

一维 Euler 方程的特征有限体积格式^{*}

郭彦, 刘儒勋

(中国科学技术大学 数学系, 合肥 230026)

(周哲玮推荐)

摘要: 提出了一种用于求解一维标量方程和无粘 Euler 方程组的高阶有限体积格式. 其中时间离散采用 Simpson 数值积分公式从而实现时间上的高阶. 利用特征线理论得到网格节点在各个时间层沿着特征线的位置, 而积分公式中的节点值通过三阶和五阶的中心加权本质无震荡重构得到. 最后, 给出了几个数值算例验证此方法的高精度和收敛性以及捕获激波的能力.

关键词: 双曲方程; 有限体积方法; 特征理论; WENO 重构; Runge-Kutta 方法

中图分类号: O241.8; O352 **文献标识码:** A

引 言

当今求解流体动力学问题需要一些高精度的计算方法. 最近几年已经提出很多高阶格式求解守恒型双曲方程组, 这些格式一般都是基于高阶重构数值流通量来构造高阶格式, 而通过这种方法构造的高阶格式在光滑区域能够达到很高精度, 但是在出现间断区域就会出现明显的数值震荡. 高阶无震荡格式中具有代表性的格式是本质无震荡格式(ENO)^[1,2], 加权本质无震荡格式(WENO)^[3]和中心加权本质无震荡格式(CWENO)^[4,5]. 还有其它高阶格式如最近所提出的 RKDG 有限元格式^[6], 激波捕获差分格式紧^[7], 紧致格式^[8], 分段有理方法(PRM)^[9]和 CIP/MM FVM 格式^[10]. 其中, CIP/MM FVM 格式是通过一维 Euler 守恒律方程运用特征线理论, 并沿着特征曲线求解 Riemann 不变量的半 Lagrange 数值解. 该格式主要利用节点值, 单元平均值和一阶导数值构建 3 次多项式, 从而利用特征线理论所求出的节点位置代入所求的三阶多项式就可以得到各个变量在节点的值. 从格式分析及其数值结果中可以看到该格式具有三阶精度.

本文对 Euler 守恒律方程组提出一种新的高阶有限体积格式. 采用对时间积分进行 Simpson 积分公式离散得到时间上的高精度. 我们运用 CWENO 重构^[4,5]得到的多项式和由特征方程求得的节点位置得到有限体积格式中的各时间层沿特征线的变量的节点值. 这种处理结合特征线方法的高分辨率性质, CWENO 格式的高精度和本质无震荡性质. 最后给出一些经典的数值算例验证该格式的数值精度和格式的性质.

本文如下安排各节内容: 第 1 节中, 对一维的标量方程和欧拉方程组分别构造所提的格式; 第 2 节将该格式应用于一些经典算例, 从算例中可以看出格式的高精度收敛性及其捕获激

* 收稿日期: 2008-07-04; 修订日期: 2009-02-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771134)

作者简介: 郭彦(1982—), 男, 安徽人, 博士(联系人, E-mail: gysx@mail.ustc.edu.cn).

波的能力. 最后对本文做简短的总结.

1 数值方法

1.1 标量守恒方程

本节考虑如下标量守恒方程:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1)$$

其中, $u(x, 0) = u_0(x)$.

为近似求解方程(1), 分别离散空间和时间并取步长 $h = \Delta x$ 和 Δt , 记空间网格节点为 $x_i = i \times h, i = 0, \dots, N$, 时间层为 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, 同时记 $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 为空间剖分单元,

$u_i^n \approx \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx, i = 1, \dots, N$ 为变量在时间 t^n 处的单元平均值, 记 $u_i^n \approx u(x_i, t^n), i =$

$0, \dots, N$ 为节点值. 对方程(1) 在单元片 $I_i \times [t^n, t^{n+1}]$ 上积分可以得到如下公式:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{i+1/2}, t)) - f(u(x_{i-1/2}, t))] dt. \quad (2)$$

由各变量在时间 t^n 层处的单元平均值通过该方程求得在时间 t^{n+1} 处的值. 为得到方程(2) 的全离散形式, 下面就要对时间积分进行离散.

1.1.1 时间积分

本文利用 Simpson 积分公式对方程(2) 进行时间离散实现时间上的高精度

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{dt}{dx} \sum_{l=1}^3 N_l [f(\hat{u}(x_{i+1/2}, t^n + \beta_l dt)) - f(\hat{u}(x_{i-1/2}, t^n + \beta_l dt))], \quad (3)$$

其中, $N = (1/6, 2/3, 1/6)^T$ 为权, $\beta = (0, 1/2, 1)^T$ 为积分节点. \hat{u} 为所求变量的节点值.

1.1.2 网格点位置

类似 CIP/MM FVM^[10], 我们运用半 Lagrange 方法求解如下特征方程, 从而得到节点沿特征线的位移:

$$\frac{dx}{dt} = f'(u). \quad (4)$$

求解该方程有很多方法. 本文分别采用四阶 Runge-Kutta 方法和中点方法求解该特征方程.

四阶 Runge-Kutta 方法求解单元边界点沿特征线在时间 t^{n+1} 处的位置 $x_{j+1/2}$ 可以表示为

$$x^{n+1} = x^n + dt \sum_{k=1}^4 b_k g^{(k)}, \quad (5)$$

其中, $b = (1/6, 2/6, 2/6, 1/6)$, $g^{(k)}$ 是 Runge-Kutta 通量逼近.

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= -f'(u(t^n, x^n)), \\ g^{(2)} &= -f'(u(t^n + dt/2, x^n + dt/(2g^{(1)}))), \\ g^{(3)} &= -f'(u(t^n + dt/2, x^n + dt/(2g^{(2)}))), \\ g^{(4)} &= -f'(u(t^n + dt, x^n + dtg^{(3)})). \end{aligned}$$

类似得到单元边界点在时间 $t^{n+1/2}$ 处沿特征线方向位于时间 t^n 处位置 $x_{j+1/2}$

$$x^{n+1/2} = x^n + dt \sum_{k=1}^4 B_k g^{(k)}, \quad (6)$$

其中, $B = (5/24, 4/24, 4/24, -1/24)$.

为运算简单, 我们也可以采用中点格式来计算时间 $t^{n+1/2}$ 和 t^{n+1} 处的网格点 $x_{j+1/2}$ 沿特征

线落在时间 t^n 层的位置. 仅介绍时间 $t^{n+1/2}$ 处的处理方法. 速度 u 在时间 $t^{n+1/2}$ 可以写成速度在 t^n 处的线性插值形式

$$u_{j+1/2} = u_{j+1/2}(1 - \xi) + u_{j-1/2}\xi \quad (7)$$

从而可以得到单元边界格点 $x_{j+1/2}$ 在时间 t^n 处的位移为

$$\xi \Delta x = \frac{u_{j+1/2} \Delta t / 2}{1 + (\Delta t / (4 \Delta x))(u_{j+1/2} - u_{j-1/2})} \quad (8)$$

从而得到单元格点 $x_{j+1/2}$ 在时间 $t^{n+1/2}$ 处的位置 $(x_{j+1/2} - \xi \Delta x)$.

1.1.3 节点值的重构

为得到高阶无震荡格式, 本文分别采用三阶和五阶中心加权本质无震荡格式^[4-5]来对各变量的节点值进行重构. 这里仅简要介绍五阶本质无震荡格式^[4-5].

在模板 $\{I_{j-2}, I_{j-1}, I_j, I_{j+1}, I_{j+2}\}$ 上引入四阶最优多项式 $u_o(x)$, 并将其定义为 $u_o(x) = \sum_{i=1}^5 a_{o i-1} (x - x_i)^{i-1}$. 为了得到本质无震荡格式还需要构造 3 个二阶多项式. 类似 $u_o(x)$ 定义, 首先构造 3 个一般的二阶多项式为: 在模板 $\{I_{j-2}, I_{j-1}, I_j\}$ 上定义 $u_1(x) = \sum_{i=1}^3 a_{1 i-1} (x - x_i)^{i-1}$, 在模板 $\{I_{j-1}, I_j, I_{j+1}\}$ 上定义 $u_2(x) = \sum_{i=1}^3 a_{2 i-1} (x - x_i)^{i-1}$, 在模板 $\{I_j, I_{j+1}, I_{j+2}\}$ 上定义 $u_3(x) = \sum_{i=1}^3 a_{3 i-1} (x - x_i)^{i-1}$.

上面定义的 4 个多项式都满足下面的关系:

$$\int_{j+k} u_i(x) dx = \Delta x u_{j+k}, \quad (9)$$

其中, 当 $i = 0$ 时, $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; 当 $i = 2$ 时, $k \in \{-2, -1, 0\}$; 当 $i = 1$ 时, $k \in \{-1, 0, 1\}$; 当 $i = 3$ 时, $k \in \{0, 1, 2\}$. 这 4 个多项式的系数由文献[4-5]可以得到.

为得到中心加权本质无震荡格式, 需要引入非线性权, 首先定义中心多项式 $u_c(x)$, 而上面定义的多项式满足关系

$$u_o(x) = \sum_j C_j \times u_j(x). \quad (10)$$

由该式可以得到五阶的中心多项式为

$$u_c(x) = (u_o(x) - C_1 u_1(x) - C_2 u_2(x) - C_3 u_3(x)) / C_o, \quad (11)$$

其中, $\sum_j C_j = 1, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, 同样本文也取 $C_1 = C_3 = 1/8, C_2 = 1/2$.

由上面所得到的 4 个多项式 $u_k(x), k \in \{c, 1, 2, 3\}$ 可以定义本质无震荡权. 类似加权本质无震荡方法引入下面关系式:

$$IS_k^i = \sum_{l=1}^2 \int_{x_{j-l/2}}^{x_{j+l/2}} h^{2l-1} (u_k^{(l)})^2 dx, \quad k = c, 1, 2, 3. \quad (12)$$

整理可以得到 IS_k^i 为

$$IS_k^i = a_{k1}^2 \Delta x^2 + (13/3) a_{k2}^2 \Delta x^4 + O(\Delta x^6), \quad (13)$$

其中, $k \in \{1, 2, 3\}$.

对中心多项式 $u_c(x)$, 可以定义 IS_c^i 为

$$IS_c^i = a_{c1}^2 \Delta x^2 + ((13/3) a_{c2}^2 + (1/2) a_{c1} a_{c3}) \Delta x^4 + O(\Delta x^6). \quad (14)$$

由式(13)和(14)可以定义本质无震荡权

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{p \in \{c, 1, 2, 3\}} \alpha_p}, \quad \alpha_k = \frac{C_k}{(\varepsilon + IS_k^i)^2}, \quad (15)$$

其中, $k \in \{c, 1, 2, 3\}$. 对于不同的算例以及不同网格剖分取不同的小量 ε .

在上面所得到的本质无震荡权的基础上可以定义单元 I_i 上多项式 $u_k(x)$, $k \in \{c, 1, 2, 3\}$ 的凸组合 $R_j(x)$

$$R_i(x) = \omega_c u_c(x) + \omega_1 u_1(x) + \omega_2 u_2(x) + \omega_3 u_3(x). \quad (16)$$

详细的中心本质加权无震荡构建可以参见文献[5].

从而节点值 $\hat{u}(x_{i+1/2}, t^n + dt)$ 和 $\hat{u}(x_{i+1/2}, t^n + dt/2)$ 可从上面中心加权本质无震荡重构的多项式 $R_i(x)$ 得到

$$\hat{u}(x_{i+1/2}, t^n + dt) = R_i(x^{n+1}), \quad \hat{u}(x_{i+1/2}, t^n + dt/2) = R_i(x^{n+1/2}). \quad (17)$$

下面给出由时间 t^n 层的各变量单元平均值 u_i^n 求解下一时间层的值 u_i^{n+1} 的算法.

算法:

给定时间 t^n 层处的单元平均值 u_i^n 计算下一时间层处的值

- 1) 计算多项式 $u_k(x)$ 的系数并计算权 ω_k , $k \in \{c, 1, 2, 3\}$ 在 t^n 层的值;
- 2) 由式(5)和(6)分别计算单元边界 x^{n+1} 和 $x^{n+1/2}$ 在时间层 t^{n+1} 和 $t^{n+1/2}$ 沿特征线落在时间层 t^n 的位置;
- 3) 利用式(16)计算 $\hat{u}(x_{i+1/2}, t^n + \beta_l dt)$ 并计算方程(2)的右端项;
- 4) 由方程(2)计算下一时间层单元平均值 u_i^{n+1} .

1.2 Euler 方程组

本节将前面所提出的格式运用到一维无粘 Euler 守恒方程组. 首先考虑如下一维无粘守恒 Euler 方程组

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}.$$

其中, \mathbf{U} 为守恒变量向量形式, \mathbf{F} 为无粘通量. 分别记密度为 ρ , 速度为 u , 压力为 p , 总能量为 E 且有关系式 $E = p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2$, 其中 $\gamma = 1.4$.

1.2.1 一维 Euler 方程的数值格式

类似与构造一维标量守恒方程的格式, 由下式得到单元平均值在下一时间层的值 U_i^{n+1} :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{dt}{dx} \sum_{l=1}^3 N_l [F(\hat{U}(x_{i+1/2}, t^n + \beta_l dt)) - F(\hat{U}(x_{i-1/2}, t^n + \beta_l dt))]. \quad (19)$$

设 $\mathbf{V} = (\rho, u, p)^T$ 为原始变量的向量形式, 方程(18)可以改写为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_p \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix}.$$

由原始变量得到的方程(20)是非守恒方程. 设 c 为声速且记 $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$, 则 A_p 的特征值为 $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + c$. 相应与这些特征值的右特征向量, 左特征向量和特征矩阵分别为

$$R_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -c/\rho & 0 & c/\rho \\ c^2 & 0 & c^2 \end{bmatrix}, \quad L_p = \begin{bmatrix} 0 & -\rho/(2c) & 1/(2c^2) \\ 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & \rho/(2c) & 1/(2c^2) \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

从而方程(20)的特征形式可以重写为

$$L_p \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Lambda L_p \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0. \quad (21)$$

线性化特征矩阵可以将方程(21)化为

$$\frac{\rho}{2c} du - \frac{1}{2c^2} dp = 0, \quad l_1(X_0): \frac{dx}{dt} = \lambda_1 = u - c,$$

$$d\rho - \frac{1}{c^2} dp = 0, \quad l_2(X_0): \frac{dx}{dt} = \lambda_2 = u,$$

$$\frac{\rho}{2c} du + \frac{1}{2c^2} dp = 0, \quad l_3(X_0): \frac{dx}{dt} = \lambda_3 = u + c.$$

原始变量在 X_0 处的值可以由下面的式子得到, 其中 $X(l_k)$ ($k = 1, 2, 3$) 为单元边界格点分别在时间 t^n 和 t^{n+1} 沿特征线 l_k ($k = 1, 2, 3$) 落在时间 t^n 处的位置. 对每条特征线来说, 这里求解节点落在前一时间层位置的方法类似求解标量守恒率方程中求解的方法.

从而通过求解线性方程就可以沿特征线求解 (ρ, u, p) 为

$$u(X_0) = \frac{1}{2}(\mathcal{U}(X(l_1)) + \mathcal{U}(X(l_3)) + \frac{1}{\rho c}(\mathcal{P}(X(l_3)) - \mathcal{P}(X(l_1))))),$$

$$p(X_0) = \frac{1}{2}(\mathcal{P}(X(l_1)) + \mathcal{P}(X(l_3)) + \rho c(\mathcal{U}(X(l_3)) - \mathcal{U}(X(l_1))))),$$

$$\rho(X_0) = \mathcal{R}(X(l_2)) + \frac{1}{2}(p(X_0) - \mathcal{P}(X(l_1))),$$

其中, $\mathcal{R}(x)$, $\mathcal{U}(x)$ 和 $\mathcal{P}(x)$ 分别表示为 ρ , u 和 p 的近似, 这3个节点值都可以用中心加权本质无震荡重构得到. 这里的重构类似与求解标量方程的重构 $R_i(x)$ 求解节点值(17).

算法:

给定时间 t^n 层处的单元平均值 \mathcal{Q} , ρ_i^n 和 E_i^n 计算下一时间层的单元平均值 ρ_i^{n+1} , ρ_i^{n+1} 和 E_i^{n+1} ;

1) 利用时间 t^n 层的单元平均值 ρ_i^n , ρ_i^n 和 E_i^n 计算 u_i^n 和 p_i^n ;

2) 计算在时间 t^n 处多项式 $R_k(x)$, $U_k(x)$, $P_k(x)$ 的系数和权 ω_k , $k = c, 1, 2, 3$,

$$\mathcal{R}_i(x) = \omega_c R_c(x) + \omega_1 R_1(x) + \omega_2 R_2(x) + \omega_3 R_3(x),$$

$$\mathcal{U}_i(x) = \omega_c U_c(x) + \omega_1 U_1(x) + \omega_2 U_2(x) + \omega_3 U_3(x),$$

$$\mathcal{P}_i(x) = \omega_c P_c(x) + \omega_1 P_1(x) + \omega_2 P_2(x) + \omega_3 P_3(x);$$

3) 利用式(5)和(6)计算单元边界点在时间 t^{n+1} 和 $t^{n+1/2}$ 沿特征线落在 t^n 层的位置 $X(l_k)^{n+1}$ 和 $X(l_k)^{n+1/2}$ ($k = 1, 2, 3$) 类似式(5)和(6), 其中式子中的特征值分别替换为 λ_1 , λ_2 和 λ_3 ;

4) 利用方程(16)和(19)的右端项可以得到单元节点值 $\hat{U}(x_{i+1/2}, t^n + \beta_1 dt)$;

5) 最后利用方程(19)计算下一时间层的各变量单元平均值 U_i^{n+1} .

2 数值结果

本节主要将本文所提出的格式运用到一些一维的算例. 首先将该格式运用到经典的线性, 非线性 Burgers 方程和一维欧拉方程的密度扰动问题检验该格式的精度和收敛性.

例 1 求解如下线性标量方程:

$$u_t + u_x = 0, \quad (22)$$

分别给出两个初值条件 $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ 和 $u(x, 0) = \sin^4(\pi x)$, 考虑以 2 为周期的边界条件. 两种初值都计算到时间 $t = 10$. 第一个初始条件下的精度和收敛性可以由表 1 得到. 从表 1 可以看到该格式几乎可以得到理论上的三阶和五阶精度且收敛性也是比较好的. 对于初始条件 $u(x, 0) = \sin^4(\pi x)$ 可以得到类似的结论.

表 1 $u_t + u_x = 0, u(x, 0) = \sin(\pi x)$ 的精度和收敛性 ($t = 10$)

方法	n	e_{L_1} 误差	O_{L_1} 阶	e_{L_∞} 误差	O_{L_∞} 阶
3 阶	10	2.31 E- 01		3.13 E- 01	
	20	6.58 E- 02	1.81	1.47 E- 01	1.10
	40	7.52 E- 03	3.13	2.00 E- 02	2.90
	80	4.00 E- 04	4.23	1.25 E- 03	4.00
	160	3.97 E- 05	3.33	8.71 E- 05	3.80
	320	4.98 E- 06	3.00	8.61 E- 06	3.34
5 阶	10	3.72 E- 02		6.22 E- 02	
	20	1.77 E- 03	4.39	3.22 E- 03	4.27
	40	5.71 E- 05	4.96	1.11 E- 04	4.86
	80	1.81 E- 06	4.98	3.54 E- 06	4.97
	160	5.70 E- 08	4.99	1.09 E- 07	5.03
	320	1.79 E- 09	5.00	3.37 E- 09	5.02

表 2 $u_t + (u^2/2)_x = 0, u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$ 的精度和收敛性 ($t = 0.5/\pi$)

方法	n	e_{L_1} 误差	O_{L_1} 阶	e_{L_∞} 误差	O_{L_∞} 阶
3 阶	10	5.13 E- 02		1.62 E- 01	
	20	1.76 E- 02	1.55	9.37 E- 02	0.79
	40	1.69 E- 03	3.38	1.08 E- 02	3.12
	80	1.12 E- 04	3.91	8.18 E- 04	3.72
	160	1.06 E- 05	3.40	1.04 E- 04	2.97
	320	1.29 E- 06	3.04	1.32 E- 05	2.98
5 阶	10	1.47 E- 02		7.73 E- 02	
	20	1.32 E- 03	3.48	1.46 E- 02	2.41
	40	1.03 E- 04	3.69	1.43 E- 03	3.35
	80	4.71 E- 06	4.45	6.61 E- 05	4.44
	160	1.73 E- 07	4.76	2.12 E- 06	4.96
	320	6.18 E- 09	4.80	4.97 E- 08	5.42

例 2 数值求解如下非线性方程:

$$u_t + \left[\frac{u^2}{2} \right]_x = 0, \tag{23}$$

其中, 初值为 $u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$, 以 2 为周期. 当数值求解到 $t = 0.5/\pi$ 时解仍为光滑解. 表 2 给出数值解的 L_1 和 L_∞ 误差估计, 同时给出收敛性情况. 从该表格中同样可以得到理论中的三阶和五阶精度并且可以看出格式的收敛性. 随着时间的增加数值解出现激波现象, 该格式也能较好地捕捉到激波.

例 3 Euler 方程的密度扰动问题^[11]

本例考虑 Euler 方程组(18). 为了得到所提格式对 Euler 方程的收敛性以及精度分析, 我们考虑初始条件为 $\rho(x, 0) = 1 + 0.2\sin(\pi x)$, $u(x, 0) = 1$, $p(x, 0) = 1$, 同样取以 2 为周期的边界条件. Euler 方程在此初值条件下的真解为: $\rho(x, t) = 1 + 0.2\sin(\pi(x - t))$, $u(x, t) = 1$, $p(x, t) = 1$. 由本文格式所得到的数值解在时间 $t = 2$ 时密度的 L_1 和 L_∞ 误差从表 3 可以看到. 由此表可以看出三阶和五阶格式都能达到理论阶, 数值上得到格式的收敛性. 另外通过所得到的数值信息可以得出: 本格式与本质加权无震荡和中心加权本质无震荡格式所得到的精度阶和收敛性具有类似的效果.

表 3 初始密度 $\rho_0 = 1 + 0.2\sin(\pi x)$, 初值速度压力 $u_0 = p_0 = 1$ 的精度和收敛性

方法	n	e_{L_1} 误差	O_{L_1} 阶	e_{L_∞} 误差	O_{L_∞} 阶
3 阶	10	1.185 E- 02		3.41 E- 02	
	20	1.39 E- 03	3.09	4.23 E- 03	3.01
	40	1.79 E- 04	2.96	4.02 E- 04	3.40
	80	2.40 E- 05	2.90	4.33 E- 05	3.21
	160	3.14 E- 06	2.94	5.21 E- 06	3.06
	320	3.98 E- 07	2.98	6.41 E- 07	3.02
5 阶	10	1.99 E- 03		6.53 E- 03	
	20	1.25 E- 04	3.99	3.36 E- 04	4.28
	40	4.42 E- 06	4.82	1.10 E- 05	4.93
	80	1.47 E- 07	4.91	3.22 E- 07	5.09
	160	4.75 E- 09	4.95	8.93 E- 09	5.17
	320	1.45 E- 10	5.03	2.55 E- 10	5.13

下面 3 个数值算例用来考察该格式对激波的捕获能力.

例 4 Lax 问题^[12]

考虑 Lax 激波管问题, 这种问题是由方程(18) 在下面初值条件下所得到的物理现象:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528), & -5 \leq x \leq 0, \\ (0.5, 0, 0.571), & 0 < x \leq 5. \end{cases}$$

本文所提格式所得到的时间 $t = 1.3$ 时数值解与 CWENO 格式得到的数值解^[5] 和解析解的比较可以从图 1 中观察到. 由图 1 可以看到, 在网格数为 $n = 200$ 时, 该格式所算的数值结果有一些震荡, 但是, 当我们继续加密网格时, 就能明显地看到震荡在逐渐变弱. 在引入本质无震荡权抑制震荡的同时, 该格式还是能较好地捕获到激波现象. 将此数值结果与中心加权本质无震荡的格式 CWENO 和 UWENO^[5] 得到的数值结果相比较, 可看到在抑制震荡方面本格式要好一些, 能得到较为准确的数值解.

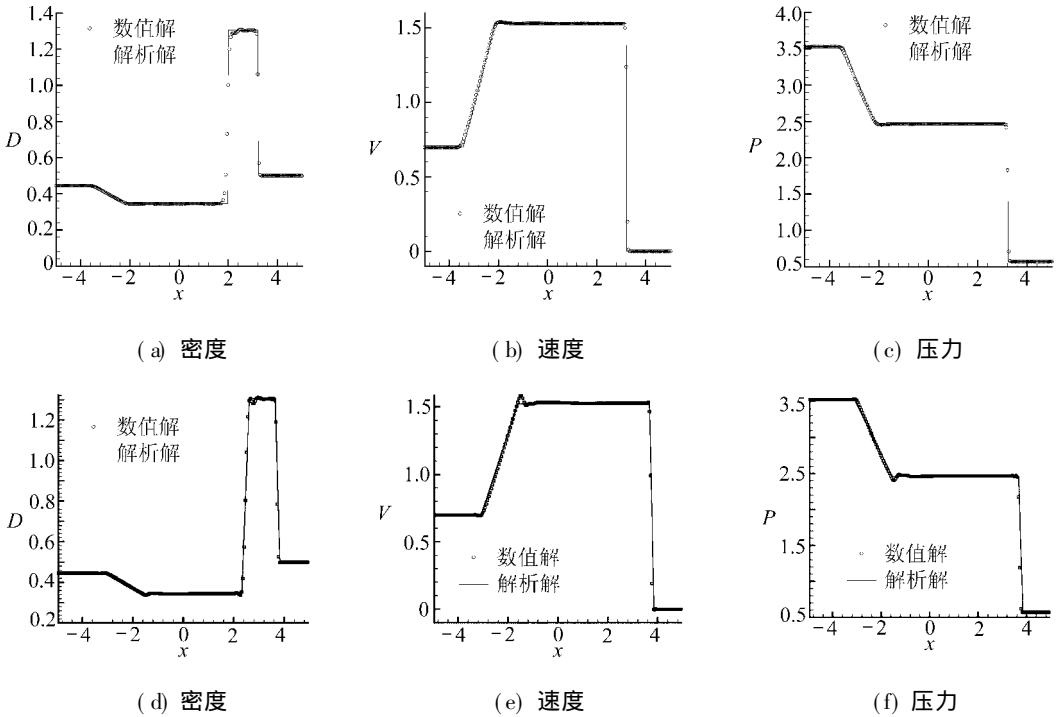


图 1 Lax 问题在 $t = 1.3$ 时的密度、速度、压力的数值解和解析解的比较(网格数为 $n = 200$

上排图为本文所提格式($G_{CFL} = 0.5$), 下排图为 CWENO 格式($G_{CFL} = 0.5$)

例 5 Sod 问题^[13]

同样考虑 Euler 方程(18). 该方程的解由 3 部分组成. 我们考虑下面初值条件:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1), & -0.5 \leq x \leq 0, \\ (0.125, 0, 0.1), & 0 < x \leq 0.5. \end{cases}$$

在时间 $t = 0.2$ 处的数值解与真解的比较可以从图 2 观察到. 通过与真解比较可以得出该格式, 能较好捕获激波位置, 并且在间断处与真解也能较好的吻合. 图 2 给出的是 $n = 200$ 时的数值结果, 可以看出此时还是有一点震荡, 但是随着网格的进一步加密震荡会减弱. 这些数值结果与其它的高阶方法特别是本质无震荡型方法所得到的结果一致.

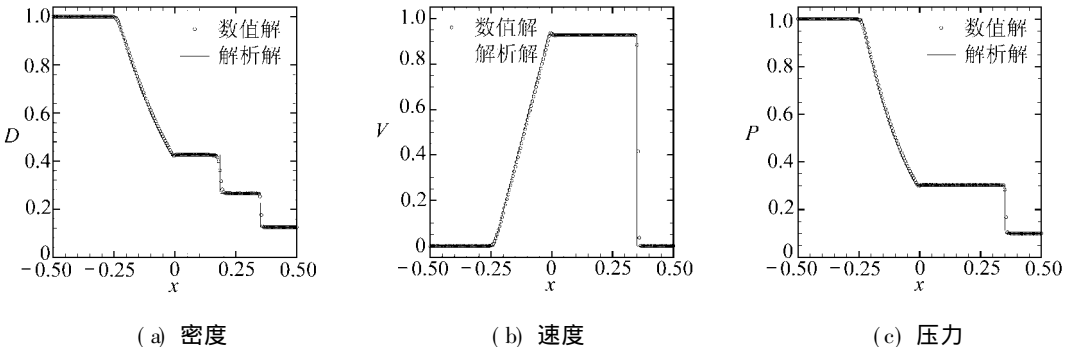


图 2 Sod 问题在 $t = 0.2$ 时的密度、速度、压力(网格数为 $n = 200$)

例 6 激波相互扰动问题^[2]

本例依然考虑方程(18) 在下面初值下的数值模拟结果:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857148, 2.629369, 10.333333), & -5 \leq x \leq -4, \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & -4 < x \leq 5. \end{cases}$$

图3给出在时间 $t = 1.8$ 时数值结果与由五阶中心加权本质无震荡格式, 在网格数为 2000 的情形下所得到的“真解”. 同别的一些高阶格式类似, 本格式也不能较好地模拟激波下游正确的流动特征. 但是, 随着网格地加密数值结果也是会更接近真实解.

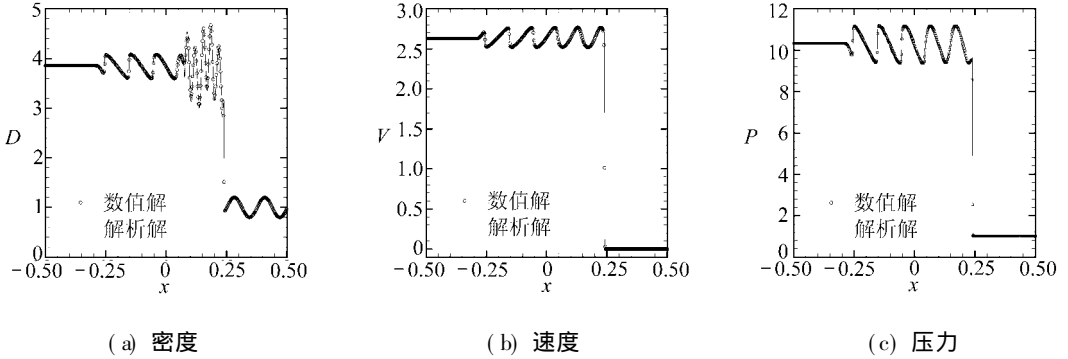


图3 激波交互扰动问题在 $t = 1.8$ 时的密度、速度、压力(网格数为 $n = 400$)

3 总 结

本文运用特征线理论, 结合中心加权本质无震荡插值思想, 对一维的双曲守恒律方程提出一种新的有限体积格式. 通过算例可以发现所提格式能较准确的给出数值解, 通过对几个经典的例子的数值求解, 可以得出所提出的三阶和五阶格式在光滑区域能达到理论阶, 在间断处仍然保持本质无震荡的性质. 该方法所得到的数值解既保持 WENO 格式的本质无震荡性的优点, 同时, 相对与已有的一些的 WENO 和 CWENO 格式, 该格式又体现出特征线方法的分辨率高的优点.

[参 考 文 献]

- [1] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [J]. J Comput Phys, 1988, **77**(2): 439-471.
- [2] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II [J]. J Comput Phys, 1989, **83**(1): 32-78.
- [3] Jiang G, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. J Comput Phys, 1996, **126**(1): 202-228.
- [4] Levy D, Pupo G, Russo G. Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws [J]. SIAM J Sci Comput, 2000, **22**(2): 656-672.
- [5] Capdeville G. A central WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws on non-uniform meshes [J]. J Comput Phys, 2008, **227**(5): 2977-3014.
- [6] 陈荣三. 大密度和大压力比可压缩的数值计算 [J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(5): 609-617.
- [7] 涂国华, 袁湘江, 陆利蓬. 激波捕捉差分方法研究 [J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(4): 433-440.
- [8] HU Jun, GUO Shao-gang. Solution to Euler equations by high resolution upwind compact scheme based on flux splitting [J]. Internat J Numer Meth Fluids, 2008, **56**(11): 2139-2150.
- [9] Xiao F, Peng X. A convexity preserving scheme for conservative advection transport [J]. J Comput Phys, 2004, **198**(2): 389-402.

- [10] Li S, Xiao F. CIP/ multi-moment finite volume method for Euler equations: A semi-Lagrangian characteristic formulation[J]. J Comput Phys, 2007, **222**(2): 849-871.
- [11] Qiu J, Shu C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one dimensional case[J]. J Comput Phys, 2004, **193**(1): 115-135.
- [12] Lax P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation[J]. Commun Pure Appl Math, 1954, **7**(1): 198-232.
- [13] Sod G. A survey of several finite difference methods for systems of non-linear conservation laws[J]. J Comput Phys, 1978, **27**(1): 1-31.

Characteristic-Based Finite Volume Scheme for 1D Euler Equations

GUO Yan, LIU Ru-xun

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China ,
Hefei 230026, P. R. China)

Abstract: A high-order finite-volume scheme was presented for the one-dimensional scalar and inviscid Euler conservation laws. The Simpson's quadrature rule was used to achieve high-order accuracy in time. To get the point value of the Simpson's quadrature, the characteristic theory was used to obtain the positions of the grid points at each sub-time stages along the characteristic curves, and the third-order and fifth-order central weighted essentially non-oscillatory (CWENO) reconstruction was adopted to estimate the cell point values. Several standard one-dimensional examples were used to verify high-order accuracy, convergence and capability of capturing shock.

Key words: hyperbolic equation; finite volume method; characteristic theory; WENO reconstruction; Runge-Kutta method