文章编号: 1000-0887(2009) 03-0301-08

广义变分不等式的广义间隙函数和误差界*

胡艳红[1,2], 宋 文[1,2]

(1. 东北师范大学 数学系, 长春 130024;
2. 哈尔滨师范大学 数学系, 哈尔滨 150080)

(协平推荐)

摘要: 针对两类广义变分不等式, 分别定义了几族广义间隙函数, 并研究其性质. 利用这些广义间隙函数, 在所研究变分不等式问题的目标函数 F 关于解是 g- 强单调的条件下, 得到了误差界估计, 这里不需要假设 F 是连续可微或局部 Lipschitz 的.

关 键 词: 变分不等式; 间隙函数; 误差界
中图分类号: O221.2; O29 文献标识码: A

引 言

设 H 是一个实 Hilbert 空间, C 是 H 的闭凸子集, $F: H \to H$ 是向量值函数. 变分不等式问题 VIP(F, C) 是指寻找一点 $x \in C$, 使得

$$\langle F(x), y - x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C,$$

这里, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 代表 H 中的内积. 所谓的间隙函数是指定义在 H 或者其子集上的实值函数, 它在给定集合上的全局最小点集就是 VIP(F, C) 的解集. Fukushima[1] 定义正则间隙函数 $g_\alpha: H \to \mathbf{R}$ 为

$$g_\alpha(x) = \max_{y\in C}\left\{\langle F(x), x - y\rangle - (\alpha/2)\,\|x - y\|^2\right\},$$

这里, α 是一个正参数. 他证明了 x 是 VIP(F, C) 的解的充要条件是 x 为函数 g_α 在集合 C 上的最小点, 并且 $g_\alpha(x) = 0$. 这样函数 g_α 就可以看作是 VIP(F, C) 的一个等价的有约束最优化变形.

Wu 等[2] 扩展了正则间隙函数的概念. 他们定义正则间隙函数 $G_\alpha: H \to \mathbf{R}$ 为

$$G_\alpha(x) = \max_{y\in C}\Psi_\alpha(x, y) = \max_{y\in C}\left\{\langle F(x), x - y\rangle - \alpha\phi(x, y)\right\},$$

这里, $\alpha > 0$, 函数 $\phi: H \times H \to \mathbf{R}$ 满足下列条件:

(C1) ϕ 在 $H \times H$ 上连续可微;

(C2) ϕ 在 $H \times H$ 上非负;

(C3) $\phi(x, \cdot)$ 关于 x 是一致强凸的: 存在常数 $\lambda > 0$, 对任意的 $x \in H$, 满足

$$\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2) \geqslant \langle \nabla_2\phi(x, y_2), y_1 - y_2\rangle + \lambda\,\|y_1 - y_2\|^2, \qquad \forall y_1, y_2 \in H,$$

---

* 收稿日期: 2008-08-18; 修订日期: 2008-12-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671050); 黑龙江省自然科学基金资助项目(A200607)
作者简介: 胡艳红(1978—), 女, 山东人, 讲师, 博士生(E-mail: yhhumaths@yahoo.com.cn);
宋文, 教授(联系人. Tel: +86-451-88060562; E-mail: wsong@hrbnu.edu.cn).

这里, $\nabla_2\phi$ 是函数 ϕ 关于第 2 个变量的偏导数;

(C4) $\phi(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

Wu 等[2] 证明函数 G_α 也可看作是 VIP(F, C) 的等价有约束最优化变形. 1997 年, Fukushima 新定义了一个函数 $H_{\alpha\beta}: H \to \mathbf{R}$, $0 < \alpha < \beta$, 证明它是 VIP(F, C) 的等价无约束最优化变形[3]. 由于该函数是由两个正则间隙函数的差定义而成的, 因此, 称其为 D- 间隙函数.

文献[4]中, 在 F 是连续可微的但不必是 Lipschitz 连续的条件下, Huang 和 Ng 证明了正则间隙函数 G_α 可为 VIP(F, C) 提供误差界. 最近, 在 F 是局部 Lipschitz 连续的条件下, Tan[5] 通过研究正则间隙函数的 Clarke-Rockafellar 方向导数, 证明了正则间隙函数可以提供分数指数误差界.

2003 年, Solodov[6] 研究了一类非光滑的广义变分不等式. 给定映射 $F, g: H \to H$ 和函数 $f: H \to (-\infty, +\infty]$, 其中, f 是一个有效域闭的真凸函数, 广义变分不等式问题 GVIP(F, g, f) 是指寻找一点 $x \in H$, 使得

$$\langle F(x), y - g(x)\rangle + f(y) - f(g(x)) \geqslant 0, \qquad \forall y \in H. \tag{1}$$

显然 VIP(F, C) 是 GVIP(F, g, f) 的特殊情形. 针对 GVIP(F, g, f), Solodov 建立了一些间隙函数, 并且通过这些函数得到了误差界.

2006 年, Noor[7] 研究了另一类广义变分不等式. 令 $F, g: H \to H$ 是非线性算子, C 是 H 中的闭凸子集. 广义变分不等式问题 GVIP(F, g) 是指, 寻找一点 $x \in H$, $g(x) \in C$, 满足

$$\langle F(x), g(y) - g(x)\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in H, g(y) \in C. \tag{2}$$

当 $g = I$ 时, GVIP(F, g) 退化成标准的变分不等式 VIP(F, C). Noor 对 GVIP(F, g) 建立了一些间隙函数, 并利用和文献[6]类似的方法得到了误差界.

在文献[6-7]中, 他们在建立间隙函数时使用的都是特殊函数 $\phi(x, y) = \|x - y\|^2/2$. 本文通过满足条件(C1)至(C4)的函数 $\phi(x, y)$ 来定义广义变分问题 GVIP(F, g, f) 和 GVIP(F, g) 的广义间隙函数, 研究它们的性质并应用其得到误差界.

1 预备知识

定义 1 称 F 在给定点 $x \in H$ 是具有模 $\mu(>0)$ 的 g- 强单调函数, 是指

$$\langle F(x) - F(x), g(x) - g(x)\rangle \geqslant \mu\|x - x\|^2, \qquad \forall x \in H.$$

若 F 关于 GVIP(F, g, f) 或者 GVIP(F, g) 的解是 g- 强单调的, 则解是唯一的.

定义 2 称 F 在给定点 $x \in H$ 是具有模 $L(>0)$ 的 Lipschitz 连续函数, 是指

$$\|F(x) - F(x)\| \leqslant L\|x - x\|, \qquad \forall x \in H.$$

引理 1(见文献[3]引理 2.1) 如果函数 ϕ 满足条件(C1)至(C4), 那么 $\nabla_2\phi(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

引理 2(见文献[8]引理 2.1) 如果函数 ϕ 满足条件(C3), 那么对任意的 $y_1, y_2 \in H$, 有

$$\langle \nabla_2\phi(x, y_1) - \nabla_2\phi(x, y_2), y_1 - y_2\rangle \geqslant 2\lambda\|y_1 - y_2\|^2,$$

即 $\nabla_2\phi(x, \cdot)$ 在 H 上是具有模 2λ 强单调的, 这里 λ 是条件(C3)中给定的常数.

有时, 也要求函数 ϕ 满足下面的条件:

(C5) $\nabla_2\phi(x, \cdot)$ 是一致 Lipschitz 连续的: 存在常数 $L' > 0$, 使得对任意的 $x \in H$, 有

$$\|\nabla_2\phi(x, y_1) - \nabla_2\phi(x, y_2)\| \leqslant L'\|y_1 - y_2\|, \qquad \forall y_1, y_2 \in H.$$

由引理 2 可知, 如果函数 ϕ 同时满足条件(C3)和(C5), 那么

$$2\lambda\|y_1-y_2\|^2\leqslant L'\|y_1-y_2\|^2,\qquad \forall y_1,y_2\in H.$$

因此, $2\lambda\leqslant L'$.

引理 3(见文献[4]引理2.1) 设函数 ϕ 满足条件(C1)至(C5), λ, L' 是相对应的系数. 则

$$\lambda\|x-y\|^2\leqslant\phi(x,y)\leqslant(L'-\lambda)\|x-y\|^2,\qquad \forall x,y\in H.$$

2 GVIP(F,g,f) 的广义间隙函数

本节研究广义变分不等式(1). 本文的剩余部分始终假定函数 ϕ 满足条件(C3).

首先, 对任意的 $x\in H$, 定义广义正则间隙函数如下:

$$\begin{aligned}G_\alpha(x)&=\max_{y\in H}\Psi_\alpha(x,y)=\\&\max_{y\in H}\left\{\langle F(x),g(x)-y\rangle+f(g(x))-f(y)-\alpha\phi(g(x),y)\right\}=\\&\langle F(x),g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle+f(g(x))-f(\pi_\alpha(x))-\alpha\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),\end{aligned}$$

这里, $\pi_\alpha(x)$ 代表 $-\Psi_\alpha(x,\cdot)$ 在 H 上的唯一最小点.

引理 4 如果函数 ϕ 满足条件(C1)至(C4), 那么 x 是GVIP(F,g,f) 的解当且仅当对任意的 $\alpha>0$, $g(x)=\pi_\alpha(x)$.

证明 对任意的 $x\in H$, 由 $\pi_\alpha(x)$ 是凸函数 $-\Psi_\alpha(x,\cdot)$ 在 H 上的最小点可知

$$0\in\partial(-\Psi_\alpha(x,\pi_\alpha(x)))=F(x)+\partial f(\pi_\alpha(x))+\alpha\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)).$$

因此

$$-F(x)-\alpha\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x))\in\partial f(\pi_\alpha(x)).$$

由次梯度的定义可得

$$f(y)\geqslant f(\pi_\alpha(x))-\langle F(x)+\alpha\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),y-\pi_\alpha(x)\rangle,\qquad \forall y\in H$$

即

$$\begin{aligned}&\langle F(x),y-\pi_\alpha(x)\rangle+f(y)-f(\pi_\alpha(x))\geqslant\\&\quad\alpha\langle-\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),y-\pi_\alpha(x)\rangle,\qquad\forall y\in H.\end{aligned}\tag{3}$$

如果 $g(x)=\pi_\alpha(x)$, 那么由引理1可知 x 是GVIP(F,g,f) 的解.

反过来, 如果 x 是GVIP(F,g,f) 的解, 那么在(1)式中取 $y=\pi_\alpha(x)$, 可得

$$\langle F(x),\pi_\alpha(x)-g(x)\rangle+f(\pi_\alpha(x))-f(g(x))\geqslant0.$$

另一方面, 由于 $g(x)\in H$, 从(3)式可得

$$\begin{aligned}&\langle F(x),g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle+f(g(x))-f(\pi_\alpha(x))\geqslant\\&\quad\alpha\langle-\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle.\end{aligned}$$

把后两个不等式相加有

$$\langle\alpha\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle\geqslant0.$$

而由 $\phi(g(x),\cdot)$ 的强凸性和条件(C2)和(C4)可得

$$\begin{aligned}&\langle\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle+\lambda\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|^2\leqslant\\&\quad\phi(g(x),g(x))-\phi(g(x),\pi_\alpha(x))\leqslant0,\end{aligned}$$

后两个不等式说明 $g(x)=\pi_\alpha(x)$. □

定理 1 假设函数 ϕ 满足条件(C1)至(C5), F 在GVIP(F,g,f) 的解 x 处是模为 $\mu>0$ 的 g-强单调函数, F, g 在 x 点是具有模 $L, L''>0$ 的Lipschitz 连续函数, 那么

$$\|x-x\|\leqslant\frac{L+\alpha L'L''}{\mu}\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|,\qquad\forall x\in H,\ \alpha>0.$$

证明 由 x 是 GVIP(F,g,f) 的解及对任意的 $x\in H$, $\pi_\alpha(x)\in H$, 有

$$\langle F(x),\ \pi_\alpha(x)-g(x)\rangle+f(\pi_\alpha(x))-f(g(x))\geqslant 0,\qquad \forall x\in H.$$

另一方面, 在(3) 式中令 $y=g(x)$ 可得

$$\langle F(x),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle+f(g(x))-f(\pi_\alpha(x))\geqslant$$
$$\alpha\langle-\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle.$$

把这两个式子相加, 有

$$\langle F(x)-F(x),\ \pi_\alpha(x)-g(x)\rangle\leqslant\langle\alpha\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle. \tag{4}$$

由引理 1、引理 2 和(C5) 可知

$$\begin{aligned}
&\alpha\langle\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle=\\
&\quad\alpha\langle\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x))-\nabla_2\phi(g(x),g(x)),\ g(x)-g(x)\rangle-\\
&\quad\alpha\langle\nabla_2\phi(g(x),g(x))-\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle\leqslant\\
&\quad\alpha L'\,\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|\cdot\|g(x)-g(x)\|-2\alpha\lambda\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|^2\leqslant\\
&\quad\alpha L'L''\,\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|\cdot\|x-x\|.
\end{aligned}\tag{5}$$

由定义 1、(4) 式、(5) 式可得

$$\begin{aligned}
&\mu\|x-x\|^2\leqslant\langle F(x)-F(x),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle+\langle F(x)-F(x),\ \pi_\alpha(x)-g(x)\rangle\leqslant\\
&\quad L\,\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|\cdot\|x-x\|+\alpha L'L''\,\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|\cdot\|x-x\|\leqslant\\
&\quad(L+\alpha L'L'')\,\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|\cdot\|x-x\|.
\end{aligned}\tag{6}$$

因而结论成立. □

引理 5 如果函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C4), 那么下面事实成立:

$$G_\alpha(x)\geqslant\alpha\lambda\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|^2,\qquad\forall x\in H,\ \alpha>0.$$

特别的, x 是 GVIP(F,g,f) 的解当且仅当 $G_\alpha(x)=0$.

证明 对任意的 $x\in H$, $\alpha>0$, 在(3) 式中取 $y=g(x)$ 有

$$\langle F(x),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle+f(g(x))-f(\pi_\alpha(x))\geqslant$$
$$\alpha\langle-\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle.$$

因此, 由(C3) 和(C4) 可得

$$\begin{aligned}
&G_\alpha(x)\geqslant\langle-\alpha\nabla_2\phi(g(x),\pi_\alpha(x)),\ g(x)-\pi_\alpha(x)\rangle-\alpha\phi(g(x),\pi_\alpha(x))\geqslant\\
&\quad\alpha(-\phi(g(x),g(x))+\lambda\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|^2)=\alpha\lambda\|g(x)-\pi_\alpha(x)\|^2.
\end{aligned}$$

由引理 4 第 2 个结论显然成立. □

由定理 1 和引理 5 易得下面的误差界.

定理 2 假设函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C5), F 在 GVIP(F,g,f) 的解 x 处是模为 $\mu>0$ 的 g- 强单调函数, F, g 在点 x 是模分别为 L, $L''>0$ 的 Lipschitz 连续函数, 那么 $\sqrt{G_\alpha}$ 为 GVIP(F,g,f) 提供全局误差界, 即

$$\|x-x\|\leqslant\frac{L+\alpha L'L''}{\mu\sqrt{\alpha\lambda}}\sqrt{G_\alpha(x)},\qquad\forall x\in H.$$

事实上, 即使去掉 F 的 Lipschitz 连续性, 我们也能得到 GVIP(F,g,f) 的误差界.

定理 3 假设函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C5), F 在 GVIP(F,g,f) 的解 x 处是模为 $\mu>0$ 的 g- 强单调函数, g 在点 x 是模为 $L''>0$ 的 Lipschitz 连续函数, 那么 $\sqrt{G_\alpha}$ 为 GVIP(F,g,f) 提供全局误差界, 即

$$\|x-x\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\mu+\alpha L''^2(\lambda-L')}}\sqrt{G_\alpha(x)},\qquad\forall x\in H,\ 0<\alpha<\frac{\mu}{(L'-\lambda)L''^2}.$$

证明　固定任意的 $x \in H$ 和 $\alpha > 0$. 由 x 是 GVIP(F, g, f) 的解, 从 $G_\alpha(x)$ 的定义和 F 的 g- 强单调性可知

$$G_\alpha(x) \geqslant \langle F(x), g(x) - g(x)\rangle + f(g(x)) - f(g(x)) - \alpha\phi(g(x), g(x)) \geqslant$$
$$\langle F(x), g(x) - g(x)\rangle + \mu\|x - x\|^2 + f(g(x)) - f(g(x)) - \alpha\phi(g(x), g(x)) \geqslant$$
$$\mu\|x - x\|^2 - \alpha\phi(g(x), g(x)).$$

而且, 由引理 3 和 g 的 Lipschitz 性质, 我们知道

$$-\phi(g(x), g(x)) \geqslant (\lambda - L') \|g(x) - g(x)\|^2 \geqslant L''^2(\lambda - L')\|x - x\|^2. \tag{7}$$

因此, 定理结论成立. □

尽管定理 2 和定理 3 都利用间隙函数 G_α 为 GVIP(F, g, f) 提供误差界, 但是它们的误差界系数无法比较.

现在, 我们考虑 GVIP(F, g, f) 的广义 D- 间隙函数. 定义如下:

$$H_{\alpha\beta}(x) = G_\alpha(x) - G_\beta(x) = \max_{y\in H} \Psi_\alpha(x, y) - \max_{y\in H} \Psi_\beta(x, y) =$$
$$\langle F(x), \pi_\beta(x) - \pi_\alpha(x)\rangle + f(\pi_\beta(x)) - f(\pi_\alpha(x)) +$$
$$\beta\phi(g(x), \pi_\beta(x)) - \alpha\phi(g(x), \pi_\alpha(x)),$$

这里, α 和 β 是满足 $0 < \alpha < \beta$ 的任意参数, $\pi_\alpha(x)$ 和 $\pi_\beta(x)$ 分别代表 $-\Psi_\alpha(x, \cdot)$ 和 $-\Psi_\beta(x, \cdot)$ 在 H 上的唯一最小点.

命题 1　对任意的 $x \in H$, 下式始终成立:

$$(\beta - \alpha)\phi(g(x), \pi_\beta(x)) \leqslant H_{\alpha\beta}(x) \leqslant (\beta - \alpha)\phi(g(x), \pi_\alpha(x)).$$

证明　由函数 $H_{\alpha\beta}$ 的定义

$$H_{\alpha\beta}(x) \geqslant \langle F(x), g(x) - \pi_\beta(x)\rangle - f(\pi_\beta(x)) - \alpha\phi(g(x), \pi_\beta(x)) -$$
$$\langle F(x), g(x) - \pi_\beta(x)\rangle + f(\pi_\beta(x)) + \beta\phi(g(x), \pi_\beta(x)) \geqslant$$
$$(\beta - \alpha)\phi(g(x), \pi_\beta(x)).$$

运用同样的方法可得不等式的另外一部分. □

命题 2　如果函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C4), 那么 $H_{\alpha\beta}$ 在 H 上是非负的. 并且 x 是 GVIP(F, g, f) 的解当且仅当 $H_{\alpha\beta}(x) = 0$.

证明　由命题 1 和条件(C2) 立刻知 $H_{\alpha\beta}$ 在 H 上是非负的. 接下来证后一个结论. 假定 $H_{\alpha\beta}(x) = 0$. 那么由命题 1, 条件(C2) 和(C4) 可知 $g(x) = \pi_\beta(x)$. 进而由引理 4 可知 x 是 GVIP(F, g, f) 的解. 用类似的方法可证明另一部分成立. □

定理 4　假设函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C5), F 在 GVIP(F, g, f) 的解 x 处是模为 $\mu > 0$ 的 g- 强单调函数, 并且 F, g 在 x 点是模分别为 L, $L'' > 0$ 的 Lipschitz 连续函数, 那么 $\sqrt{H_{\alpha\beta}}$ 为 GVIP(F, g, f) 提供全局误差界, 即

$$\|x - x\| \leqslant \frac{L + \beta L' L''}{\mu} \frac{1}{\sqrt{\lambda(\beta - \alpha)}} \sqrt{H_{\alpha\beta}(x)}, \qquad \forall x \in H.$$

证明　由命题 1, 引理 3 和定理 1, 有

$$H_{\alpha\beta}(x) \geqslant (\beta - \alpha)\phi(g(x), \pi_\beta(x)) \geqslant (\beta - \alpha)\lambda\|g(x) - \pi_\beta(x)\|^2 \geqslant$$
$$\lambda(\beta - \alpha)\left(\frac{\mu}{L + \beta L' L''}\right)^2 \|x - x\|^2.$$

因此, 结论成立. □

这部分的结果与文献[6] 的相应的结果类似, 本文的定理 1、定理 3、定理 4 中的系数 α, β, L', L'' 和 λ 分别与文献[6] 中定理 2、定理 5、定理 7 中的系数 $1/\alpha$, $1/\beta$, 1, L 和 1/2 相对应, 但不

能直接从文献[6]中结果得到.

3　GVIP(F, g) 的广义间隙函数

本节研究广义变分不等式(2).

首先假定 g 是有闭值域的凸算子并且

$$C \subseteq \mathrm{range}(g),\ \mathrm{range}(g) = \{y \in H: y = g(x),\ \exists x \in H\}.$$

对任意的 $x \in H$, $g(x) \in C$, 定义正则间隙函数如下:

$$M_\alpha(x) = \max_{g(y)\in C} \Psi_\alpha(x, g(y)) = \max_{g(y)\in C}\{\langle F(x), g(x) - g(y)\rangle - \alpha\phi(g(x), g(y))\} =$$
$$\langle F(x), g(x) - \pi_\alpha(x)\rangle - \alpha\phi(g(x), \pi_\alpha(x)). \tag{8}$$

这里, $\pi_\alpha(x)$ 代表 $-\Psi_\alpha(x, \cdot)$ 在 C 上的唯一最小点.

引理 6　如果函数 ϕ 满足条件(C1)至(C4), 那么 x 是 GVIP(F, g) 的解当且仅当对任意的 $\alpha > 0$, $g(x) = \pi_\alpha(x)$.

证明　对任意的 $x \in H$, $g(x) \in C$, 由 $\pi_\alpha(x)$ 是 $-\Psi_\alpha(x, \cdot)$ 在 C 上的最小点, 对任意的 $v \in H$, $g(v) \in C$ 一阶最优条件成立:

$$\langle -\nabla_2 \Psi_\alpha(x, \pi_\alpha(x)), g(v) - \pi_\alpha(x)\rangle =$$
$$\langle F(x) + \alpha\nabla_2\phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(v) - \pi_\alpha(x)\rangle \geqslant 0. \tag{9}$$

因为 $g(x) \in C$, 那么

$$\langle F(x) + \alpha\nabla_2\phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x)\rangle \geqslant 0.$$

另一方面, 由于 $\pi_\alpha(x) \in C$, 从(2)式可得

$$\langle F(x), \pi_\alpha(x) - g(x)\rangle \geqslant 0.$$

把后两个不等式加起来, 可得

$$\langle \alpha\nabla_2\phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x)\rangle \geqslant 0. \tag{10}$$

另外, (C2)、(C4)和 $\phi(g(x), \cdot)$ 的强凸性说明

$$\langle \nabla_2\phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x)\rangle + \lambda\| g(x) - \pi_\alpha(x)\|^2 \leqslant$$
$$\phi(g(x), g(x)) - \phi(g(x), \pi_\alpha(x)) \leqslant 0,$$

它和(10)式推出 $g(x) = \pi_\alpha(x)$.

反过来, 从(9)式和引理 1 容易证明 x 是 GVIP(F, g) 的解. □

引理 7　如果函数 ϕ 满足条件(C1)至(C4), 那么下式成立:

$$M_\alpha(x) \geqslant \alpha\lambda\| g(x) - \pi_\alpha(x)\|^2, \qquad \forall x \in H,\ g(x) \in C,\ \alpha > 0.$$

特别的, x 是 GVIP(F, g) 的解当且仅当 $M_\alpha(x) = 0$.

证明　由引理 6 的结论我们只需证明第 1 个结论正确. 固定任意的 $x \in H$, $g(x) \in C$ 和 $\alpha > 0$. 在(9)式中取 $v = x$ 可得

$$\langle F(x), g(x) - \pi_\alpha(x)\rangle \geqslant \langle -\alpha\nabla_2\phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x)\rangle.$$

利用这个结果以及条件(C3)和(C4)有

$$M_\alpha(x) \geqslant \langle -\alpha\nabla_2\phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x)\rangle - \alpha\phi(g(x), \pi_\alpha(x)) \geqslant$$
$$\alpha(-\phi(g(x), g(x)) + \lambda\| g(x) - \pi_\alpha(x)\|^2) = \alpha\lambda\| g(x) - \pi_\alpha(x)\|^2.$$

定理 5　假设函数 ϕ 满足条件(C1)至(C5), F 在 GVIP(F, g) 的解 x 处是模为 $\mu > 0$ 的 g-强单调函数, g 在 x 点是模为 $L'' > 0$ 的 Lipschitz 连续函数, 那么 $\sqrt{M_\alpha}$ 为 GVIP(F, g) 提供全局误差界, 即

$$\| x - x \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu + \alpha L''^2 (\lambda - L')}} \sqrt{M_\alpha(x)},$$

$$\forall x \in H,\ g(x) \in C,\ 0 < \alpha < \frac{\mu}{(L' - \lambda) L''^2}.$$

证明　固定任意的 $x \in H, g(x) \in C, 0 < \alpha < \mu / ((L' - \lambda) L''^2)$. 由(8) 式和 F 的g- 强单调性有

$$\begin{aligned} M_\alpha(x) &\geqslant \langle F(x), g(x) - g(x) \rangle - \alpha \phi(g(x), g(x)) \geqslant \\ &\langle F(x), g(x) - g(x) \rangle + \mu \| x - x \|^2 - \alpha \phi(g(x), g(x)) \geqslant \\ &\mu \| x - x \|^2 - \alpha \phi(g(x), g(x)). \end{aligned}$$

(7) 式说明

$$- \phi(g(x), g(x)) \geqslant L''^2 (\lambda - L') \| x - x \|^2.$$

进而

$$M_\alpha(x) \geqslant (\mu + \alpha L''^2 (\lambda - L')) \| x - x \|^2.$$

因此, 定理结论成立. □

现在考虑 GVIP(F, g) 的广义 D- 间隙函数, 定义如下: 对任意的 $x \in H, g(x) \in C$,

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}(x) &= M_\alpha(x) - M_\beta(x) = \max_{y \in H, g(y) \in C} \Psi_\alpha(x, g(y)) - \max_{y \in H, g(y) \in C} \Psi_\beta(x, g(y)) = \\ &\langle F(x), \pi_\beta(x) - \pi_\alpha(x) \rangle + \beta \phi(g(x), \pi_\beta(x)) - \alpha \phi(g(x), \pi_\alpha(x)), \end{aligned}$$

这里, α 和 β 是满足 $0 < \alpha < \beta$ 的任意参数, $\pi_\alpha(x), \pi_\beta(x)$ 分别代表 $-\Psi_\alpha(x, \cdot), -\Psi_\beta(x, \cdot)$ 在 C 上的唯一最小点.

命题 3　对任意的 $x \in H, g(x) \in C$, 下式成立:

$$(\beta - \alpha) \phi(g(x), \pi_\beta(x)) \leqslant D_{\alpha\beta}(x) \leqslant (\beta - \alpha) \phi(g(x), \pi_\alpha(x)).$$

命题 4　如果函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C4), 那么 $D_{\alpha\beta}$ 在集合 C 上非负 . x 是 GVIP(F, g) 的解当且仅当 $D_{\alpha\beta}(x) = 0$.

命题 3 和命题 4 的证明分别与命题 1 和命题 2 类似, 略.

定理 6　假设函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C5), F 在 GVIP(F, g) 的解 x 处是模为 $\mu > 0$ 的 g- 强单调函数, 并且 F, g 在 x 点是模分别为 $L, L'' > 0$ 的 Lipschitz 连续函数, 那么下式成立:

$$\| x - x \| \leqslant \frac{L + \alpha L' L''}{\mu} \| g(x) - \pi_\alpha(x) \|, \qquad \forall x \in H,\ g(x) \in C,\ \alpha > 0.$$

证明　由 x 是 GVIP(F, g) 的解和 $\pi_\alpha(x) \in C$, 从(2) 式可得

$$\langle F(x), \pi_\alpha(x) - g(x) \rangle \geqslant 0.$$

另一方面, 在(9) 式中取 $v = x$, 可得

$$\langle F(x), g(x) - \pi_\alpha(x) \rangle \geqslant \alpha \langle - \nabla_2 \phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x) \rangle.$$

把后两个不等式相加可得

$$\langle F(x) - F(x) + \alpha \nabla_2 \phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x) \rangle \geqslant 0,$$

因此

$$\langle F(x) - F(x), \pi_\alpha(x) - g(x) \rangle \leqslant \langle \alpha \nabla_2 \phi(g(x), \pi_\alpha(x)), g(x) - \pi_\alpha(x) \rangle.$$

这就得到了(4) 式. 通过与定理 1 剩余部分相同的证明结论成立. □

定理 7　假设函数 ϕ 满足条件(C1) 至(C5), F 在 GVIP(F, g) 的解 x 处是模为 $\mu > 0$ 的 g- 强单调函数, 并且 F, g 在 x 点是模分别为 $L, L'' > 0$ 的 Lipschitz 连续函数, 那么 $\sqrt{D_{\alpha\beta}}$ 为 GVIP(F, g) 提供全局误差界, 即

$$\|x - x^*\| \leqslant \frac{L + \beta L' L''}{\mu} \frac{1}{\sqrt{\lambda(\beta - \alpha)}} \sqrt{D_{\alpha\beta}(x)},$$
$$\forall x \in H,\ g(x) \in C,\ 0 < \alpha < \beta.$$

证明 由命题3、引理3和定理6可得

$$D_{\alpha\beta}(x) \geqslant (\beta - \alpha)\Phi(g(x), \pi_\beta(x)) \geqslant (\beta - \alpha)\lambda\|g(x) - \pi_\beta(x)\|^2 \geqslant \lambda(\beta - \alpha)\left(\frac{\mu}{L + \beta L' L''}\right)^2 \|x - x^*\|^2.$$

从而证明结论. □

[参 考 文 献]

[1] Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems[J]. Mathematical Programming, 1992, **53**(1): 99-110.

[2] Wu J H, Florian M, Marcotte P. A general descent framework for the monotone variational inequality problem[J]. Mathematical Programming, 1993, **61**(3): 281-300.

[3] Yamashita N, Taji K, Fukushima M. Unconstrained optimization reformulations of variational inequality problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, **92**(3): 439-456.

[4] Huang L R, Ng K F. Equivalent optimization formulations and error bounds for variational inequality problem[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, **125**(2): 299-314.

[5] Tan L L. Regularized gap functions for nonsmooth variational inequality problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, **334**(2): 1022-1038.

[6] Solodov M V. Merit functions and error bounds for generalized variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, **287**(2): 405-414.

[7] Noor M A. Merit functions for general variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, **316**(2): 736-752.

[8] Qu B, Wang C Y, Zhang J Z. Convergence and error bound of a method for solving variational inequality problems via the generalized D-gap function[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, **119**(3): 535-552.

Generalized Gap Functions and Error Bounds for Generalized Variational Inequalities

HU Yan-hong[1,2], SONG Wen

(1. Department of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun 130024, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Harbin Normal University, Harbin 150080, P. R. China)

Abstract: Some classes of generalized gap functions for two kinds of generalized variational inequality problems are considered. Error bounds for the underlying variational inequalities by using the generalized gap functions under the condition that the involved mapping F is g-strongly monotone with respect to the solution were obtained. It is not necessary to suppcsethat Fis continuously differential nor of local Lipschitz with respect to the solution were obtained. It is not necessary to suppose that Fis continuously differentiable local Lipschitz.

Key words: variational inequality; gap functions; error bounds