文章编号: 1000-0887(2009) 03-0360-08

应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

多参数分数 Lévy 过程局部时的存在性和联合连续性

林正炎[1], 程宗毛[1,2]

(1. 浙江大学 数学系, 杭州 310027;
2. 杭州电子科技大学 应用数学与工程计算研究所, 杭州 310018)

(郭兴明推荐)

摘要: 首先引进了一类比 Xiao 和 Zhang 研究过的 Gauss 随机场更为一般的多参数 Lévy 过程. 然后给出并证明了此过程的一种分解, 并利用这一分解, 证明了该过程的局部时的存在性和联合连续性.

关 键 词: 多参数分数 Lévy 过程; 分数 Brown 单; 局部时; Gauss 随机场; 多参数 Poisson 过程; 多参数 Brown 运动

中图分类号: O211.6 文献标识码: A

1 引言和主要结果

对于一个给定的向量 $\boldsymbol{H} = (H_1, \cdots, H_N)$ $(0 < H_l < 1, l = 1, \cdots, N)$, 一个实值具有 Hurst 指数 $\boldsymbol{H}$ 的分数 Brown 单 $B_0^{\boldsymbol{H}} = \left\{ B_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}): \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^N \right\}$ 是一个实值中心化的 Gauss 随机场, 它具有以下的协方差函数:

$$E[B_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s}) B_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t})] = \prod_{l=1}^{N} \frac{1}{2}\left(s_l^{2H_l} + t_l^{2H_l} - |s_l - t_l|^{2H_l}\right), \qquad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^N \tag{1}$$

由式(1), 对任意 $\boldsymbol{t} \in \partial\mathbb{R}_+^N$, $B_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}) = 0$, 其中, $\partial\mathbb{R}_+^N$ 表示 $\mathbb{R}_+^N$ 的边界. 分数 Brown 单有以下的随机积分表示:

$$B_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}) = k_{\boldsymbol{H}}^{-1} \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_N} \prod_{l=1}^{N} g_{H_l}(t_l, s_l) W(\mathrm{d}\boldsymbol{s}), \tag{2}$$

其中, $W = \left\{ W(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^N \right\}$ 是一个标准 Brown 单,

$$g_{H_l}(t_l, s_l) = ((t_l - s_l)_+)^{H_l - 1/2} - ((-s_l)_+)^{H_l - 1/2},$$

$s_{l+} = \max\left\{ s_l, 0 \right\}$ 而 $k_{\boldsymbol{H}}$ 是由下式给出的正则化常数:

$$k_{\boldsymbol{H}}^2 = \int_{-\infty}^{1} \cdots \int_{-\infty}^{1} \left[\prod_{l=1}^{N} g_{H_l}(1, s_l) \right]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

收稿日期: 2008-06-30; 修订日期: 2008-12-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871177); 教育部博士点专项基金资助项目(20060335032)

作者简介: 林正炎(1941—), 男, 杭州人, 教授, 博士生导师;
程宗毛(1964—), 男, 江西玉山人, 副教授, 博士(联系人. Tel: +86-571-88235051; E-mail: zmcheng@hdu.edu.cn).

定义 1. 1 定义在概率空间 $(\quad, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上取值于 R^d 的随机过程 $\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \quad R_+^N \right\}$ 称为多参数 L vy 过程, 如果它具有平稳和防立增量, 即对任意 n 个不交的 R_+^N 的子集 $A_1, \quad, A_n$, $\boldsymbol{X}(A_i)$, $i = 1, \quad, n$ 相互独立, 而且 $\boldsymbol{X}(A_i)$ 的分布只与Lebesgue 测度 $\ _N(A_i)$, $i = 1, \quad, n$ 有关, 其中, $\boldsymbol{X}(A) = \ _A \boldsymbol{X}(\mathrm{d}\boldsymbol{t})$

对于分数 Brown 运动和分数 Brown 单已有许多学者进行了研究, 给出了许多有价值的结果, 如 Orey 和 Pruitt[1], Adler[2-3], Pitt[4], Ehm[5], Rosen[6], Talagrand[7], Xiao[8], Xiao 和 Zhang[9] 引进了 Gauss 随机场

$$\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}) = (B_1^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}), \quad, B_d^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t})), \tag{3}$$

其中, $B_1^{\boldsymbol{H}}, \quad, B_d^{\boldsymbol{H}}$ 是 $B_0^{\boldsymbol{H}}$ 的独立复制, 并且研究了 $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}$ 的局部时的存在性和联合连续性 在他们的讨论中 $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}$ 的独立复制 的假设起了很大的作用

在本文里首先引进有 Hurst 指数 $\boldsymbol{H} = (H_1, \quad, H_N)$ 分数 L vy 过程的定义, 并且在没有 独立复制 的假定下研究了此过程的局部时的存在性和联合连续性

定义 1. 2 取值于 R^d 的Gauss 过程 $\boldsymbol{B} = \left\{ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \quad R_+^N \right\}$ 称为多参数数标准Brown 运动, 如果对任何 $\boldsymbol{t} \quad R_+^N$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$ 的协方差矩阵是 $\boldsymbol{M}\ _N([\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}])$, 其中, $\boldsymbol{M}$ 是一个满足 $\det \boldsymbol{M} = 1$ 的常数矩阵 Gauss随机场 $\boldsymbol{B}_*^{\boldsymbol{H}} = k_{\boldsymbol{H}}^{-1} \ _{-}^{t_1} \quad _{-}^{t_N} \ _{l=1}^{N} g_{H_l}(t_l, s_l) \boldsymbol{B}(\mathrm{d}\boldsymbol{s})$ 称为具有Hurst 指数 $\boldsymbol{H} = (H_1, \quad, H_N)$ 的 (N, d)- 多参数的分数 Brown 运动

显然 $\boldsymbol{B}_*^{\boldsymbol{H}}$ 是 $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}$ 的推广

定义 1. 3 取值于 R^d 的随机过程 $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}} = \left\{ \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \quad R_+^N \right\}$ 称为具有Hurst 指数 $\boldsymbol{H} = (H_1, \quad, H_N)$ 的 (N, d)- 分数L vy 过程, 如果

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}) = k_{\boldsymbol{H}}^{-1} \ _{-}^{t_1} \quad _{-}^{t_N} \ _{l=1}^{N} g_{H_l}(t_l, s_l) \boldsymbol{X}(\mathrm{d}\boldsymbol{s}), \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{X}$ 是一个由定义 1. 1 定义的多参数 L vy 过程

$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}$ 是具有Hurst 指数 $\boldsymbol{H} = (H_1, \quad, H_N)$ 的 (N, d)- 分数 Brown 单的自然推广

在给出我们的定理之前, 先回顾有关参数空间和局部时的基本知识 在本文里所提到的参数空间是 $R_+^N = [0, \quad)^N$, 一个的参数 $\boldsymbol{t} \quad R^N$ 常被写成 $\boldsymbol{t} = (t_1, \quad, t_N)$ 在 R^N 里有一个自然的偏序关系, $\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{t}$ 当且仅当对所有 $l = 1, \quad, N$, 有 $s_l \quad t_l$ 当 $\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{t}$ 时, 定义一个闭区间

$$[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}] = \ _{l=1}^{N} [s_l, t_l]$$

用 $\mathcal{A}$ 表示形如 $I = [\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]$ 的所有 N- 维闭区间 $I \quad (0, \quad)^N$ 所形成的集合, $\mathcal{N}$ 表示所有非负整数向量集 $\ _N$ 表示在 R_+^N 上的Lebesgue 测度, 使用 , 和| |分别表示普通的内积和欧氏范数 我们简要回顾一下有关局部时的一些知识结果 详情请参看 Geman 和 Horowitz[10] 以及 Xiao[8]

设 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t})$ 是定义在 R^N 取值于 R^d 的 Borel 向量场 对于任意 Borel 集 $\boldsymbol{T} \quad R^N$, $\boldsymbol{Y}$ 在 $\boldsymbol{T}$ 上的占有时测度是由式

$$\ _T(\ ) = \ _N \left\{ \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{T}: \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}) \quad \right\}$$

所定义 如果 $\ _T$ 关于 $\ _d$ 绝对连续, $\ _T$ 的关于 $\ _d$ 的Radon-Nikod m导数称为 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t})$ 在 $\boldsymbol{T}$ 上的局

部时, 记为 $L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{T})$, 即

$$L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{T}) = \frac{\mathrm{d}\ \ _T}{\mathrm{d}\ \ _d}(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y} \quad R^d$$

$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 分别称为局部时的空间变量和时间变量　如果 $L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{T})$ 存在, 那么对每个 Borel 集 I $\boldsymbol{T}$, $L(\boldsymbol{y}, I)$ 存在　固定 $\mathscr{A}$ 中的区间 $T = \ _{i=1}^{N}[a_i, a_i + \ t_i]$　如果我们能够选取局部时的一种版本, 记为 $L\left(\boldsymbol{y}, \ _{i=1}^{N}[a_i, a_i + \ h_i]\right)$, 使得它是 $(\boldsymbol{y}, t_1, \ , t_N) \quad R^d \quad _{i=1}^{N}[0, h_i]$ 的连续函数, 那么就说 $\boldsymbol{Y}(t)$ 在 $\boldsymbol{T}$ 上有联合连续局部时　当一个局部时具有联合连续性时, $L(\boldsymbol{y}, \ )$ 能延拓成支撑为水平集

$$\boldsymbol{Y}_T^{\ 1} = \left\{ \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{T}: \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y} \right\}$$

的有限 Borel 测度(详情请参看 Adler[3] 的工作)　换句话说局部时的行为与 $\boldsymbol{Y}$ 的水平集上的自然测度一样　许多学者, 诸如 Adler[3], Ehm[5], Rosen[6] 和 Xiao[8] 对向量场 $\boldsymbol{Y}$ 的水平集和逆像集的各种分形性质进行了研究

以下的定理把文献[9]中的关于 (N, d)– 分数 Brown 单有关结果推广到 (N, d)– 多参数分数 L vy 过程的情形

定理 1.1　设 $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}} = \left\{ \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \quad R_+^N \right\}$ 是 (N, d)– 具有 Hurst 指数 $\boldsymbol{H} = (H_1, \ , H_N)$ 的多参数分数 L vy 过程　如果 $d < \ _{l=1}^{N}(1/H_l)$, 那么对所有 $I \quad \mathscr{A}$, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}$ 在 I 上有局部时 $\left\{ L(\boldsymbol{x}, I), \boldsymbol{x} \quad R^d \right\}$; 而且 $L(\boldsymbol{x}, I)$ 有如下的 L^2 表示:

$$L(\boldsymbol{x}, I) = (2\ )^{-d} \ _{R^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}} \ _I \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s})} \mathrm{d}\boldsymbol{s}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{5}$$

定理 1.2　设 $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}} = \left\{ \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \quad R_+^N \right\}$ 是 (N, d)– 具有 Hurst 指数 $\boldsymbol{H} = (H_1, \ , H_N)$ 的多参数分数 L vy 过程　如果对所有 $l = 1, \ , N$, $H_l d < 1$, 那么对所有 $I \quad \mathscr{A}$, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}$ 有联合连续局部时

2 定理的证明

定义 2.1　一个取值于 $\mathscr{N}$ 的随机过程 $\mathscr{N} = \left\{ \mathscr{N}\ (\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \quad R_+^N \right\}$ 称为一个 Poisson 点过程, 如果它有平稳和独立增量, 即, 对任意 R_+^N 的 n 个不交可测子集 $A_1, \ , A_n$, $\mathscr{N}\ (A_i)$, $i = 1, \ , n$, 是相互独立的, 而且 $\mathscr{N}\ (A)$ 参数为 $\ _N(A)$ 的 Poisson 分布

定义 2.2　随机变量 X 称为无限可分的, 如果对任意 $n \quad \mathbf{N}$, 存在 i.i.d 随机变量 $X_1, \ , X_n$, 使得 $X = X_1 + \ + X_n$　相应地, 我们可定义无穷可分的概率测度和特征函数

以下事实在单参数的情形是众所周知

引理 2.1　对于取值于 R^d 多参数的 L vy 过程 $\left\{ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \quad R_+^N \right\}$, 随机变量 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ 是无限可分的, 它的特征函数

$$f(\boldsymbol{u}) = \mathrm{e}^{-\ _N([\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}])\ (\boldsymbol{u})} \qquad (\boldsymbol{t} \quad R_+^N, \boldsymbol{u} \quad R^d), \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{u}) = \mathrm{i}\ \ \boldsymbol{u}, \quad + \frac{1}{2}\boldsymbol{uSu} + \ _{R^d}\left[1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}} + \frac{\mathrm{i}\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}}{1 + |\ \boldsymbol{x}\ |^2}\right] \ (\mathrm{d}\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

其中, $\ = (\ _1, \ , \ _d) \quad R^d$, $\boldsymbol{S}$ 是一个 $d \quad d$ 对称的非负定矩阵, 　是 $\mathscr{B}(R^d)$ 上的测度, $\ (\{0\}) = 0$, 而且

$$\ _{R^d} \frac{|\ \boldsymbol{x}\ |^2}{1 + |\ \boldsymbol{x}\ |^2} \ (\mathrm{d}\boldsymbol{x}) < \tag{8}$$

或者式(7)和(8)由下式取代:

$$(u) = \mathrm{i}\ u, \quad + \frac{1}{2}uSu + \int_{R^d}[1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ x, u} + \mathrm{i}\ x, u\ 1_{[|x| \quad 1]}]\ (\mathrm{d}x), \tag{9}$$

$$\int_{R^d}(1 \quad |x|^2)\ (\mathrm{d}x) < \tag{10}$$

反过来,对于任意由式(7)或(9)给定的 (u), 存在一个满足式(6)的多参数 L vy 过程 $X = \left\{X(t), t \quad R_+^N\right\}$, 它的跳过程

$$X(t) = \lim_{s \quad t, s \quad t} X((s, t]), \qquad t \quad R_+^N$$

是一个具有特征测度 的 Poisson 点过程

引理 2.1 的证明类似于文献[11]中给出的单参数情形的证明

由多参数 L vy 过程的定义,类似于对于单参数 L vy 过程的讨论,我们有以下引理:

引理 2.2　对于任意取值于 R^d 的多参数 L vy 过程 $X = \left\{X(t), t \quad R_+^N\right\}$, 存在一个可分修正 X^*, 它的轨道 $X^*(\ ,\ )$ 几乎右连续且有左极限

由这个引理,我们可以几乎肯定地认为多参数 L vy 过程的轨道是右连续和有左极限的

引理 2.3　对于任意取值 R^d 的多参数 L vy 过程 $X = \left\{X(t), t \quad R_+^N\right\}$, 我们可以把它写成 $X(t) = X(t) + X(t) + X(t)$, 其中, $X(t) = B(t)\sqrt{\det S} - \ _N([0, t])$, $B(t)$ 是一个取值于 R^d 的多参数标准 Brown 运动, S 和 由式(7)或(9)所确定;

$$X(t) = \sum_{s \quad [0,t]} X(s)\, 1_{\left\{|\ X(s)| > 1\right\}}$$

是一个复合 Poisson 过程,

$$X(t) = \sum_{s \quad [0,t]} X(s)\, 1_{\left\{|\ X(s)| \quad 1\right\}}$$

是一个右连左极过程　X, X 和 X 是相互独立而且它们都是多参数 L vy 过程　这个分解在无差别的意义下是唯一的

注　设 $\mathscr{N}(t)$ 是 $X(s)$ 在 $[0, t]$ 里的不连续点数　那么可以把它写成 $\mathscr{N}(t) = \sum_{0 \quad s \quad t} 1_{\left\{\ X(s) \quad 0\right\}}$ 从 Bertoin 的文献[11], 可以知道 $\mathscr{N}(t)$ 是一个 Poisson 过程, 而且我们有

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\mathscr{N}(t)} X(s_i)\, 1_{\{|\ X_{s_i}| > 1\}}, \qquad t \quad R_+^N, \tag{11}$$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\mathscr{N}(t)} X(s_i)\, 1_{\{0 < |\ X_{s_i}| \quad 1\}}, \qquad t \quad R_+^N, \tag{12}$$

其中, s_i, $i = 1, 2, \ $, 是 $X(t)$ 的不连续点　进一步我们还有

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\mathscr{N}(t)} X_{s_i},\quad X(t) = \sum_{i=1}^{\mathscr{N}(t)} X_{s_i}, \qquad t \quad R_+^N$$

其中

$$X_{s_i} = X(s_i)\, 1_{\{|\ X_{s_i}| > 1\}}, \quad X_{s_i} = X(s_i)\, 1_{\{0 < |\ X_{s_i}| \quad 1\}},$$

$$\mathscr{N}(t) = \sum_{s_i \quad [0,t]} 1_{\{|\ X_{s_i}| > 1\}}, \quad \mathscr{N}(t) = \sum_{s \quad [0,t]} 1_{\{0 < |\ X_{s_i}| \quad 1\}}, \qquad t \quad R_+^N,$$

$$\mathscr{N}(t) + \mathscr{N}(t) = \mathscr{N}(t)$$

引理 2.3 的证明　由引理 2.1 我们有

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ u, X(t)}) = \mathrm{e}^{-\ _N([0,t])\ (u)} \tag{13}$$

首先构造一个取值于 R^d 的多参数标准 Brown 运动 $B = \left\{B(t) : t \quad R_+^N\right\}$　对于式(13)中的 (u), 设

$$X(t) = B(t)\sqrt{\det S} - a\lambda_N([0,t]), \qquad t\in R_+^N, \tag{14}$$

那么 $X=\left\{X(t): t\in R_+^N\right\}$ 是一个的多参数Lévy过程, 而且它的特征函数是

$$E(e^{i\langle u, X(t)\rangle}) = e^{-\lambda_N([0,t])\psi^{(1)}(u)},$$

其中 $\psi^{(1)}(u) = i\langle a, u\rangle + \frac{1}{2}uSu'$.

然后再构造一个Poisson点过程 $\Delta X=\left\{\Delta X(t): t\in R_+^N\right\}$, 它与 X 独立且有特征测度 ν. 设 $\Delta X'(t) = \Delta X(t)1_{\{|\Delta X(t)|>1\}}$, 那么 $\Delta X'=\left\{\Delta X'(t): t\in R_+^N\right\}$ 是一个具有特征测渡 $\nu^{(1)}(dx) = 1_{\{|\Delta X(t)|>1\}}\nu(dx)$ 的Poisson点过程. 因为至多存在可数个点 $s\in R_+^N$ 使得 $\Delta X'(s)\neq 0$, 我们可设 $X'(t)=\sum_{0\le s\le t}\Delta X'(s)$. 由多参数Lévy过程的定义, 可知 X' 是一个多参数Lévy过程, 它的轨道是几乎右连左极的, 而且 X' 与 X 独立且有特征函数 $E(e^{i\langle u, X'(t)\rangle}) = e^{-\lambda_N([0,t])\psi^{(2)}(u)}$, 其中

$$\psi^{(2)}(u) = \int_{R^d}(1-e^{i\langle u,x\rangle}1_{\{|x|>1\}})\,\nu(dx).$$

设 $\Delta X^d(t) = \Delta X(t)1_{\{|\Delta X(t)|\le 1\}}$. 那么 $\Delta X^d=\left\{\Delta X^d(t): t\in R_+^N\right\}$ 是一个Poisson点过程且具有特征测度 $\nu^{(2)}(dx) = 1_{\{|\Delta X(t)|\le 1\}}\nu(dx)$. 对于任意的 $0<\varepsilon<1$, 我们考虑

$$X^{(\varepsilon)}(t) = \sum_{s\in[0,t]}1_{\{\varepsilon<|\Delta X(s)|<1\}}\Delta X(s) - \lambda_N([0,t])\int_{R^d}x1_{\{\varepsilon<|x|\le 1\}}\,\nu(dx).$$

由多参数Lévy过程的定义, 可知 $X^{\varepsilon}=\left\{X^{(\varepsilon)}(t), t\in R_+^N\right\}$ 是一个多参数Lévy过程, 它具有特征函数 $E(e^{i\langle u, X^{(\varepsilon)}(t)\rangle}) = e^{-\lambda_N([0,t])\psi^{(\varepsilon)}(u)}$, 其中

$$\psi^{(\varepsilon)}(u) = \int_{R^d}(1-e^{i\langle u,x\rangle}+i\langle u,x\rangle)1_{\{\varepsilon<|x|<1\}}\,\nu(dx).$$

对任意 $\delta\in(0,\varepsilon)$, 我们有

$$E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X^{(\delta)}(s)-X^{(\varepsilon)}(s)|^2\right)\le$$

$$4\lambda_N([0,t])^2\int_{R^d}|x|^2 1_{\{\delta<|x|<\varepsilon\}}\,\nu(dx), \tag{15}$$

由文献[10]知, 当 $\varepsilon\downarrow 0$, 式(15)右边的极限是0. 因此 $\left\{X^{(\varepsilon)}: \varepsilon>0\right\}$ 在范数 $\|Y\| = E(\sup_{s\in[0,t]}|Y_s|)^{1/2}$ 意义下是一个Cauchy序列. 设 $X^d(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}X^{(\varepsilon)}(t)$. 由多参数Lévy过程的定义, X^d 是一个多参数Lévy过程, 它具有如下的特征函数:

$$E(e^{i(u, X^d(t))}) = e^{-\lambda_N([0,t])\psi^{(3)}(u)},$$

其中

$$\psi^{(3)}(u) = \int_{R^d}(1-e^{i(u,x)}+i(u,x))1_{\{|x|<1\}}\,\nu(dx).$$

从Poisson过程的性质知, X^d 与 X' 独立. 用熟知的常规方法, 易证分解的唯一性.

从Geman和Horowitz[10](也可参看Geman, Horowitz和Rosen[12], Pitt[4]的工作)的式(25.5)和(25.7)可知对任意 $x, y\in R^d$, $T\in\mathcal{A}$ 和整数 $n\ge 1$,

$$EL(x,T)^n = (2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{R^{nd}}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n}\langle u^j, x\rangle\right)\cdot E\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\langle u^j, X^H(t^j)\rangle\right)du\,dt, \tag{16}$$

以及对任意偶整数 $n\ge 2$

$$E(L(x,T)-L(y,T))^n =$$

$$(2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{R^{nd}}\left[\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle u^j, x\rangle\right)-\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle u^j, y\rangle\right)\right]\cdot$$
$$E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle u^j, X(t^j)\rangle\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t, \tag{17}$$

其中, $u=(u^1,\dots,u^n)$, $t=(t^1,\dots,t^n)$ 和 $u^j\in R^d$, $t^j\in R_+^N$. 用坐标的写法 $u^j=(u_1^j,\dots,u_d^j)$.

定理 1.1 的证明 设 $I=[s,t]\in\mathcal{A}$. 由 Orey 和 Pruitt[1] 以及 Pitt[4] 使用的方法(也可参看 Geman 和 Horowitz[10] 的式(21.3)), 只要证明

$$\mathcal{K}(I):=\int_I\mathrm{d}s\int_I\mathrm{d}r\int_{R^d}\mathrm{d}y\int_{R^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle y, X^H(s)\rangle+\mathrm{i}\langle z, X^H(r)\rangle)\right|\mathrm{d}z<\infty, \tag{18}$$

定理的结论就可成立.

我们需要以下的关于 (N,d)-多参数分数 Brown 单的结果[9].

设 $B^H=\left\{B^H(t), t\in R_+^N\right\}$ 是一个具有 Hurst 指数 $H=(H_1,\dots,H_N)$ 由定义 1.3 定义的 (N,d)-分数 Brown 单. 如果有 $d<\sum_{l=1}^{N}(1/H_l)$, 那么对所有 $I\in\mathcal{A}$, 有

$$\mathcal{J}(I):=\int_I\mathrm{d}s\int_I\mathrm{d}r\int_{R^d}\mathrm{d}y\int_{R^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle y, B^H(s)\rangle+\mathrm{i}\langle z, B^H(r)\rangle)\right|\mathrm{d}z<\infty. \tag{19}$$

由引理 2.3 我们有 $X^H=X^H+G^H$ 其中

$$X^H(t)=k_H^{-1}\int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_N}\prod_{l=1}^{N}g_{H_l}(t_l,s_l)X(\mathrm{d}s),$$

$$G^H(t)=k_H^{-1}\int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_N}\prod_{l=1}^{N}g_{H_l}(t_l,s_l)(X'+X'')(\mathrm{d}s),$$

而且 X^H 是与 G^H 独立的. 设 M 是一个与多参数标准 Brown 运动 B(参看定义 1.2) 有关的对称正定矩阵. 可以把它写成 $M=g'Ig$, 其中矩阵 g 满足 $\det g=1$. 而且可以把 $B(t)$ 写成 $B(t)=W^*(t)g$, 其中, $W^*(t)=(W_1(t),\dots,W_d(t))$, $t\in R_+^N$ 是一个取值于 R^d 的 Brown 运动 $W_1,\dots,W_d$ 是标准 Brown 单参数 W 的独立复制. 那么有

$$B_*^H(t):=k_H^{-1}\int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_N}\prod_{l=1}^{N}g_{H_l}(t_l,s_l)B(\mathrm{d}s)=$$
$$k_H^{-1}\int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_N}\prod_{l=1}^{N}g_{H_l}(t_l,s_l)W^*(\mathrm{d}s)g=B^H(t)g. \tag{20}$$

再由式(14)和(20), 可得

$$X^H(t)=B_*^H(t)\sqrt{\det\Sigma}-AB(t)K_N([0,t])=$$
$$\sqrt{\det\Sigma}\,B^H(t)g-AB(t)K_N([0,t]), \tag{21}$$

其中, $B(t)=k_H^{-1}\int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_N}\prod_{l=1}^{N}g_{H_l}(t_l,s_l)W^*(\mathrm{d}s)$. 因此, 令 $K=\sqrt{\det\Sigma}$, 我们有

$$\mathcal{K}(I)=\int_I\mathrm{d}s\int_I\mathrm{d}r\int_{R^d}\mathrm{d}y\int_{R^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle y, X^H(s)\rangle+\mathrm{i}\langle z, X^H(r)\rangle)\right|\mathrm{d}z=$$

$$\int_I\mathrm{d}s\int_I\mathrm{d}r\int_{R^d}\mathrm{d}y\int_{R^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle y, X^H(s)+G^H(s)\rangle+\mathrm{i}\langle z, X^H(r)+G^H(r)\rangle)\right|\mathrm{d}z\leq$$

$$\int_I\mathrm{d}s\int_I\mathrm{d}r\int_{R^d}\mathrm{d}y\int_{R^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle y, X^H(s)\rangle+\mathrm{i}\langle z, X^H(r)\rangle)\right|\mathrm{d}z=$$

$$\int_I\mathrm{d}s\int_I\mathrm{d}r\int_{R^d}\mathrm{d}y\int_{R^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle y, KB^H(s)g\rangle+\mathrm{i}\langle z, KB^H(r)g\rangle)\right|\mathrm{d}z=$$

$$\int_I \mathrm{d}\boldsymbol{s}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\int_{\mathbb{R}^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle \lambda\boldsymbol{y}', \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s})\rangle + \mathrm{i}\langle \lambda\boldsymbol{z}', \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\rangle)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{z} =$$

$$\frac{1}{\lambda^{2d}}\int_I \mathrm{d}\boldsymbol{s}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\int_{\mathbb{R}^d}\left|E\exp(\mathrm{i}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s})\rangle + \mathrm{i}\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\rangle)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{z} =$$

$$\frac{1}{\lambda^{2d}}\mathcal{J}(I) < \infty。$$

式(18)得证。

定理 1.2 的证明　设 $C > 0$ 是一个常数。定义

$$p(y) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } y = 0, \\ \ln^{-C}(e/|y|), & \text{如果 } 0 < |y| \le 1, \\ C|y| - C + 1, & \text{如果 } |y| > 1。\end{cases}$$

由式(16)，我们有

$$|E[L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})]^n| \le$$

$$(2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{\mathbb{R}^{nd}}\left|\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{x}\rangle\right)\right| \cdot \left|E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)\rangle\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \le$$

$$(2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{\mathbb{R}^{nd}}\left|E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle \boldsymbol{u}^j, \lambda\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)'\rangle\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t} =$$

$$(2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{\mathbb{R}^{nd}}\left|E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle \lambda\boldsymbol{u}^{j\prime}, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)\rangle\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \le$$

$$\lambda^{-nd}(2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{\mathbb{R}^{nd}}\left|E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)\rangle\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \le$$

$$K_1^n r^{\left(N - \sum_{l=1}^{N}H_l d\right)n}(n!)^{\sum_{l=1}^{N}H_l d}。\tag{22}$$

由式(17)和令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}c'$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}c'$，我们有

$$|E(L[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}) - L(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{T})]^n| \le$$

$$(2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{\mathbb{R}^{nd}}\prod_{j=1}^{n}\left|[\exp(-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{x}c'\rangle) -\right.$$

$$\left.\exp(-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{y}c'\rangle)]\right| \cdot \left|E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle \boldsymbol{u}^j, \lambda\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)'\rangle\right)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \le$$

$$\lambda^{-nd}(2\pi)^{-nd}\int_{T^n}\int_{\mathbb{R}^{nd}}\prod_{j=1}^{n}|\exp(-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{y}c - \boldsymbol{x}c\rangle) - 1| \times$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)\rangle\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t}。\tag{23}$$

注意到对 $\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{u}_0^j = \boldsymbol{0}$，有

$$\prod_{j=1}^{n}|\exp(-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{u}^j, \boldsymbol{y}\rangle) - 1| =$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{d}\left[\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{l=0}^{k}u_l^j y_l\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{l=0}^{k-1}u_l^j y_l\right)\right]\right| \le$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{d}|\exp(-\mathrm{i}u_k^j y_k) - 1|\right] =$$

$$\sum{}^{c}\prod_{j=1}^{n}|\exp(-\mathrm{i}u_{k_j}^j y_{k_j}) - 1|,\tag{24}$$

其中, 求和 $\sum'$ 是取遍序列 $(k_1,\cdots,k_n)\in\{1,\cdots,d\}^n$ 所有取值而进行的。因此对于任意固定超长方体 $D\subset R^d$ 和偶整数 $n\geq 2$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&E\int_{D\times D}\left(\frac{|L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{T})-L(\boldsymbol{y},\boldsymbol{T})|}{\varphi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/\sqrt{d})}\right)^n \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\leq\\
&K^{-2nd}(2\pi)^{-nd}\sum{}'\int_{D\times D\times T^n\times R^{nd}}\prod_{j=1}^{n}\frac{|\exp(-\mathrm{i}u^j_{k_j}(y_{k_j}-x_{k_j}))-1|}{\varphi(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|/\sqrt{d})}\cdot\\
&\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle\boldsymbol{u}^j,\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)\rangle\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\leq\\
&K^{-2nd}(2\pi)^{-nd}K_d(\boldsymbol{D})\sum{}'\int_{D\ominus D\times T^n\times R^{nd}}\prod_{j=1}^{n}\frac{|\exp(-\mathrm{i}u^j_{k_j}y_{k_j})-1|}{\varphi(|y_{k_j}|/\sqrt{Kd})}\cdot\\
&\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle\boldsymbol{u}^j,\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)\rangle\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{y}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

在上式中, $D\ominus D=\{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}:\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D\}$. 固定一个序列 $(k_1,\cdots,k_n)\in\{1,\cdots,d\}^n$. 类似于文献[9]中的式(4.12)和(4.14), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{D\ominus D\times R^{nd}}\prod_{j=1}^{n}\frac{|\exp(-\mathrm{i}u^j_{k_j}y_{k_j})-1|}{\varphi(|y_{k_j}|/\sqrt{Kd})}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{n}\langle u^j,\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)\rangle\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\leq\\
&\frac{K^n}{[\det\mathrm{cov}(\boldsymbol{B}_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^1),\cdots,\boldsymbol{B}_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^n))]}\prod_{j=1}^{n}\left[\int_{\mathbf{R}}\varphi_+^{-n}\left(\frac{R_j}{v\sqrt{K}}\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v\right]^{1/n},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

其中, $\varphi_+(x)=\max\{1,\varphi(x)\}$. R_j^2 是给定 $\boldsymbol{B}_l^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^i)$ $(l\neq k_j,\ i\neq j)$ 以后, $\boldsymbol{B}_{k_j}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^j)$ 的条件方差, 因此有

$$
\begin{aligned}
&E\int_{D\times D}\left(\frac{|L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{T})-L(\boldsymbol{y},\boldsymbol{T})|}{\varphi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/\sqrt{d})}\right)^n \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\leq\\
&K_2K_d(D)[\ln n]^{n\gamma}\cdot\int_{T^n}\frac{1}{[\det\mathrm{cov}(\boldsymbol{B}_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^1),\cdots,\boldsymbol{B}_0^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{t}^n))]^{d/2}}\prod_{j=1}^{n}\ln_+^{\gamma}\left(\frac{Ke}{R_j}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

类似于文献[9]中的式(4.19)的论证, 再结合式(27), 我们有

$$
\begin{aligned}
&E\int_{D\times D}\left(\frac{|L(\boldsymbol{x},T)-L(\boldsymbol{y},T)|}{\varphi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/\sqrt{Kd})}\right)^n \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\leq\\
&K_3^n(n!)^N(\ln n)^{n\gamma}r^{n\left(N-\sum_{l=1}^{N}H_ld\right)}\ln_+^{nN\gamma}\left(\frac{Ke}{r}\right).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

由式(28)和文献[9]中定理4.1的证明, 我们可以得到局部时的联合连续性。定理1.2被证明。

3　结　　论

在本文里我们引进多参数 Lévy 过程 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}):\boldsymbol{t}\in R_+^N\}$, 并获得它的一个分解。使用此分解, 我们证明了与文献[9]中类似的结论。

[参　考　文　献]

[1]　Orey S, Pruitt W E. Sample functions of the N-parameter Wiener process[J]. Ann Probab, 1973, **1**

1) : 138-163.

[2] Adler R J. The uniform dimension of the level sets of a Brownian sheet[J]. Ann Probab, 1978, **6**(2): 509-515.

[3] Adler R J. The Geometry of Random Fields[M]. New York: Wiley, 1981.

[4] Pitt L D. Local times for Gaussian vector fields[J]. Indiana Univ Math J, 1978, **27**(3): 309-330.

[5] Ehm W. Sample function properties of multi-parameter stable processes[J]. Z Wahrsch Verw Gebiete, 1981, **56**(2): 195-228.

[6] Rosen J. Self-intersections of random fields[J]. Ann Probab, 1984, **12**(1): 108-119.

[7] Talagrand M. Hausdorff measure of trajectories of multiparameter fractional Brownian[J]. Ann Probab, 1995, **23**(4): 767-775.

[8] Xiao Y. H lder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields[J]. Probab Theory Reated Fields, 1997, **109**(1): 129-157.

[9] Xiao Y, Zhang T. Local times of fractional Brownian sheets probab[J]. Th Ret Fields, 2002, **124**(2): 204-226.

[10] Geman D, Horowitz J. Occupation densities[J]. Ann Probab, 1980, **8**(1): 1-67.

[11] Bertoin J. L vy Processes[M]. London: Cambridge Press, 1996.

[12] Geman D, Horowitz J, Rosen J. A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane [J]. Ann Probab, 1984, **12**(1): 86-107.

Existence and Joint Continuity of Local Time of Multiparameter Fractional L vy Processes

LIN Zheng-yan[1], CHENG Zong-mao[1,2]

(1. Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China;

2. Institute of Applied Mathematics and Engineering Computation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, P. R. China)

Abstract: The definition of multiparameter fractional L vy process which more general than that studied by Xiao and Zhang was introduced firstly, and then a decomposition for it was given and shown. Later using this decomposition, existence and joint continuity of its local time were proved.

Key words: multiparameter fractional L vy process; fractional Brownian sheet; local time; Gaussian random field; multiparameter Poisson process; multiparameter Brownian motion