

# 具有绝热自由表面的三阶流体在重力作用下 沿斜面薄膜流动时的热临界\*

O·D·玛金德

(开普半岛理工大学 工程系, 贝尔维尔 7535, 南非)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 研究三阶流体在重力作用下, 沿着一个倾斜等温的, 带绝热自由表面时薄膜流动的热临界机理. 假设是 Arrhenius 动力学意义下的发热反应, 同时不计物质消耗. 得到了动量和能量守恒的非线性控制方程, 并以 MAPLE 为工具, 基于一种特殊形式的 Hermite Pad 近似技术, 使用一种全新的数值逼近方法解之. 这种半数值方法比之传统的方法, 如有限差分法、频谱法、打靶法等, 具有一定的优势. 得到了解函数的解析结构, 并对全部流动结构的重要性能, 包括速度场、温度场、热临界和分岔加以讨论.

**关键词:** 倾斜的等温面; 三阶流体; Hermite-Pad 近似; 热临界  
**中图分类号:** O373; O414.1      **文献标识码:** A

## 引 言

许多流体应用在工业和工程过程, 如地质材料、液态泡沫、聚合物流体、泥浆、烃类油及油脂表现出的流动特性, 经典线性粘性流体模型不能充分描述. 为了描绘这些材料违背于 Newton 流体的特性, 提出了许多理想化的材料模型. 这些材料的早期模型之一, 包括了不同类型流体<sup>[1]</sup>.  $n$  阶流体构成了一个复杂的  $n$  阶流体的特殊子类, 在该子类中, Navier-Stokes 流体是一阶流体中特殊的 1 类. 经常用来描述非 Newton 响应的其它流体模型, 是二阶不可压缩流体模型. 该子类能够描述刚性边界上稳定单向流的法向应力效应, 但不能预测剪切变稀/变厚特性. 三阶流体模型能够预测这样的特性<sup>[2]</sup>.

倾斜热表面上的流动和热传递现象在许多技术工艺中应用前景广阔, 如聚合物膜或薄板、拔丝、玻璃纤维和造纸生产<sup>[3-6]</sup>. 更特别的是, 热稳定分析在非 Newton 流体研究中扮演重要角色. 当流动系统中热产生速率超过热向周边消散速率时, 热临界发生<sup>[1, 7-8]</sup>. 其条件是流动系统中初始热失控或触发<sup>[9]</sup>. 热临界分析的主要目的是预测临界或不安全流动条件, 并避免其发生<sup>[10]</sup>.

本文将推广 Siddiqui 等<sup>[2]</sup>的研究工作. 在本研究中, 进行了在 Arrhenius 动力及绝热自由

\* 收稿日期: 2008-08-20; 修订日期: 2008-12-02

基金项目: 南非 Thuthuka 计划国家研究基金资助

作者简介: Oluwole Daniel Makinde (E-mail: makinded@cput.ac.za).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

表面条件下的热传递和热临界分析. 在第1、2节, 分别介绍问题的数学公式的建立及求解. 第3节中, 通过利用一种特别基于 Hemite-Pad 逼近技术<sup>[6,11]</sup> 的计算新方法, 确定流场中热临界条件. 第4节中, 给出数值及图形结果, 并对系统中各种参数变化时的结果进行定量讨论. 在第5节中, 给出本文的主要结论.

## 1 数学模型

本文所研究的问题外形如图1所示. 一个倾斜的发热板放置在平行流中, 研究具有绝热自由表面、反应的三阶薄膜流的流体动力学及其发热过程. 假定流动方向上的特征长度, 相对于薄膜的横向大得多. 根据该假设, 润滑理论仍适用, 由于我们是处理一个纵横比很小的问题, 动量和能量平衡控制方程中的惯性项可以忽略. 在此条件下, 动量和能量平衡控制方程为<sup>[2]</sup>

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + 6\beta_3 \frac{d^2 u}{dy^2} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 + \rho g \sin \phi = 0, \quad (1)$$

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \left[ \mu + 2\beta_3 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \right] + QC_0 A e^{-E/(RT)} = 0, \quad (2)$$

满足边界条件:

$$y = \delta \text{ 时, } \frac{du}{dy} + 2 \frac{\beta_3}{u} \left( \frac{du}{dy} \right)^3 = 0, \quad \frac{dT}{dy} = 0, \quad (3)$$

$$y = 0 \text{ 时, } u = 0, \quad T = T_0, \quad (4)$$

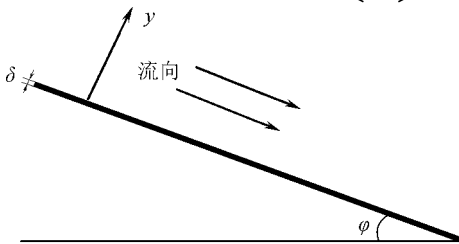


图1 问题的几何图

其中, 能量平衡方程式中额外的 Arrhenius 动力学项来源于文献[9]. 这里,  $T$  为绝对温度,  $\delta$  为薄膜流厚度,  $\phi$  为倾斜角度,  $\rho$  为流体密度,  $g$  为重力加速度,  $u$  为流体的轴向速度,  $T_0$  为板面温度,  $k$  为材料导热系数,  $Q$  为反应热,  $A$  为比例常数,  $E$  为活化能,  $R$  为普适气体常数,  $C_0$  为反应物的初始浓度,  $\beta_3$  为材料系数,  $\mu$  为动粘度<sup>[8]</sup>. 在方程(1)~(4)引入下列无量纲变量:

$$\begin{cases} \theta = \frac{E(T - T_0)}{RT_0}, & y = \frac{y}{\delta}, & \lambda = \frac{QEA \delta^2 C_0 e^{-E/(RT_0)}}{T_0^2 R k}, & W = \frac{\mu u}{\delta^2 \rho g \sin \phi}, \\ m = \frac{(\rho g \sin \phi)^2 e^{E/(RT_0)}}{\mu Q A C_0}, & \varepsilon = \frac{RT_0}{E}, & \gamma = \frac{\beta_3 (\delta \rho g \sin \phi)^2}{\mu^3}, \end{cases} \quad (5)$$

则, 控制方程及其相应边界条件的无量纲形式(为了简便起见, 省略横线符号)给出如下:

$$\frac{d^2 W}{dy^2} + 6\gamma \frac{d^2 W}{dy^2} \left( \frac{dW}{dy} \right)^2 = -1, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \lambda \left[ e^{\theta/(1+\varepsilon)} + m \left( \frac{dW}{dy} \right)^2 \left( 1 + 2\gamma \left( \frac{dW}{dy} \right)^2 \right) \right] = 0 \quad (7)$$

及

$$y = 1 \text{ 时, } \frac{dW}{dy} + 2\gamma \left( \frac{dW}{dy} \right)^3 = 0, \quad \frac{d\theta}{dy} = 0, \quad (8)$$

$$y = 0 \text{ 时, } W = 0, \quad \theta = 0, \quad (9)$$

其中,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $m$  分别表示 Frank-Kamenetskii 参数、活化能参数、非 Newton 流参数(或材料参数)和粘性发热参数. 在下一节中, 采用摄动法和多变量级数求和技术<sup>[7,11]</sup> 求解方程(6)~(9).

## 2 摄动法

根据速度场和温度场方程(6)~(9)的非线性特点,无量纲的非 Newton 流参数  $\gamma$  和 Frank-Kamenetskii 参数  $\lambda$  采用幂级数展开式,即

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \gamma^i, \quad \theta = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \lambda^i. \quad (10)$$

将方程(10)中的级数解代入方程(6)~(9),搜集  $\gamma$  和  $\lambda$  同次幂的系数,得到并迭代求解级数解的系数方程.速度场和温度场解给出如下:

$$\begin{aligned} W(y) = & -\frac{1}{2}y(y-2) + \frac{1}{2}y(y-2)(y^2-2y+2)\gamma - \\ & 2y(y-2)(y^2-3y+3)(y^2-y+1)\gamma^2 + \\ & 12y(y-2)(y^2-2y+2)(y^4-4y^3+6y^2-4y+2)\gamma^3 + O(\gamma^4), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \theta(y) = & -\frac{1}{60060}y(y-2)(30030+10010m+8352960m\gamma^4\gamma^5-4435200m\gamma^3\gamma^5+ \\ & 16016m\gamma^3\gamma+1601600m\gamma^2\gamma^3+1700160m\gamma^2\gamma^5-2766400m\gamma^2\gamma^4- \\ & 2562560m\gamma^3\gamma^3+5824000m\gamma^3\gamma^4+24024ym\gamma-205920m\gamma^4\gamma^2+ \\ & 9143680m\gamma^5\gamma^4-11679360m\gamma^5\gamma^5+3727360m\gamma^7\gamma^4+291200m\gamma^9\gamma^4- \\ & 1985984m\gamma^5\gamma^3+77220m\gamma^5\gamma^2-283140m\gamma^2\gamma^2+928928m\gamma^6\gamma^3+ \\ & 12281280m\gamma^6\gamma^5-6959680m\gamma^6\gamma^4-9715200m\gamma^7\gamma^5-12870m\gamma^6\gamma^2+ \\ & 32032m\gamma^8\gamma^3-256256m\gamma^7\gamma^3+5712960m\gamma^8\gamma^5-2428800m\gamma^9\gamma^5- \\ & 1339520m\gamma^8\gamma^4-28028m\gamma^2\gamma+154440ym\gamma^2-640640ym\gamma^3+873600ym\gamma^4+ \\ & 10560m\gamma^5y^{12}-29120m\gamma^{10}\gamma^4+707520m\gamma^{10}\gamma^5-126720m\gamma^{11}\gamma^5- \\ & 443520ym\gamma^5+308880m\gamma^3\gamma^2+2754752m\gamma^4\gamma^3-4004m\gamma^4\gamma- \\ & 8619520m\gamma^4\gamma^4-174720m\gamma^4-51480m\gamma^2+160160m\gamma^3+ \\ & 73920m\gamma^5-12012m\gamma-10010ym+5005m\gamma^2)\lambda+O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (12)$$

注意到,如果令方程(11)和(12)中材料参数  $\gamma = 0$ ,则得到文献[12]中经典的 Newton 流问题的解.方程(11)中得到的级数解与文献[2]中非 Newton 流问题的结果吻合得很好.利用计算机符号代数包(MAPLE),可以得到方程(11)和(12)中解级数的前几项.众所周知,这些幂级数解对很小的参数值是十分有效的.然而,使用 Hermite- Pad 逼近技术,可以提高解级数在超出小参数值范围时的可用性,如下一节所述.本问题中所关心的物理量是表面摩擦因数( $C_f$ )和 Nusselt 数( $Nu$ ),分别定义如下:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho g \sin \phi} = \frac{dW(0)}{dy}, \quad Nu = \frac{\mathcal{E}q_w}{kRT_0^2} = -\frac{d\theta(0)}{dy}, \quad (13)$$

其中,  $\tau_w = \mu du/dy$  和  $q_w = -k dT/dy$  分别表示斜板表面( $y = 0$ )的剪应力和热流量.

## 3 热临界的研究

从应用观点来看,热临界出现确定,或者某些参数值时非线性问题不存在稳态解的确定是非常重要的.热临界是所研究材料热稳定性的特征,并表示系统开始出现热不稳定性.基于以上假定,当  $\lambda \rightarrow \infty$  时的部分和<sup>[13]</sup>为

$$U_{N-1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \lambda^i = U(\lambda) + O(\lambda^N), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (14)$$

值得注意的是, 方程(14)可以用所研究问题解的任意输出逼近(例如, 表面摩擦因数( $C_f$ )和壁面热通量( $Nu$ )), 因为在给定的小参数问题中, 任何量都可以用 Taylor 级数展开. 假设  $U(\lambda)$  为非线性问题意义上  $\lambda$  代数函数的一个局部表示, 寻求如下形式的表达式:

$$F_d(\lambda, U_{N-1}) = A_{0N}(\lambda) + A_{1N}^d(\lambda)U^{(1)} + A_{2N}^d(\lambda)U^{(2)} + A_{3N}^d(\lambda)U^{(3)}, \quad (15)$$

则

$$A_{0N}(\lambda) = 1, \quad A_{iN}^d(\lambda) = \sum_{j=1}^{d+i} b_{ij} \lambda^{-1}, \quad (16)$$

且

$$\text{当 } \lambda \rightarrow 0 \text{ 时, } F_d(\lambda, U) = O(\lambda^{N+1}), \quad (17)$$

其中,  $d \geq 1, i = 1, 2, 3$ . 条件(17)对  $F_d$  进行了规范化, 确保级数  $A_{iN}^d$  的阶次随着  $i$  和  $d$  的增大而增大. 因而, 方程(16)中有  $3(2+d)$  个未定系数  $b_{ij}$ . 方程(17)中的必要条件将归结为  $F_d$  的  $N$  个未知系数的线性方程组问题. 基础矩阵的记录数仅与  $N$  个给定系数  $a_i$  相关. 至此, 得到

$$N = 3(2+d), \quad (18)$$

因此, 方程的个数等于未知量的个数. 方程(18)给出了选择  $d$  值的条件,  $d$  值依赖于可用到的部分和的  $N$  个系数, 注意到这一点是非常重要的. 方程(17)是一个新的特殊的 Hermite-Pad 逼近形式, 本文研究中考虑了代数和微分两种近似形式<sup>[7, 11]</sup>. 例如, 替换

$$U^{(1)} = U, \quad U^{(2)} = U^2, \quad U^{(3)} = U^3 \quad (19)$$

到方程(17), 便得到三阶 Pad 近似. 得到除了描述原级数之外的基础问题的解分支. 同样地, 将

$$U^{(1)} = U, \quad U^{(2)} = DU, \quad U^{(3)} = D^2U, \quad (20)$$

代入方程(17), 得到二阶微分近似(其中  $D$  为微分算子,  $D = d/d\lambda$ ). 因此, 得到逼近法中首项多项式系数  $A_{3N}^{(d)}$  的零点<sup>[7, 11, 13]</sup>, 从而确定流场中显著的奇异性. 由文献[14]可知, 微分方程解的任意输出项占优的性质可以由  $\lambda$  和  $G$  表示:

$$U(\lambda) \approx \begin{cases} G(\lambda_c - \lambda)^\alpha, & \alpha \neq 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda \rightarrow \lambda_c, \\ G(\lambda_c - \lambda)^\alpha \ln |\lambda_c - \lambda|, & \alpha = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (21)$$

其中,  $G$  为常数,  $\lambda_c$  是指数为  $\alpha$  的临界点. 如果我们假设具有如方程(21)的代数形式的奇异性, 则使用 Newton 多边形运算法则, 可以容易地找到临界指数  $\alpha_N$ . 将方程(21)代入方程(17), 得到

$$\alpha_N = 1 - \frac{A_{2N}(\lambda_{cN})}{DA_{3N}(\lambda_{cN})}. \quad (22)$$

但是, 在代数方程中, 唯一的奇异性是结构上稳定的简单转向点, 因此几乎总是都能够得到  $\alpha_N = 1/2$ .

## 4 结果及讨论

利用 MAPLE 实现上述 Hermite-Pad 逼近过程, 可以得到解级数的前 19 项, 结果在表 1 和表 2 中给出.

表 1 速度场中计算过程的快速收敛与得到的分岔点

| $d$ | $N$ | $C_f$             | $\gamma_c$          | $\alpha_{cN}$ |
|-----|-----|-------------------|---------------------|---------------|
| 1   | 9   | 1.500 191 067 753 | - 0.074 077 212 118 | 0.499 987 0   |
| 2   | 12  | 1.500 000 000 000 | - 0.074 074 074 074 | 0.500 000 0   |
| 3   | 15  | 1.500 000 000 000 | - 0.074 074 074 074 | 0.500 000 0   |
| 4   | 18  | 1.500 000 000 000 | - 0.074 074 074 074 | 0.500 000 0   |

表 2 对不同参数值计算得到的热临界值

| $m$ | $\gamma$ | $Nu(\epsilon = 0)$ | $\lambda_c(\epsilon = 0)$ | $Nu(\epsilon = 0.1)$ | $\lambda_c(\epsilon = 0.1)$ | $\alpha_{cN}$ |
|-----|----------|--------------------|---------------------------|----------------------|-----------------------------|---------------|
| 1.0 | 0.0      | 2.261 183 014      | 0.822 953 793 64          | 2.880 649 155 3      | 0.933 010 858               | 0.5           |
| 1.0 | 0.1      | 2.220 383 775      | 0.828 179 570 25          | 2.830 054 975 8      | 0.938 233 454               | 0.5           |
| 1.0 | 0.2      | 2.171 410 516      | 0.834 613 844 62          | 2.769 335 301 5      | 0.944 659 687               | 0.5           |
| 1.0 | 0.3      | 2.125 981 548      | 0.841 182 874 76          | 2.712 678 512 6      | 0.951 214 694               | 0.5           |

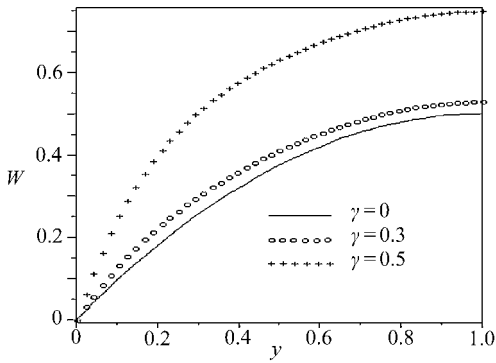


图 2 速度分布图

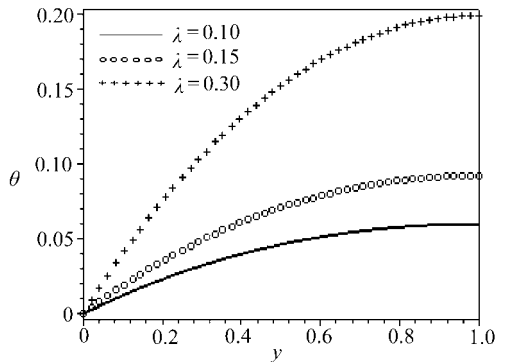


图 3  $m = 1, \epsilon = 0$  和  $\gamma = 0.1$  时的温度分布图

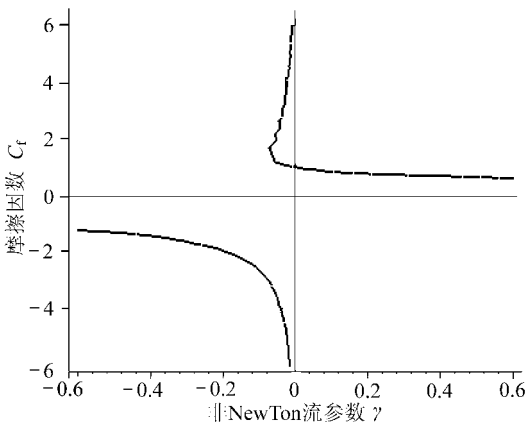


图 4 三阶流体  $(\gamma, C_f)$  平面分岔图

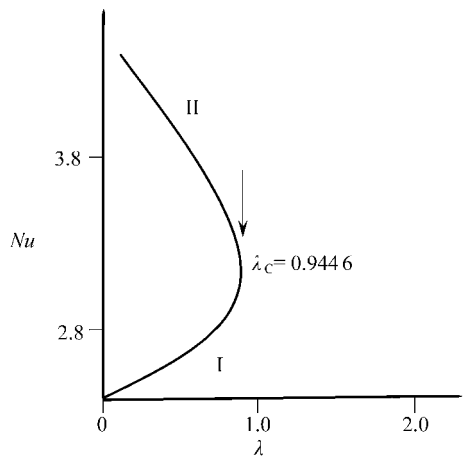


图 5  $(\lambda, Nu)$  平面近似分岔图的一支

$(m = 1, \gamma = 0.2, \epsilon = 0.1)$

表 1 结果证明, 占支配的奇异性  $\gamma_c$  (即材料参数) 快速收敛, 且其对应的临界指数  $\alpha_c$  随着近似系列系数数量逐渐增大. 流场中的分岔点 (即转向点) 在  $(\gamma_c, C_f) = (-2/27, 3/2)$  处出现.

表2中,可以发现热临界值( $\lambda_c$ )的大小随着材料参数 $\gamma$ 值的增大而增大.这意味着,材料参数 $\gamma$ 值增大有助于提高反应的三阶流体的热稳定性.

流体速度分布与 $\gamma$ 值增大关系如图2所示.可以发现,横向流速是逐渐增大的,最大值出现在自由表面,且流速值随着材料参数 $\gamma$ 值增大而进一步增大.此外,当材料参数 $\gamma$ 值减小到0时,其解为Newton流时的解,该结果与Siddiqui等<sup>[2]</sup>最近的研究结果相一致.

$m = 1, \varepsilon = 0$ 时,法线方向流体温度曲线的典型变化如图3所示.流体温度在斜板表面上最小,而在绝热的自由流体表面上达到最大.由于Arrhenius动力学引起Frank-Kamenetskii参数( $\lambda$ )的增大,促使流体温度的进一步增大.图4显示了临界点,即转折点出现在 $(\gamma_c, C_f) = (-2/27, 3/2)$ 的流场中.从应用观点看来,图4中材料参数 $\gamma$ 正半轴上的解分支是真实的物理解,它还揭示了壁面剪切应力随着材料参数 $\lambda$ 值的增大而减小.

对 $(\lambda, Nu)$ 平面中 $\gamma > 0$ ,分岔图的一支如图5所示,它描述了壁面热流量( $Nu$ )随Frank-Kamenetskii参数( $\lambda$ )的变化.当 $\lambda$ 值很小( $\lambda \rightarrow 0$ )时,解是唯一的.但是,对于每个 $0 \leq \varepsilon \leq 0.1$ ,存在一个临界值(转向点) $\lambda_c$ ,使得 $0 < \lambda < \lambda_c$ 范围内有2个解分支(标记为I和II).此外,解分支I表明,倾斜板表面上的热通量随着流动系统中放热化学动力学(通过 $\lambda$ 增大表示)的增大而增大.从应用角度来看也是非常现实的;但是,解分支II的出现,是由于控制热边界层方程(方程(2))中非线性的Arrhenius动力学之故.当 $\lambda_c < \lambda$ 时,系统没有真实解,显现标志热量散逸的经典形态.值得注意的是, $\lambda_c$ 值随着流体活化能( $\varepsilon = 0.1$ )的减小而增大,因此,防止了热量散逸的早期发展,并且提高了热稳定<sup>[9]</sup>.

从应用观点看来,确定流体系统中的热临界条件( $\lambda_c$ )非常重要,该条件最初就是流体系统中热量的散逸或触发<sup>[10]</sup>.热临界分析的主要目的是,预测临界的或不安全的流动条件,以避免它们发生.最后,本研究分析显示,在工业生产过程中反应的非Newton流体的热稳定性优于Newton流体.

## 5 结 论

本文采用一种特殊形式的Hermite-Pad近似技术,在一个有着绝热自由表面的倾斜发热板上,研究一个三阶流体薄膜流动的流体动力学和热产生问题.准确地求得了热临界条件以及不同的解分支,发现材料参数的增大有助于流体热稳定性的提高.分析表明,工业生产过程中,反应的三阶非Newton流体的热稳定性好于Newton流体.最后,上述系列求和的方法,在科学研究和工程实践中,也可以用作研究其它带参数的、非线性边值问题的有效工具.

致谢 作者衷心感谢审稿人的宝贵意见.

## [参 考 文 献]

- [1] Szeri A Z, Rajagopal K R. Flow of a non-Newtonian fluid between heated parallel plates[J]. Internat J Non-Linear Mech, 1985, 20(2): 91-101.
- [2] Siddiqui A M, Mahomood R, Ghori Q K. Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 35(1): 140-147.
- [3] Cebeci T, Bradshaw P. Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer [M]. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [4] Makinde O D. Irreversibility analysis for gravity driven non-Newtonian liquid film along an inclined

- isothermal plate [J]. *Physica Scripta*, 2006, **74**: 642-645.
- [5] Weinstein S J, Ruschak K J, Ng K C. Developing flow of a power-law liquid film on an inclined plane [J]. *Phys Fluids*, 2003, **15**(10): 2973-2986.
- [6] Hayat T, Farooq M Asif, Javed T, et al. Partial slips effects on the flow and heat transfer characteristics in a third grade fluid [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(2): 745-755.
- [7] Makinde O D. Laminar falling liquid film with variable viscosity along an inclined heated plate [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**(1): 80-88.
- [8] Massoudi M, Christie I. Effects of variable viscosity and viscous dissipation on the flow of a third grade fluid in a pipe [J]. *Internat J Non-Linear Mech*, 1995, **30**(5): 687-699.
- [9] Kamenetskii D A Frank. *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics* [M]. New York: Plenum Press, 1969.
- [10] Bowes P C. *Self-Heating: Evaluating and Controlling the Hazard* [M]. Amsterdam: Elsevier, 1984.
- [11] Hunter D L, Baker Jr G A. Methods of series analysis III: integral approximant methods [J]. *Phys Rev B*, 1979, **19**(7): 3808-3821.
- [12] Landau L D, Lifshitz E M. *Fluid Mechanics* [M]. 2nd Ed. New York: Pergamon Press, 1989.
- [13] Bender C, Orszag S A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* [M]. New York McGraw-Hill, 1978.
- [14] Guttman A J. Asymptotic analysis of power-series expansions [A]. In: Domb C, Lebowitz J K, Eds. *Phase Transitions and Critical Phenomena* [C]. New York: Academic Press, 1989, 1-234.

## Thermal Criticality for a Reactive Gravity Driven Thin Film Flow of a Third Grade Fluid With Adiabatic Free Surface Down an Inclined Plane

Oluwole Daniel Makinde

(Faculty of Engineering, Cape Peninsula University of Technology, P. O. Box 1906, Bellville 7535, South Africa)

**Abstract:** The thermal criticality for a reactive gravity driven thin film flow of a third grade fluid with adiabatic free surface down an inclined isothermal plane is investigated. It was assumed that the reaction is exothermic under Arrhenius kinetics, neglecting the consumption of the material. The governing non-linear equations for conservation of momentum and energy were obtained and solved using a new computational approach based on a special type of Hermite-Padé approximation technique implemented on MAPLE. This semi-numerical scheme offers some advantages over solutions obtained by using traditional methods such as finite differences, spectral method, shooting method, etc. It reveals the analytical structure of the solution function and the important properties of overall flow structure including velocity field, temperature field, thermal criticality and bifurcations were discussed.

**Key words:** isothermal inclined plate; third grade fluid; Hermite-Padé approximants; thermal criticality