{R})$, $\varphi \in C^{[s]+1}(\mathbf{R})$, $\varphi(0) = 0$, 则积分方程(14)有唯

一局部连续解, 即初值问题(10) 和(11) 有唯一局部广义解 $u\in C([0,T_0);H^s(\mathbf{R}))$, 其中, $[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间. 此外, 若

$$\sup_{t\in[0,T_0)}(\|u\|_{H^s}+\|u_t\|_{H^s})<\infty, \tag{21}$$

则 $T_0=\infty$.

证明 根据引理 1.1 和压缩映射原理, 对适当选取的 $T>0$, S 有唯一不动点 $u\in P(M,T)$, 即是初值问题(10) 和(11) 的广义解.

容易证明对每一 $T>0$, 方程(14) 至多有一个解属于 $X(T)$. 令 $[0,T_0)$ 是 $u\in X(T_0)$ 存在的最大时间区间. 利用文献[9] 中的方法, 可以证明, 若(21) 式成立, 则 $T_0=\infty$. 定理证毕.

推论 1.1 若 $u\in C([0,T_0);H^s(\mathbf{R}))(s\geqslant 2)$ 是初值问题(10) 和(11) 的局部广义解, 则 $u\in C^2([0,T_0);H^s(\mathbf{R}))$ 且满足方程(13); 若 $u\in C([0,T_0);H^s(\mathbf{R}))$ 是初值问题(10) 和(11) 的局部广义解, 则当 $s>5/2$ 时, $u\in C^2([0,T_0);C^2(\mathbf{R}))$ 是初值问题(10) 和(11) 的局部古典解.

1.2 问题(10) 和(11) 整体解的存在唯一性

定理 1.2 设 $s\geqslant 2$, $u_0, u_1\in H^s(\mathbf{R})$, $\varphi\in C^{[s]+1}(\mathbf{R})$, $\varphi(0)=0$, 则问题(10) 和(11) 存在唯一解 $u\in C([0,T_0);H^s(\mathbf{R}))$, 其中, $[0,T_0)$ 是最大时间区间, 如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)}(\|u_x(\cdot,t)\|_\infty)=M_1<\infty, \tag{22}$$

则 $T_0=\infty$.

证明 利用积分型 Minkowski 不等式、引理 1、引理 2 和(22) 式, 由方程(14), 可得

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant{}&\|u_0\|_{H^s}+(2\beta\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^s})T+\\&2\beta\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau+\\&2\alpha T\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau+K_1(M_1)T\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau=\\&C_2(T)+C_3(T)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{23}$$

由 Gronwall 不等式, 根据(23) 式, 知

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant C_4(T),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{24}$$

方程(14) 对 t 求导, 得

$$\begin{aligned}u_t(x,t)={}&[\beta u_0(x)+u_1(x)-\beta(G*u_0)(x)]+\\&\beta[(G*u)(x,t)-u(x,t)]+\\&\alpha\int_0^t[(G*u)(x,\tau)-u(x,\tau)]\mathrm{d}\tau+\int_0^t[G*\varphi(u_x)_x](x,\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{25}$$

由积分型 Minkowski 不等式、引理 1、引理 3 和(24) 式, 推出

$$\begin{aligned}\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}\leqslant{}&2\beta\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^s}+2\beta\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\\&2\alpha\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau+K_1(M_1)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\leqslant\\&C_5(T),\qquad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}\tag{26}$$

从(24) 式和(26) 式, 得

$$\sup_{t\in[0,T_0)}(\|u\|_{H^s}+\|u_t\|_{H^s})<\infty,$$

故 $T_0=\infty$. 定理证毕.

为得到问题(10)和(11)整体解存在的条件, 我们将建立问题(10)和(11)的一个能量等式.

引理 1.2 假设

$$u_0,\ u_1\in H^1(\mathbf{R}),\ \varphi\in C(\mathbf{R}),\ \psi(u_x)=\int_0^{u_x}\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

且 $\psi(u_{0x})\in L^1(\mathbf{R})$, 则问题(10) 和(11) 的广义解 $u(x,t)\in C^2([0,T];H^s(\mathbf{R}))(s\geqslant 2)$ 满足等式

$$E(t)=\|u_t(\cdot,t)\|^2+\alpha\|u_x(\cdot,t)\|^2+\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2+$$
$$2\beta\int_0^t\|u_{x\tau}(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau+2\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u_x(x,t))\mathrm{d}x=E(0).\tag{27}$$

证明 方程(10)两边同乘以 $2u_t$, 在 $(-\infty,\infty)\times(0,t)$ 上积分, 并作分部积分, 即得(27)式. 引理证毕.

引理 1.3 设引理 1.1 的条件成立, 且 $u_0,u_1\in H^s(\mathbf{R})(s\geqslant 2)$, $\psi(u_x)\geqslant 0$, 若存在正常数 A, B 以及 $\rho(1\leqslant\rho\leqslant\infty)$, 使得

$$|\varphi(u_x)|\leqslant A\psi(u_x)^{1/\rho}|u_x|+B,\tag{28}$$

则问题(10)和(11)的广义解 $u(x,t)$ 有估计

$$\|u_x(\cdot,t)\|_\infty\leqslant C_6(T),\qquad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{29}$$

证明 利用(13)式和基本解 $G(x)$ 的性质导出

$$u_{tt}+\alpha u=G*[\alpha u+\beta u_t+\varphi(u_x)_x]-\beta u_t.$$

上式关于 x 求导, 并乘以 $2u_t$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_{xt}^2+\alpha u_x^2+2\psi(u_x))=2G*[\alpha u_x+\beta u_{xt}+\varphi(u_x)]u_{xt}-2\beta u_{xt}^2.\tag{30}$$

应用引理 3、引理 1.2、条件(28)、Young 不等式及 Hölder 不等式, 可知

$$|[G*\varphi(u_x)](x,t)|\leqslant[G*|\varphi(u_x)|](x,t)\leqslant$$
$$AG*[\psi(u_x)^{1/\rho}|u_x|]+B\leqslant A\|G\|_q\|\psi(u_x)^{1/\rho}|u_x|\|_\rho+B\leqslant$$
$$A\|G\|_q\|u_x\|_\infty\|\psi(u_x)\|_1^{1/\rho}+B\leqslant C_7\|u_x\|_\infty+B$$

及估计

$$|G*\alpha u_x|\leqslant\alpha\|u_x\|_\infty;\ |G*\beta u_{xt}|\leqslant\beta\|u_{xt}\|_\infty.$$

把上述不等式代入(30)式, 可见

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_{xt}^2+\alpha u_x^2+2\psi(u_x))\leqslant$$
$$2C_7\|u_x\|_\infty\|u_{xt}\|_\infty+2B\|u_{xt}\|_\infty+$$
$$2\alpha\|u_x\|_\infty\|u_{xt}\|_\infty+4\beta\|u_{xt}\|_\infty^2.$$

由以上不等式, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_{xt}^2+\alpha u_x^2+2\psi(u_x))\leqslant C_8+C_9(\|u_x\|_\infty^2+\|u_{xt}\|_\infty^2).$$

上式对 t 积分并利用 Sobolev 嵌入定理, 得

$$\|u_x\|_\infty^2+\|u_{xt}\|_\infty^2+2\|\psi(u_x)\|_\infty\leqslant$$
$$\|u_0\|_{H^s}^2+\|u_1\|_{H^s}^2+2\|\psi(u_{0x})\|_\infty+C_8T+$$
$$C_9\int_0^t(\|u_x\|_\infty^2+\|u_{xt}\|_\infty^2)\mathrm{d}\tau.$$

从而有

$$\|u_x\|_\infty^2+\|u_{xt}\|_\infty^2\leqslant C_{10}+C_{11}\int_0^t(\|u_x\|_\infty^2+\|u_{xt}\|_\infty^2)\mathrm{d}\tau.$$

由 Gronwall 不等式, 便得 $\|u_x\|_\infty^2\leqslant C_{12}(T)$. 引理证毕.

由定理 1.2 和引理 1.3 知下列定理成立.

定理 1.3 假定

(i) $s\geqslant 2$, $\varphi\in C^{[s]+1}(\mathbf{R})$, $\varphi(0)=0$, $\psi(u_x)\geqslant 0$ 和 $\psi(u_{0x})\in L^1(\mathbf{R})$;

(ii) $u_0\in H^s(\mathbf{R})$, $u_1\in H^s(\mathbf{R})$;

(iii) $|\varphi(u_x)|\leqslant A\psi(u_x)^{1/\rho}|u_x|+B$, 其中, $A, B>0$, $1\leqslant\rho\leqslant\infty$.

则问题(10)和(11)有唯一整体广义解 $u\in C([0,\infty);H^s(\mathbf{R}))$.

注 1.1 设 $u\in C([0,\infty);H^s(\mathbf{R}))$ 是初值问题(10)和(11)的广义解, 若 $s>5/2$, 则 $u(x,t)\in C^2([0,\infty);C^2(\mathbf{R}))$ 是问题(10)和(11)整体古典解.

2 问题(10)和(11)解的爆破

在这节中, 将利用凸性引理(见文献[15])讨论初值问题(10)和(11)解的爆破.

定理 2.1 假设 $\varphi\in C(\mathbf{R})$, $u_0, u_1\in H^1(\mathbf{R})$ 和 $\psi\in L^1(\mathbf{R})$ 且存在常数 $\gamma>0$ 满足不等式

$$y\varphi(y)\leqslant(3+4\gamma)\psi(y),\qquad\forall y\in\mathbf{R},\tag{31}$$

则问题(10)和(11)的广义解或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻发生爆破, 若下列条件之一成立:

(i) $E(0)<0$;

(ii) $E(0)=0$, 且 $\int_{\mathbf{R}}u_0u_1\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}u_{0x}u_{1x}\mathrm{d}x>0$;

(iii) $E(0)>0$, 且 $\int_{\mathbf{R}}u_0u_1\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}u_{0x}u_{1x}\mathrm{d}x\geqslant\sqrt{\frac{4\gamma+3}{4\gamma+2}E(0)(\|u_0\|^2+\|u_1\|^2)}$,

其中 $$E(0)=\|u_1\|^2+\alpha\|u_{0x}\|^2+\|u_{1x}\|^2+2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u_{0x})\mathrm{d}x.$$

证明 假定问题(10)和(11)解的存在时间区间是无限的. 设

$$\Phi(t)=\|u_x\|^2+\|u\|^2+\beta_0(t+t_0)^2,\tag{32}$$

其中, $\beta_0, t_0>0$ 待定. (32)式对 t 求导, 有

$$\Phi'(t)=2\left[\int_{\mathbf{R}}u_xu_{xt}\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}uu_t\mathrm{d}x+\beta_0(t+t_0)\right].\tag{33}$$

由 Schwarz 不等式, 得

$$(\Phi'(t))^2\leqslant 4\Phi(t)[\|u_{xt}\|^2+\|u_t\|^2+\beta_0].\tag{34}$$

(33)式对 t 求导和利用方程(12), 推出

$$\begin{aligned}\Phi''(t)&=2\|u_{xt}\|^2+2\int_{\mathbf{R}}u_xu_{xtt}\mathrm{d}x+2\|u_t\|^2+2\int_{\mathbf{R}}uu_{tt}\mathrm{d}x+2\beta_0\geqslant\\&\|u_{xt}\|^2+2\|u_t\|^2-(2\alpha+\beta^2)\|u_x\|^2-2\int_{\mathbf{R}}\varphi(u_x)u_x\mathrm{d}x+2\beta_0.\end{aligned}\tag{35}$$

利用(32)、(34)和(35)式及等式(27), 可知

$$\Phi(t)\Phi''(t)-(1+\gamma)(\Phi'(t))^2\geqslant$$
$$-\Phi(t)\Big[(3+4\gamma)\|u_{xt}\|^2+(2+4\gamma)\|u_t\|^2+$$

$$(2+4\gamma)\beta_0+(2\alpha+\beta^2)\|u_x\|^2+2\int_{\mathbf{R}}\varphi(u_x)u_x\mathrm{d}x\Big]=$$

$$-\phi(t)\Big[(3+4\gamma)E(0)-\|u_t\|^2+$$

$$(2+4\gamma)\beta_0-(\alpha+4\alpha\gamma-\beta^2)\|u_x\|^2-$$

$$2(3+4\gamma)\beta\int_0^t\|u_{xt}\|^2\mathrm{d}\tau-2(3+4\gamma)\int_{\mathbf{R}}\psi(u_x)\mathrm{d}x+2\int_{\mathbf{R}}\varphi(u_x)u_x\mathrm{d}x\Big]\geqslant$$

$$-\phi(t)[(3+4\gamma)E(0)+(2+4\gamma)\beta_0]. \tag{36}$$

(i) 若 $E(0)<0$, 取 $\beta_0=-((3+4\gamma)/(2+4\gamma))E(0)>0$ 和 t_0 足够大, 则

$$\phi(t)\phi''(t)-(1+\gamma)\phi'^2(t)\geqslant 0,$$

且 $\phi(0)$, $\phi'(0)>0$, 由凸性方法推出, 当 $t\to T_1\leqslant t_2=\phi(0)/(\gamma\phi'(0))$ 时, $\phi(t)\to\infty$.

(ii) 若 $E(0)=0$, 取 $\beta_0=0$. 则(36)式变为

$$\phi(t)\phi''(t)-(1+\gamma)\phi'^2(t)\geqslant 0,$$

显然 $\phi(0)>0$. 由假定(ii)即知 $\phi'(0)>0$. 由凸性方法可知, 当 $t\to T_1\leqslant t_2=\phi(0)/(\gamma\phi'(0))$ 时, $\phi(t)\to\infty$.

(iii) 若 $E(0)>0$, 取 $\beta_0=0$. 由(36)式, 得

$$\phi(t)\phi''(t)-(1+\gamma)\phi'^2(t)\geqslant-(3+4\gamma)E(0)\phi(t).$$

令 $Q(t)=\phi^{-\gamma}(t)$. 则

$$\begin{cases} Q'(t)=-\gamma\phi^{-\gamma-1}(t)\phi'(t), \\ Q''(t)=(\gamma+1)\gamma\phi^{-\gamma-2}(t)(\phi'(t))^2-\gamma\phi^{-\gamma-1}(t)\phi''(t)\leqslant \\ \quad (3+4\gamma)\gamma E(0)\phi^{-\gamma-1}(t). \end{cases} \tag{37}$$

由假定(iii), 知

$$Q'(0)=-\gamma\phi^{-\gamma-1}(0)\phi'(0)<0.$$

令 $t^*=\sup\{\tau\mid Q'(\tau)<0,\ \tau\in[0,t)\}$, 由 $Q'(t)$ 的连续性知 $t^*>0$. (37) 式两边同乘以 $2Q'(t)$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q'(t))^2\geqslant-2\gamma^2(3+4\gamma)E(0)\phi^{-2\gamma-2}(t)\phi'(t)=$$

$$\frac{2\gamma^2(3+4\gamma)}{1+2\gamma}E(0)[\phi^{-2\gamma-1}(t)]',\qquad t\in[0,t^*). \tag{38}$$

(38)式两边对 t 在$[0,t)(0\leqslant t<t^*)$上积分, 有

$$(Q'(t))^2\geqslant(Q'(0))^2+$$

$$\frac{2\gamma^2(3+4\gamma)}{1+2\gamma}E(0)[\phi^{-2\gamma-1}(t)-\phi^{-2\gamma-1}(0)],\qquad t\in[0,t^*). \tag{39}$$

从条件(iii)可知

$$(Q'(0))^2-\frac{2\gamma^2(3+4\gamma)}{1+2\gamma}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)>0. \tag{40}$$

由 $Q'(t)$ 的连续性及(39)式和(40)式, 可见

$$Q'(t)\leqslant-\left[(Q'(0))^2-\frac{2\gamma^2(3+4\gamma)}{1+2\gamma}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)\right]^{1/2},\qquad t\in[0,t^*). \tag{41}$$

根据 t^* 的定义, (41) 式对 $t\geqslant 0$ 都成立. 因此

$$Q(t)\leqslant Q(0)-\left[(Q'(0))^2-\frac{2\gamma^2(3+4\gamma)}{1+2\gamma}E(0)\phi^{-2\gamma-1}(0)\right]^{1/2}t,\qquad t>0. \tag{42}$$

由(42)式知,存在某个 $T_1 > 0$,使得 $Q(T_1) = 0$ 且 $0 < T_1 \leqslant T_0$,其中

$$T_0 = Q(0)\left[(Q'(0))^2 - \frac{2\gamma^2(3+4\gamma)}{1+2\gamma}E(0)\Phi^{-2\gamma-1}(0)\right]^{-1/2}.$$

因此,当 $t \to T_1 \leqslant T_0$ 时,$\Phi(t) \to \infty$.

综合上述情况,在假定(i)至(iii)的条件下,$\Phi(t)$ 在 t 趋于 T_1 时变成无穷大.这与问题(10)和(11)解存在的最大时间区间为无限的事实矛盾,所以解存在的最大时间区间是有限的.定理证毕.

3 关于初值问题(3)和(2)的结果

利用第1节和第2节的方法可以证明下列定理成立.

定理3.1 假定

(i) $s \geqslant 2$, $g \in C^{[s]+1}(\mathbf{R})$, $g(0) = 0$, $\zeta(u_x) \geqslant 0$, $\zeta(u_{0x}) \in L^1(\mathbf{R})$;

(ii) $u_0, u_1 \in H^s(\mathbf{R})$;

(iii) $|g(u_x)| \leqslant A\zeta(u_x)^{1/\rho}|u_x| + B$,其中,$A, B > 0$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$.

则问题(3)和(2)有唯一整体广义解 $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbf{R}))$,其中

$$\zeta(u_x) = \int_0^{u_x} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

注3.1 设 $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbf{R}))$ 是初值问题(3)和(2)的广义解,若 $s > 5/2$,则 $u(x, t) \in C^2([0, \infty); C^2(\mathbf{R}))$ 是问题(3)和(2)的整体古典解.

定理3.2 假设 $g \in C(\mathbf{R})$, $u_0, u_1 \in H^1(\mathbf{R})$, $\zeta \in L^1(\mathbf{R})$,且存在常数 $\gamma > 0$ 满足不等式

$$yg(y) \leqslant (3+4\gamma)\zeta(y), \qquad \forall y \in \mathbf{R}, \tag{43}$$

则问题(3)和(2)的广义解或古典解 $u(x, t)$ 在有限时刻发生爆破,若下列条件之一成立:

(i) $E(0) < 0$;

(ii) $E(0) = 0$,且 $\int_{\mathbf{R}} u_0 u_1 \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} u_{0x} u_{1x} \mathrm{d}x > 0$;

(iii) $E(0) > 0$,且 $\int_{\mathbf{R}} u_0 u_1 \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} u_{0x} u_{1x} \mathrm{d}x \geqslant \sqrt{\frac{4\gamma+3}{4\gamma+2}E(0)(\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2)}$,

其中 $E(0) = \|u_1\|^2 + \delta\|u_{0x}\|^2 + \|u_{1x}\|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u_{0x})\mathrm{d}x$.

[参 考 文 献]

[1] 朱位秋.弹性杆中的非线性波[J].固体力学学报,1980,**1**(2):247-253.

[2] 庄蔚,杨桂通.孤波在非线性弹性杆中的传播[J].应用数学和力学,1986,**7**(7):571-581.

[3] 张善元,庄蔚.非线性弹性杆中的应变孤波[J].力学学报,1998,**20**(1):58-66.

[4] Makhankov V G. Dynamics of classical soliton(in non-integrable systems)[J]. Physics Reports, Phys Lett C, 1978, **35**(1):1-128.

[5] Liu Y. Existence and blow up of solution of a nonlinear Pochhammer-Cheer equation[J]. Indiana Univ Math J, 1996, **45**(3):797-816.

[6] Akmel D Godefrog. Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1998, **60**(1):123-138.

[7] Liu Y. Strong instability of solitary-waves solutions of a generalized Boussinesq equation[J]. J Differential Equations, 2000, **164**(2):223-239.

[8] Adrian Constantin, Luc Molinet. The initial value problem for a generalized Boussinesq equation[J]. Differential and Integral Equations, 2002, **15**(9): 1061-1072.

[9] CHEN Guo-wang, WANG Shu-bin. Existence and nonexistence of global solution for the generalized IMBq equation[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1999, **36**(8): 961-980.

[10] WANG Shu-bin, CHEN Guo-wang. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation[J]. J Math Anal, 2002, **274**(2): 846-866.

[11] CHEN Guo-wang, WANG Shu-bin. Existence and nonexistence of global solution for nonlinear hyperbolic equations of higher order[J]. Comment Math Univ Carolin, 1995, **36**(3): 475-487.

[12] CHEN Xiang-ying. Existence and nonexistence of the global solutions for nonlinear evolution equation of fourth-order[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2001, **16**(3): 251-258.

[13] CHEN Xiang-ying, CHEN Guo-wang. Asymptotic behavior and blow-up of solutions to a nonlinear evolution equation of fourth orders[J]. Nonlinear Analysis TMA, 2008, **68**(4): 892-904.

[14] WANG Shu-bin, CHEN Guo-wang. Cauchy problem of the generalized double dispersion equation [J]. Nonlinear Analysis TMA, 2006, **64**(1): 159-173.

[15] Levine H A. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations[J]. SIAM J Math Anal, 1974, **5**(1): 138-146.

[16] Liu Y, Xu R. Global existence and blow up of solutions for Cauchy problem of generalized Boussinesq equation[J]. Physica D, 2008, **237**(6): 721-731.

Initial Value Problem for a Class of Nonlinear Wave Equations of Fourth Order

CHEN Guo-wang[1], HOU Chang-shun[2]

(1. Department of Mathematics, Zhengzhou University,
Zhengzhou 450052, P. R. China;
2. College of Mathematics and Physics, Henan University of Technology,
Zhengzhou 450052, P. R. China)

Abstract: The existence and the uniqueness of the global generalized solution and the global classical solution to the initial value problem for a class of nonlinear wave equation of fourth order are studied in the fractional order Sobolev space by the contraction mapping principle and the extension theorem. The sufficient conditions for blow up of the solution to the above initial value problem are given.

Key words: nonlinear wave equation of fourth order; initial value problem; global solution; blow up of solution