

# 三维无限接合体双材料多界面裂纹的 超奇异微积分方程法<sup>\*</sup>

徐春晖<sup>1</sup>, 秦太验<sup>1</sup>, 袁 丽<sup>1</sup>, 野田尚昭<sup>2</sup>

(1. 中国农业大学 理学院, 北京 100083;

2. 九州工业大学 工学部, 北九州市 804-8550, 日本)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 利用有限部积分的概念, 导出了三维无限接合体中多个界面裂纹, 在任意载荷作用下的超奇异微积分方程组. 数值分析中, 未知的位移间断采用基本分布函数和多项式乘积的形式来近似, 其中基本分布函数是根据界面裂纹应力的振荡奇异性来选取的. 作为典型算例, 研究了存在两个矩形界面裂纹时, 裂纹之间距离、裂纹形状及双材料弹性常数对应力强度因子的影响. 计算表明, 应力强度因子随裂纹间的距离的增大而减小.

**关键词:** 应力强度因子; 奇异积分方程; 界面裂纹; 有限部积分; 边界元法

**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

## 引 言

在断裂力学中, 研究多个裂纹之间的相互影响不仅具有理论意义, 而且具有重要的实用价值. 三维均质材料的无限弹性体中, 两个共面或平行平片裂纹的相互影响问题, 已有多篇文献进行了讨论<sup>[1-4]</sup>. 近年来, 很多研究者对多场耦合的裂纹问题进行了分析<sup>[5-7]</sup>. 随着复合材料的广泛应用, 界面裂纹问题越来越受到广大研究者的关注<sup>[8-10]</sup>. 但关于多个界面裂纹的相互影响问题, 只有二维的情况得到了解决. Noda 等<sup>[11]</sup> 基于体积力法, 讨论了存在任意多个共线裂纹时, 应力强度因子与裂纹间距离、弹性常数以及裂纹数目之间的关系, 总结了多个裂纹之间的相互影响; Sun 等<sup>[12]</sup> 采用边界无单元法和移动最小二乘法等技术, 对类似的问题进行了分析, 给出了边界积分方程, 对应力强度因子进行了求解. Zhou 等<sup>[13]</sup> 讨论了压电材料中两个或 4 个平行裂纹的相互影响问题, 但关于三维双材料无限接合体多个界面裂纹的相互影响问题, 未见有文献报道.

近来, 作者研究了无限接合体双材料界面裂纹的超奇异微积分方程求解问题<sup>[14-15]</sup>, 得到了收敛快、精度高的数值结果. 本文在此基础上, 研究三维无限接合体中存在任意多个界面裂纹相互干扰问题的超奇异微积分方程组. 数值计算中, 未知的位移间断采用基本分布函数和

\* 收稿日期: 2008-09-28; 修订日期: 2009-02-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872213)

作者简介: 徐春晖(1971—), 女, 辽宁人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86-10-62736992;

E-mail: xuchunhui\_cau@163.com).

多项式乘积的形式来近似, 其中基本分布函数是根据界面裂纹应力的振荡奇异性来选取的. 最后对比较典型的两个矩形界面裂纹问题进行了分析, 给出了应力强度因子与裂纹间距离、弹性常数及裂纹形状等的关系.

## 1 多个界面裂纹的超奇异微积分方程组

假设两弹性半空间沿  $x-y$  平面理想的粘在一起(见图 1), 上、下半平面的弹性常数分别为  $(\mu_1, \nu_1)$  和  $(\mu_2, \nu_2)$ , 这里  $\mu_1, \mu_2$  是材料的剪切弹性模量,  $\nu_1, \nu_2$  是材料的 Poisson 比. 假设有  $N$  个裂纹位于双材料的界面上, 应力作用在距裂纹无穷远处.

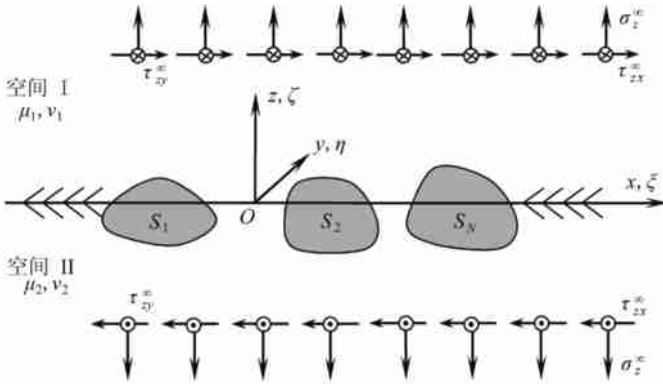


图 1 计算模型示意图

基于三维双材料无限体的位移基本解, 利用 Somigliana 公式, 双材料多界面裂纹问题的位移可表示为

$$u_k^m(\mathbf{x}) = - \sum_{n=1}^N \int_{S_n} T_{ki}^m(\mathbf{x}, \xi) \Delta u_{in}(\xi) ds(\xi), \quad i, k = x, y, z; m = 1, 2, \quad (1)$$

其中,  $\Delta u_{in} = u_{in}^+ - u_{in}^-$  表示第  $n$  个裂纹面上  $i$  方向上的位移间断,  $T_{ki}^m(\mathbf{x}, \xi)$  为三维双材料无限体的面力基本解, 上标 1 和 2 分别代表材料 I 和 II. 利用位移解(1)及本构关系可得材料内部任意点  $\mathbf{x}$  处的应力:

$$\sigma_j^m(\mathbf{x}) = - \sum_{n=1}^N \int_{S_n} S_{kj}^m(\mathbf{x}, \xi) \Delta u_{in}(\xi) ds(\xi), \quad j = x, y, z, \quad (2)$$

其中

$$S_{kj}^m(\mathbf{x}, \xi) = \frac{2\mu_1\nu_1}{1-2\nu_1} \frac{\partial T_{lk}^m(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_l} \delta_{ij} + \mu_1 \left[ \frac{\partial T_{ik}^m(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}^m(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_i} \right]. \quad (3)$$

利用各个裂纹面上的应力边界条件及有限部积分的概念, 可得双材料多界面裂纹问题的超奇异微积分方程. 这里仅给出针对第  $j$  个裂纹的超奇异微积分方程组, 其它裂纹的情况可以类似地给出.

$$\mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \Delta u_{j, \alpha}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \times \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{1}{r^3} \left[ \delta_{\alpha\beta} + \frac{3(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2} r, \alpha, \beta \right] \Delta u_{\beta j}(\xi) ds(\xi) = - p_{\alpha j}(\mathbf{x}), \quad (4a)$$

$$\mu_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) \Delta u_{j, \alpha}(\mathbf{x}) + \mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{1}{r^3} \Delta u_{\beta j}(\xi) ds(\xi) = - p_{\beta j}(\mathbf{x}), \quad (4b)$$

其中,  $\alpha, \beta = x, y; j = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \Lambda_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + k_1 \mu_2}, \quad \Lambda_2 = \frac{\mu_2}{\mu_2 + k_2 \mu_1}, \\ k_1 = 3 - 4\nu_1, \quad k_2 = 3 - 4\nu_2, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \end{cases} \quad (4c)$$

$x \in S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$ ; 这里符号  $S_j$  表示第  $j$  个界面裂纹. 超奇异微积分方程共  $3N$  个, 方程的未知数为  $\Delta u_{ij}(x, y)$ , 即第  $j$  个裂纹在  $i$  ( $i = x, y, z$ ) 方向的位移间断, 共  $3N$  个.

## 2 超奇异微积分方程组的数值解法

由于超奇异微积分方程组(4)的复杂性, 用理论方法求解是很难的, 需对其建立相应的数值求解方法. 考虑到界面裂纹尖端应力场的振荡奇异性, 数值求解时, 基于未知解在裂纹前沿的性态, 未知的位移间断函数采用基本分布函数和多项式的乘积形式. 首先, 假设

$$\Delta u_{ij}(\xi, \eta) = w_{ij}(\xi, \eta) F_{ij}(\xi, \eta). \quad (5)$$

对双材料界面上存在多个矩形界面裂纹, 给定无穷远处均匀的拉应力场, 基本分布函数可假设为

$$\begin{cases} w_{xj}(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1+k_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a_j^2 - \xi^2} \sqrt{b_j^2 - \eta^2} \sin \left\{ \varepsilon \ln \left[ \frac{a_j - \xi}{a_j + \xi} \right] \right\}, \\ w_{yj}(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1+k_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a_j^2 - \xi^2} \sqrt{b_j^2 - \eta^2} \sin \left\{ \varepsilon \ln \left[ \frac{b_j - \eta}{b_j + \eta} \right] \right\}, \\ w_{zj}(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1+k_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a_j^2 - \xi^2} \sqrt{b_j^2 - \eta^2} \cos \left\{ \varepsilon \ln \left[ \frac{a_j - \xi}{a_j + \xi} \right] \right\} \cos \left\{ \varepsilon \ln \left[ \frac{b_j - \eta}{b_j + \eta} \right] \right\}, \end{cases} \quad (6)$$

这里  $a_j, b_j$  表示第  $j$  个矩形界面裂纹的边长. 式(6)中,  $\varepsilon = (1/2\pi) \ln((\mu_2 k_1 + \mu_1)/(\mu_1 k_2 + \mu_2))$ , 这里  $\varepsilon$  是重要的双材料参数, 文献[14]指出, 对于矩形界面裂纹, 当给定无穷远处均匀的拉应力场时, 应力强度因子  $K_I$  和  $K_{II}$  只与  $\varepsilon$  有关. 即当  $\varepsilon$  一定时,  $K_I$  和  $K_{II}$  不随材料 Poisson 比和剪切弹性模量的变化而变化, 尽管  $\varepsilon$  是由这二者计算得出的参数.

多项式采用如下形式:

$$\begin{cases} F_{xj}(\xi, \eta) = \alpha_{0j} + \alpha_{1j}\eta + \dots + \alpha_{n-1j}\eta^{(n-1)} + \alpha_{nj}\eta^n + \alpha_{n+1j}\xi + \alpha_{n+2j}\xi\eta + \dots + \\ \quad \alpha_{2nj}\xi\eta^n + \dots + \alpha_{l-n-1j}\xi^n + \alpha_{l-nj}\xi^m\eta + \dots + \alpha_{l-j}\xi^m\eta^n = \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_{ij} G_i(\xi, \eta), \\ F_{yj}(\xi, \eta) = \beta_{0j} + \beta_{1j}\eta + \dots + \beta_{n-1j}\eta^{(n-1)} + \beta_{nj}\eta^n + \beta_{n+1j}\xi + \beta_{n+2j}\xi\eta + \dots + \\ \quad \beta_{2nj}\xi\eta^n + \dots + \beta_{l-n-1j}\xi^m + \beta_{l-nj}\xi^m\eta + \dots + \beta_{l-j}\xi^m\eta^n = \sum_{i=0}^{l-1} \beta_{ij} G_i(\xi, \eta), \\ F_{zj}(\xi, \eta) = \gamma_{0j} + \gamma_{1j}\eta + \dots + \gamma_{n-1j}\eta^{(n-1)} + \gamma_{nj}\eta^n + \gamma_{n+1j}\xi + \gamma_{n+2j}\xi\eta + \dots + \\ \quad \gamma_{2nj}\xi\eta^n + \dots + \gamma_{l-n-1j}\xi^m + \gamma_{l-nj}\xi^m\eta + \dots + \gamma_{l-j}\xi^m\eta^n = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_{ij} G_i(\xi, \eta), \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $l = (n+1)(m+1)$ ,

$$G_0(\xi, \eta) = 1, \quad G_1(\xi, \eta) = \eta, \quad \dots, \quad G_{n+1}(\xi, \eta) = \xi, \quad \dots, \quad G_{l-1}(\xi, \eta) = \xi^m \eta^n. \quad (8)$$

将表达式(5)至(8)代入式(4), 即可得到超奇异微积分方程的离散形式如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \cdots & \mathbf{D}_{1N} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \cdots & \mathbf{D}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{D}_{m1} & \mathbf{D}_{m2} & \cdots & \mathbf{D}_{mN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{p}_1 \\ -\mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ -\mathbf{p}_m \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

这里

$$\mathbf{D}_{jj} = \begin{bmatrix} d_{3j-2, 3j-2} & d_{3j-2, 3j-1} & d_{3j-2, 3j} \\ d_{3j-1, 3j-2} & d_{3j-1, 3j-1} & d_{3j-1, 3j} \\ d_{3j, 3j-2} & d_{3j, 3j-1} & d_{3j, 3j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{ji} = \begin{bmatrix} d_{3j-2, 3i-2} & d_{3j-2, 3i-1} & 0 \\ d_{3j-1, 3i-2} & d_{3j-1, 3i-1} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3j, 3i} \end{bmatrix} \quad (i \neq j); \quad (10)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = \mathbf{p}_m = \begin{Bmatrix} \tau_{zx}^\infty \\ \tau_{yz}^\infty \\ \sigma_z^\infty \end{Bmatrix}$$

是载荷列向量, 在只有均匀法向应力作用时,

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = \mathbf{p}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z^\infty \end{Bmatrix};$$

$$\Delta_j = \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{Bmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, l-1; j = 1, 2, \dots, N)$$

是未知数列向量, 显然, 离散方程的未知数一共有  $3Nl$  个.

式(10)中的系数可以由方程(4)计算出, 其表达式很复杂, 例如

$$d_{3j-2, 3j-2} = \mu_1 \frac{2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2}{2\pi} \int_{S_j} \frac{1}{r^3} w_{sj}(\xi, \eta) G_{ij}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda}{2\pi} \int_{S_j} \frac{(x - \xi)^2}{r^5} w_{sj}(\xi, \eta) G_{ij}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta), \quad (11a)$$

$$d_{3j-2, 3i-2} = \mu_1 \frac{2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2}{2\pi} \int_{S_i} \frac{1}{r^3} w_{sj}(\xi, \eta) G_{ij}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda}{2\pi} \int_{S_i} \frac{(x - \xi)^2}{r^5} w_{sj}(\xi, \eta) G_{ij}(\xi, \eta) ds(\xi, \eta). \quad (11b)$$

需要注意的是, 积分(11a)中配置点  $(x, y)$  和积分点  $(\xi, \eta)$  都位于第  $j$  裂纹上, 当  $x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta$  时,  $r \rightarrow 0$ , 积分出现超奇异性, 要特殊处理, 需按有限部的意义计算<sup>[14]</sup>. 而在式(11b)中, 配置点和积分点分别位于第  $j$  和第  $i$  个裂纹上, 积分不会出现奇异性, 可按一般的积分进行数值计算.

### 3 数值结果和讨论

#### 3.1 无量纲应力强度因子的定义

作为典型算例, 考虑给定无穷远处均匀的拉应力场时, 两个矩形界面裂纹相互影响的问题, 如图2所示. 设裂纹1和裂纹2的边长分别为  $2a_1 \times 2b_1$  和  $2a_2 \times 2b_2$ , 两裂纹中心点  $O_1O_2$  之间的距离为  $2d$ . 无量纲应力强度因子  $F_{Ij}$ ,  $F_{IIj}$  和  $F_{IIIj}$  ( $j = 1, 2$ ) 表达式如式(12)所示:

$$\left\{ \begin{aligned} F_{Ij} + iF_{IIj} &= \frac{K_{Ij}(x, y) |_{y=\pm b_j} + iK_{IIj}(x, y) |_{y=\pm b_j}}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b_j}} = \\ & \sqrt{a_j^2 - x^2} \left[ \cos \left[ \varepsilon \ln \left( \frac{a_j - x}{a_j + x} \right) \right] F_{sj}(x, y) |_{y=\pm b_j} + 2i \mathcal{E} F_{yj}(x, y) |_{y=\pm b_j} \right], \\ F_{IIIj} &= \frac{K_{IIIj}(x, y) |_{y=\pm b_j}}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b_j}} = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + K_l}{4 \mu_l \cosh \pi \varepsilon} \frac{1}{(1/\mu_1 + 1/\mu_2)} \times \\ & \sqrt{a_j^2 - x^2} \sin \left[ \varepsilon \ln \left( \frac{a_j - x}{a_j + y} \right) \right] F_{sj} |_{y=\pm b_j}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

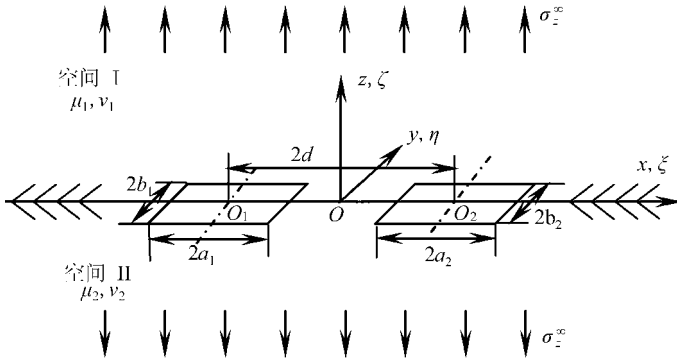
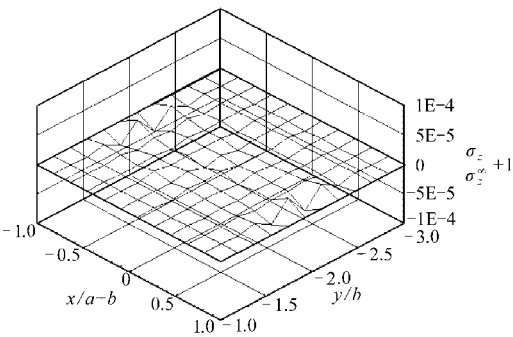


图 2 两个矩形界面裂纹模型

### 3.2 计算精度分析

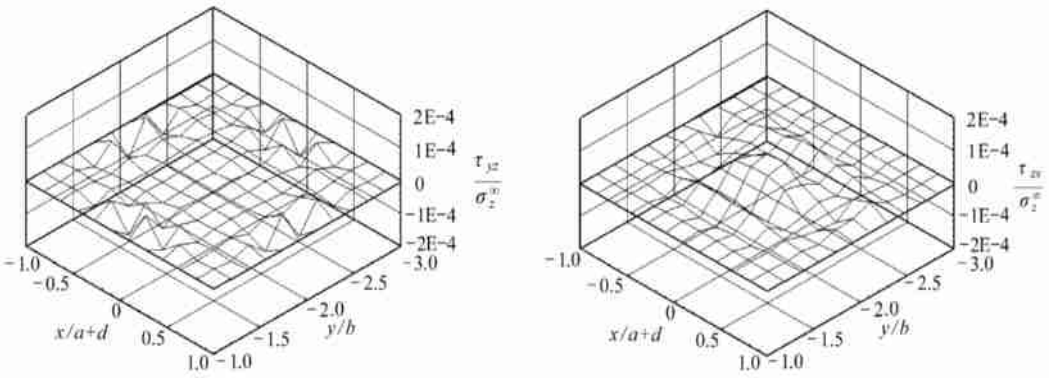
图3(a)~图3(c)分别给出了  $a_1/b_1 = 1, a_1 = a_2, b_1 = b_2$ , 且  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, a_1/d = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.06$  时图2所示裂纹1表面的应力残差, 这里配置点数为  $100(10 \times 10)$ , 多项式次数为  $m = n = 8$ . 结果表明应力残差  $(\sigma_z/\sigma_z^\infty + 1), \tau_{zx}/\sigma_z^\infty$  和  $\tau_{zy}/\sigma_z^\infty$  分别小于  $1.1 \times 10^{-5}$ . 从数值结果可以看出, 当存在两个界面裂纹时, 由于裂纹间的相互影响, 应力残差与单一界面裂纹时相比, 要发生变化. 结果表明, 对于不同形状的裂纹和双材料参数  $\varepsilon$ , 当  $a_1/d \geq 0.2$  时, 应力残差基本上在  $10^{-6}$  左右, 和单一裂纹时数量级基本相同; 当  $a_1/d = 0.5$  时, 应力残差在  $10^{-5}$  左右; 而当  $a_1/d = 0.8$  时, 应力残差则在  $10^{-4}$  左右. 当两个裂纹更接近时, 应力残差会更大, 这时, 可以通过增加配置点和增加多项式次数等方法降低计算应力残差.

### 3.3 与平面应变问题计算结果的比较



(a)  $\sigma_z/\sigma_z^\infty + 1 \approx 0$

如果矩形裂纹细长, 三维问题就可以退化成二维模型来求解, 使计算大大简化. 本文计算中取  $a_1/b_1 = 1/16, a_1 = a_2, b_1 = b_2$ , 应力强度因子与 Sun 等<sup>[12]</sup>的结果对比见表1. 表中点A和B的位置见图4. 从表1中可以看出, 用三维模型计算得到的结果要略小于二维时的情况, 二维界面裂纹的结果偏于保守. 对于本节所讨论的细长矩形裂纹的情况, 由计算结果可知, 裂纹扩展起始于长边中点, 随着两裂纹贯穿、扩展, 最后导致结构的断裂. 二维界面裂纹问题虽然计算简单, 却无法真



(b)  $\tau_{yz}/\sigma_z^\infty \approx 0$

(c)  $\sigma_{zx}/\sigma_z^\infty \approx 0$

$$(a_1/b_1 = 1, a_1 = a_2, b_1 = b_2, a_1/d = 0.5, \varepsilon = 0.06)$$

图3 应力残差的变化

实地描述裂纹扩展过程. 对结构进行设计和评价用三维的结果更合理. 王银邦<sup>[1]</sup>在研究均质材料双矩形裂纹的相互影响问题时, 也有同样类似的结论.

表1 与二维界面裂纹模型比较 ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, a_1/d = 1/3$ )

	$\varepsilon = 0$		$\varepsilon = 0.1$	
	$F_{I1}$	$F_{II1}$	$F_{I1}$	$F_{II1}$
点A(-d + a <sub>1</sub> , 0)	1.020 4	1.002 1	1.002 1	0.194 1
Sun <sup>[12]</sup> 点A	1.112 5	1.057 9	1.057 9	0.225 8
点B(-d - a <sub>1</sub> , 0)	1.015 3	1.001 4	1.001 4	0.183 0
Sun <sup>[12]</sup> 点B	1.051 7	1.002 6	1.002 6	0.193 3

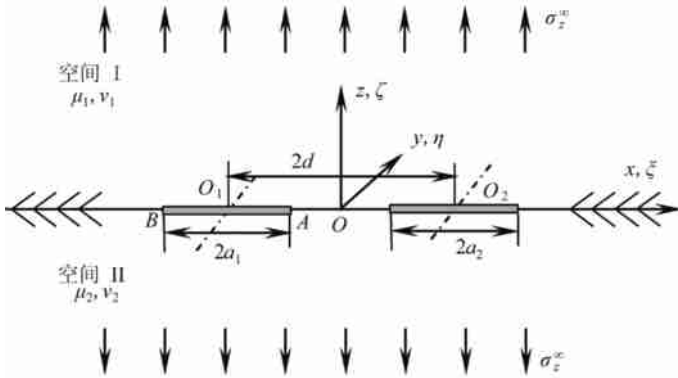
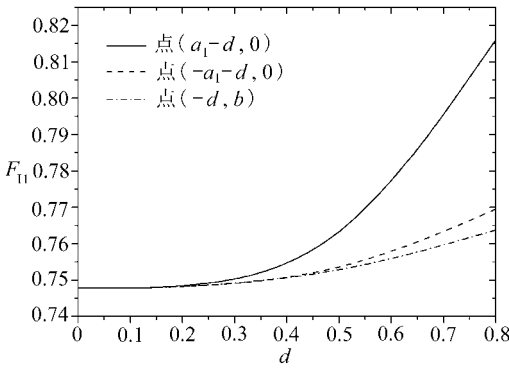


图4 二维计算模型示意图

### 3.4 一条裂纹的解

当界面上只有一个矩形裂纹时, 根据应力和裂纹几何形状的对称性, 在矩形对称边上的应力强度因子是相同的. 特别地, 当界面上存在一个正方形裂纹时, 应力强度因子  $K_I$  在 4 个边上都有对称性. 但当两个界面裂纹同时存在时, 由于相互影响, 原来的对称性不再存在. 以图 2 中裂纹 1 为例说明. 从图 5 和图 6 可见, 最大应力强度因子在点  $(-d + a_1, 0)$ . 两裂纹的相互影响与二者之间的距离有关. 当  $a_1/d \geq 0.2$  时, 也就是当裂纹间距离大于正方形裂纹边长 5 倍以上时, 相互影响基本上可以忽略. 对于均质材料双矩形裂纹问题, 当  $d \geq 4a_1$  时, 裂纹间

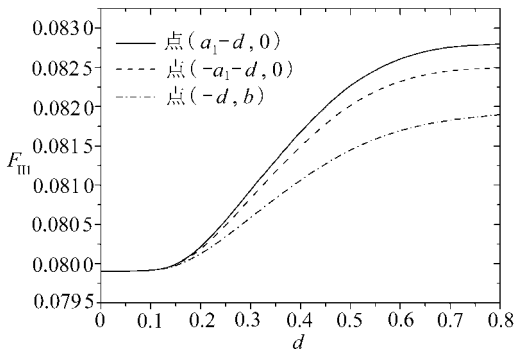


( $\varepsilon = 0.06, a_1/b_1 = 1, a_1 = a_2, b_1 = b_2$ )

图5 无量纲应力强度因子  $F_{II}$

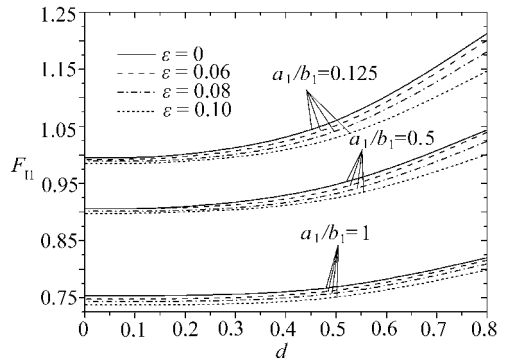
的相互影响可以忽略<sup>[1]</sup>. 当  $a_1/d = 0.5$  时, 应力强度因子的值只比单裂纹时增加 1% 左右; 但当  $a_1/d = 0.8$  时, 增加 10% 左右. 当两裂纹更接近时, 应力强度因子与裂纹间距离非线性快速增加. 例如当  $a_1/d = 0.9$  时,  $d = 1.11a_1$ , 增加为 20% 左右, 当  $a_1/d = 0.95$  时, 增加约为 35% 左右. 图 7 给出了应力强度因子随裂纹形状及不同的双材料参数  $\varepsilon$  变化的值, 计算表明, 最大的应力强度因子发生在矩形 ( $a_1 \neq b_1$ ) 长边的中点, 当裂纹从正方形变得细长时, 最大应力强度因子的变化幅度是不同的. 当  $a_1/b_1 > 1$  时, 最大的应力强度因子在边  $y = \pm b_1$  上, 随着界面裂纹长宽比的增加,

最大应力强度因子的增加幅度有所减弱, 裂纹首先在  $y$  方向上扩展; 而当  $a_1/b_1 \leq 1$  时, 最大应力强度因子在边  $x = -d \pm a_1$  上, 随着界面裂纹长宽比的增加, 最大应力强度因子的增加幅度逐渐增大, 裂纹首先在  $x$  方向上扩展. 计算表明, 当  $a_1/b_1 = 0.125, a_1/d = 0.8$  时, 最大应力强度因子相比于单个裂纹时的值增加了 22% 左右, 而当  $a_1/b_1 = 0.5$  时, 增加约为 15% 左右.



( $\varepsilon = 0.06, a_1/b_1 = 1, a_1 = a_2, b_1 = b_2$ )

图6 无量纲应力强度因子  $F_{III}$



( $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ )

图7 无量纲应力强度因子  $F_{II}$

## 4 结 论

利用断裂力学的超奇异微积分方程求解理论, 对三维无限接合体中存在任意多个界面裂纹的相互干扰问题进行了研究. 其结论如下:

1) 给出了双材料界面上存在多个界面裂纹时的超奇异微积分方程组. 对未知位移间断函数采用基本分布函数和多项式乘积的形式进行近似, 其中基本分布函数是根据应力的振荡奇异性选取的.

2) 在数值计算中, 与文献中平面应变问题的结果比较, 发现三维模型的计算结果要略小于二维时的情况. 由计算结果可知, 裂纹扩展起始于长边中点, 随着两裂纹贯穿、扩展, 最后导致结构的断裂. 二维界面裂纹问题虽然计算简单, 却无法真实地描述裂纹扩展过程. 对结构进行设计和评价用三维的结果更合理.

3) 给出了存在两个矩形界面裂纹时, 不同裂纹间距离与不同裂纹形状的应力强度因子值.

最大应力强度因子发生在矩形裂纹长边的中点. 对图 2 所示的问题, 当  $a_1/b_1 > 1$  时, 裂纹扩展是沿着  $y$  方向, 最大应力强度因子的增加幅度随着矩形长宽比的增加而减弱; 而当  $a_1/b_1 \leq 1$  时, 裂纹扩展是沿着  $x$  方向, 最大应力强度因子的增加幅度随着矩形长宽比的增加而增大; 当两个矩形裂纹接近时, 最大应力强度因子与裂纹间距离成非线性关系, 快速增大, 会导致结构的强度大大减低.

### [参 考 文 献]

- [1] 王银邦, 张晋兰. 两个共面矩形裂纹的边界元分析[J]. 兰州大学学报, 1995, **31**(4): 50-54.
- [2] 秦太验, 乐今朝, 汤任基. 三维无限体中两平行平片裂纹相互干扰的超奇异积分方程解法[J]. 固体力学学报, 1995, **16**(1): 41-47.
- [3] Zhou Z G, Wang B. The behavior of two parallel symmetry permeable interface cracks in a piezoelectric layer bonded to two half piezoelectric materials planes[J]. Internat J Solids and Structures, 2002, **39**(17): 4485-4500.
- [4] Isida M, Hirota K. Two parallel elliptical cracks in an infinite solid subjected to tension[J]. Internat J Fracture, 1985, **27**(1): 31-48.
- [5] Shi G C, Song Z F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO<sub>3</sub>/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> composite[J]. Theoret Appl Fracture Mech, 2003, **39**(3): 209-227.
- [6] 刘又文, 方棋洪, 蒋持平. 压电螺位错与含界面裂纹圆形涂层夹杂的干涉[J]. 力学学报, 2006, **38**(2): 185-190.
- [7] 朱伯靖, 秦太验. 磁电热弹耦合材料三维多裂纹超奇异积分法[J]. 力学学报, 2008, **40**(1): 46-58.
- [8] Rice J R, Sih G C. Plane problems of cracks in dissimilar media[J]. Trans ASME, Ser E, J Appl Mech, 1965, **32**(3): 418-423.
- [9] Chen H, Wang L M, Karimloo B L. Fracture analysis for multi-material system with an interface crack[J]. Comput Mater Sci, 1998, **12**(1): 1-8.
- [10] Nagai M, Ikeda T, Miyazaki N. Stress intensity factor analysis of a three dimensional interface crack [J]. Engng Fracture Mech, 2007, **74**(16): 2481-2497.
- [11] Noda N A, Oda K. Interaction effect of stress intensity factors for any number of collinear interface cracks[J]. Internat J Fracture, 1997, **84**(2): 117-128.
- [12] Sun Y Z, Zhang Z, Kitipornchai S, et al. Analyzing the interaction between collinear interfacial cracks by an efficient boundary element free method[J]. Internat J Engng Sci, 2006, **44**(1/2): 37-48.
- [13] Zhou Z G, Zhang P W, Wu L Z. Two parallel limited-permeable mode-I cracks or four parallel limited-permeable mode-I cracks in the piezoelectric materials[J]. Internat J Solids and Structure, 2007, **44**(11/12): 4184-4205.
- [14] Noda N A, Xu C H. Controlling parameter of the stress intensity factors for a planar interfacial crack in three-dimensional bimetals[J]. Internat J Solids and Structures, 2008, **45**(3/4): 1017-1031.
- [15] 徐春晖, 野田尚昭, 高濂康. せん断荷重下における種接合半無限体中の界面き裂の力大数の解析[J]. 日本機械学会論文集, 2007, **73**(731): 768-774.



# Analysis of Multiple Interfacial Cracks in Three Dimensional Bimaterials Using Hypersingular Integral-Differential Equation Method

XU Chun-hui<sup>1</sup>, QIN Tai-yan<sup>1</sup>, YUAN Li<sup>1</sup>, Noda Naō-Aki<sup>2</sup>

(1. College of Science, China Agricultural University,

Beijing 100083, P. R. China;

2. Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,

Kitakyushu, 804-8550, Japan)

**Abstract:** Using the finite-part integral concepts, a set of hypersingular integral-differential equations for multiple interfacial cracks in a three-dimensional infinite bimaterial subjected to arbitrary loads was derived. In the numerical analysis, unknown displacement discontinuities were approximated by the products of the fundamental density functions and power series, where the fundamental functions were chosen to express a two-dimensional interface crack exactly. As illustrative examples, the stress intensity factors for two rectangular interface cracks were calculated for various spacing, crack shape and elastic constants. It is shown that the stress intensity factors decrease with the increasing of crack spacing.

**Key words:** stress intensity factor; singular integral equation; interface crack; finite-part integral; boundary element method