文章编号: 1000-0887(2009) 03-0253-12

局部 FC-一致空间内的广义矢量拟变分包含组和广义矢量拟优化问题组*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在没有凸性结构的局部 FC-一致空间内, 引入和研究了某些新的广义矢量拟变分包含问题组和广义矢量理想(真, 帕雷多(Pareto), 弱) 拟优化问题组. 应用 KKM 型定理和 Himmelberg 型不动点定理, 首先对广义矢量拟变分包含问题组的解, 证明了某些新的存在性定理. 作为应用, 对广义矢量理想(真, 帕雷多, 弱) 拟优化问题组的解也得到了某些新的存在性结果.

关 键 词: KKM 型定理; Himmelberg 型不动点定理; 广义矢量拟变分包含问题组; 广义矢量拟优化问题组; 局部 FC-一致空间

中图分类号: O176.3; O177.92 文献标识码: A

引 言

设 Z 为具有一凸锥 C 的拓扑矢量空间. 对一给定集 $A \subset Z$, 我们能定义 A 关于 C 的理想, 真, 帕雷多(Pareto), 弱有效点(见后面的定义 1.1). 用 $\alpha\min(A/C)$ 表示这些有效点集, 当 $\alpha = \mathrm{I}$, $\alpha = \mathrm{P}$, $\alpha = \mathrm{Pr}$, $\alpha = \mathrm{W}$ 时分别对应于理想、真、帕雷多, 弱有效点情形.

设 X, Y 和 Z 是 Hausdorff 局部凸拓扑矢量空间, D 和 K 分别是 X 和 Y 的非空紧凸子集, C 是在 Z 内的一闭凸锥. 设 $S: D \times K \to 2^D$, $T: D \times K \to 2^K$ 和 $F: K \times D \times D \to 2^Z$ 是集值映射. Lin 和 Tan[1] 引入和研究了下面问题:

1) 上拟变分包含问题(UQVIP): 求 $(x, y) \in D \times K$ 使得
$$\begin{cases} x \in S(x, y), & y \in T(x, y), \\ F(y, x, x) \subseteq F(y, x, x) + C, & \forall x \in S(x, y); \end{cases}$$

2) 下拟变分包含问题(LQVIP): 求 $(x, y) \in D \times K$ 使得
$$\begin{cases} x \in S(x, y), & y \in T(x, y), \\ F(y, x, x) \subseteq F(y, x, x) - C, & \forall x \in S(x, y); \end{cases}$$

3) 一般矢量 α 拟-优化问题 $(\mathrm{GVQOP})_\alpha$: 求 $(x, y) \in D \times K$ 使得
$$\begin{cases} x \in S(x, y), \quad y \in T(x, y), \\ F(y, x, x) \cap \alpha\min(F(y, x, S(x, y))/C) \neq \emptyset; \end{cases}$$

---

* 收稿日期: 2008-09-24; 修订日期: 2009-01-21

基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(07ZA092; SZD0406)

作者简介: 丁协平(1938—), 男, 四川自贡人, 教授(Tel: +86-28-84780952; E-mail: xieping_ding@hotmail.com).

其中，α 分别是下列限定之一：理想、帕雷多、真、弱．称这样一对点 (x, y) 是 $(GVQOP)_\alpha$ 的一解．分别称集值映射 S, T 和 F 是约束、位势、和效用映射．这些问题在关于集值映射的最优化理论中起着主要作用，并且与矢量拟平衡问题、矢量拟变分不等式问题、不动点问题、拟鞍点问题、极小极大问题有很密切的关系，例如，见文献[1-8]和其中的参考文献．在适当假设下，Lin 和 Tan[1]对上述问题的解证明了某些存在性结果．

本文目的是在没有凸性结构的局部 FC-一致空间内，引入和研究新的广义矢量拟变分包含问题组和广义矢量 α 拟优化问题组．

设 I 是任何指标集．对每一 $i \in I$，令 X_i 和 Y_i 是拓扑空间，Z_i 是一拓扑矢量空间．设 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 和 $Y = \prod_{i\in I} Y_i$．对每一 $i \in I$，令 $S_i: X \times Y \to 2^{X_i}$，$T_i: X \times Y \to 2^{Y_i}$，$F_i: Y \times X \times X_i \to 2^{Z_i}$ 和 $C_i: X \to 2^{Z_i}$ 是集值映射，使得 $C_i(x)$ 是 Z_i 内的一闭凸锥．

我们将考虑下面广义矢量拟变分包含问题组(SGVQVIP)：

(Ⅰ) 求 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ 使得对每一 $i \in I$，

$$\begin{cases} \hat{x}_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y}), & \hat{y}_i \in T_i(\hat{x}, \hat{y}), \\ F_i(\hat{y}, \hat{x}, v_i) \subseteq F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i) + C_i(\hat{x}), & \forall v_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y}), \mathrm{SGVQVIP}(\text{Ⅰ}); \end{cases}$$

(Ⅱ) 求 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ 使得对每一 $i \in I$，

$$\begin{cases} \hat{x}_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y}), & \hat{y}_i \in T_i(\hat{x}, \hat{y}), \\ F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i) \subseteq F_i(\hat{y}, \hat{x}, v_i) - C_i(\hat{x}), & \forall v_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y}), \mathrm{SGVQVIP}(\text{Ⅱ}). \end{cases}$$

我们也考虑下面广义矢量 α 拟优化问题组 $(SGVQOP)_\alpha$：求 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ 使对每一 $i \in I$，

$$\begin{cases} \hat{x}_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y}), \quad \hat{y}_i \in T_i(\hat{x}, \hat{y}), \\ F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i) \cap \alpha\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, S_i(\hat{x}, \hat{y}))/C_i(\hat{x})) \neq \emptyset \quad (SGVQOP)_\alpha. \end{cases}$$

如果 I 单点集和 $C_i(x) = C$ 是 Z 内的一常数值闭凸锥，则 SGVQVIP(Ⅰ)，SGVQVIP(Ⅱ)和 $(SGVQOP)_\alpha$ 退化为由 Lin 和 Tan[1]引入的 UQVIP(1)，LQVIP(2) 和 $(GVQOP)_\alpha(3)$．

在本文中，由 Ding 等[9]在 FC-空间内得到的 KKM 型定理和 Ding[10]在局部 FC-一致空间内得到的 Himmelberg 型不动点定理，我们将在局部 FC-一致空间内对 SGVQVIP(Ⅰ)，SGVQVIP(Ⅱ)和 $(SGVQOP)_\alpha$ 的解，证明某些新的存在性定理．这些结果改进和推广了文献[1]中的已知结果，从局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集到没有凸性结构的非紧局部 FC-一致空间；从拟变分包含问题到广义矢量拟变分包含问题组和从 α 拟优化问题到广义矢量 α 拟优化问题组．

1 预备知识

对集 X，我们将分别用 2^X 和 $\langle X\rangle$ 表 X 的一切子集的族和一切非空有限子集的族．令 Δ_n 是 R^{n+1} 内具有顶点 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 的 n-维标准单形．对 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的任何非空子集 J，令 $\Delta_J = \mathrm{co}(\{e_j: j \in J\})$．

设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间．称 X 的一非空子集 M 在 X 内是紧闭(紧开)的，如果对 X 的每一紧子集 K，$M \cap K$ 在 K 内是闭(开)的．对一集值映射 $F: X \to 2^Y$，F 的定义域和图表示为

$$\mathrm{dom}(F) = \{x \in X: F(x) \neq \emptyset\},$$
$$\mathrm{Gr}(F) = \{(x, y) \in X \times Y: y \in F(x)\}.$$

称 F 是闭映射, 如果它的图 $\mathrm{Gr}(F)$ 在 $X\times Y$ 内是闭的. 称 F 是紧映射, 如果 $F(X)$ 的闭包 $\overline{F(X)}$ 在 Y 内是紧的. 称 F 在点 $x_0\in X$ 是上(下) 半连续的, 如果对每一满足 $F(x_0)\subseteq V(F(x)\cap V\neq\varnothing)$ 的开集 V, 存在 x_0 的一开邻域 $N(x_0)$ 使得对一切 $x\in N(x_0)$, $F(x)\subseteq V(F_0(x)\cap V\neq\varnothing)$. 称 F 在 X 上是上(下) 半连续的, 如果 F 在每一点 $x\in X$ 是上(下) 半连续的. 进一步设 Z 是具有一凸锥 C 的 Hausdorff 拓扑矢量空间. 我们表示 $l(C)=C\cap(-C)$. 如果 $l(C)=\{0\}$, 则称 C 是一尖锥.

定义 1.1[11] 设 Z 是具有一凸锥 C 的拓扑矢量空间和 A 是 Z 的非空子集.

(i) 称 $u\in Z$ 是 A 关于 C 的理想极小点, 如果对一切 $y\in A$, 有 $y-u\in C$. 用 $\mathrm{I}\min(A/C)$ 表示 A 关于 C 的理想极小点集;

(ii) 称 $u\in Z$ 是 A 关于 C 的帕雷多极小点, 如果不存在 $y\in A$ 使得 $u-y\in C\setminus l(C)$. 用 $\mathrm{Pr}\min(A/C)$ 表示 A 关于 C 的帕雷多极小点集;

(iii) 称 $u\in Z$ 是 A 关于 C 的真有效点, 如果存在不是全空间且包含 $C\setminus l(C)$ 在其内部的一凸锥 C 使得 $u\in\mathrm{P}\min(A/C)$, 用 $\mathrm{P}\min(A/C)$ 表示 A 关于 C 的真有效点集;

(iv) 如果 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$, 称 $u\in Z$ 是 A 关于 C 的弱有效点, 如果 $u\in\mathrm{P}\min(A/(\{0\}\cup\mathrm{int}C))$.

我们用 $\alpha\min(A/C)$ 表示 $\mathrm{I}\min(A/C)$, $\mathrm{P}\min(A/C)$, $\mathrm{Pr}\min(A/C)$ 和 $\mathrm{W}\min(A/C)$ 之一. 下面包含关系成立:

$$\mathrm{Pr}\min(A/C)\subseteq\mathrm{P}\min(A/C)\subseteq\mathrm{W}\min(A/C).$$

定义 1.2[1] 设 D 是一拓扑空间, C 是 Hausdorff 拓扑矢量空间 Z 内的一闭凸锥和 $F: D\to 2^Z$ 是一集值映射.

(i) 称 F 在点 $x\in\mathrm{dom}F$ 是上(下) G-半连续的, 如果对 Z 内原点的任何开邻域 V, 存在点 x 的邻域 U 使得

$$F(x)\subseteq F(x)+V+C,\ (F(x)\subseteq F(x)+V-C),\qquad\forall x\in U\cap\mathrm{dom}F;$$

(ii) 称 F 在 D 上是上(下) G-半连续的, 如果它在每一点 $x\in\mathrm{dom}F$ 是上(下) G-半连续的;

(iii) 称 F 在点 x 是 G-连续的, 如果它在点 x 同时是上 G-半连续和下 G-半连续的. 称 F 在 D 上是 G-连续, 如果它在每一点 $x\in\mathrm{dom}F$ 是 G-连续的.

注 1.1 我们观察到, 如果 $C=\{0\}$, 则 F 的上 G-半连续性将退化为 F 在通常意义下的上半连续性.

下面概念由 Ben-El-Mechaiekh 等[12]引入.

定义 1.3 称 (X,Γ) 是一 L-凸空间, 如果 X 是一拓扑空间和 $\Gamma:\langle X\rangle\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$ 是一映射, 使得对每一具有 $|N|=n+1$ 的 $N\in\langle X\rangle$, 存在一连续映射 $\varphi_N:\Delta_n\to\Gamma(N)$, 满足具有 $|A|=J+1$ 的 $A\in\langle N\rangle$ 蕴含 $\varphi_N(\Delta_J)\subseteq\Gamma(A)$, 其中 Δ_J 是对应于 A 的 Δ_n 的面.

下面有限连续拓扑空间(简称 FC-空间) 概念由 Ding[13]引入.

定义 1.4 称 (X,φ_N) 是一 FC-空间, 如果 X 是一拓扑空间且对每一 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$, 其中 N 内某系元素可以相同, 存在一连续映射 $\varphi_N:\Delta_n\to X$. 称 (X,φ_N) 的一子集 D 是 X 的一 FC-子空间, 如果对每一 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$ 和对每一 $\{x_{i_0},\cdots,x_{i_k}\}\subset N\cap D$, $\varphi_N(\Delta_k)\subseteq D$, 其中 $\Delta_k=\mathrm{co}(\{e_{i_j}: j=0,\cdots,k\})$.

注 1.2 由 FC-空间的 FC-子空间的定义, 容易看出 (X,φ_N) 的每一 FC-子空间也是一 FC-空间. 如果

$\{B_i\}_{i\in I}$ 是 (X, φ_N) 的一族FG-子空间且 $\bigcap_{i\in I}B_i \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{i\in I}B_i$ 也是 (X, φ_N) 的 FG-子空间, 其中 I 是任何指标集.

由比较定义, 显然拓扑矢量空间的任何凸子集, Horvath[14] 引入的任何 H-空间, Park 和 Kim[15] 引入的任何 G-凸空间和 Ben-El-Mechaiekh 等[12] 引入的任何 L-凸空间, 全都是 FG-空间. 是 FG-空间但不是 L-凸空间的某些例子已由 Ding[16] 的例 1.1 和 Ding[17] 的例 2.1 和例 2.2 给出. 因此, 在 FG-空间内研究各种非线性问题是十分合理和有价值的.

对一致空间的概念和性质, 我们参考 Kelly 和 Köthe 的文献[18] 和[19].

定义 1.5[10] 称 $(X, \mathscr{U}, \varphi_N)$ 是局部 FG-一致空间, 如果 $(X, \mathscr{U})$ 一致空间且 (X, φ_N) 是 FG-空间, 使得 $\mathscr{U}$ 有一环境(entourages)基 $\mathscr{B}$ 满足对每一 $V \in \mathscr{B}$, 每当 $M \subseteq X$ 是 X 的 FG-子空间时, 集 $\{x \in X: M \cap V[x] \neq \emptyset\}$ 也是 X 的 FG-子空间.

局部 FG-一致空间的例子已由 Ding[20] 的例 1.1 给出. 我们观察到在定义 1.5 内的局部 FG-一致空间类包含了局部凸拓扑矢量空间类, Tarafdar[21] 引入的局部 H-凸一致空间类和 Park[22] 引入的局部 G-凸空间类作为真子类. 我们也注意到定义 1.5 内的局部 FG-一致空间概念不同于 Ding[23-25] 引入的局部 FG-空间概念.

定义 1.6 设 (X, φ_N) 是 FG-空间, C 是在拓扑矢量空间 Z 内一闭凸锥和 $F: X \to 2^Z$ 是一集值映射.

(i) 称 F 在 X 上是上 G-拟凸的, 如果对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$, 每一 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq N$ 和每一 $x^* \in \varphi_N(\Delta_k)$, 存在 $j \in \{0, \cdots, k\}$ 使得 $F(x_{i_j}) \subseteq F(x^*) + C$;

(ii) 称 F 在 X 上是下 G-拟凸的, 如果对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$, 每一 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq N$ 和每一 $x^* \in \varphi_N(\Delta_k)$, 存在 $j \in \{0, \cdots, k\}$ 使得 $F(x^*) \subseteq F(x_{i_j}) - C$.

注 1.3 定义 1.6 内的概念推广了 Lin 和 Tan[1] 在其定义 2.3 内的相应概念到没有凸性结构的 FG-空间.

定义 1.7[9] 设 (X, φ_N) 是一 FG-空间. 称映射 $G: X \to 2^X$ 是一 KKM 型映射, 如果对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$ 和每一 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq N$,

$$\varphi_N(\Delta_k) \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j}),$$

其中, $\Delta_k = \mathrm{co}(\{e_{i_j}: j = 0, \cdots, k\})$.

下面结果是 Ding 等[9] 的具有 $Y = X$ 的定理 2.1 和 2.2 的特殊情形.

引理 1.1 设 (X, φ_N) 是 FG-空间. 如果 $G: X \to 2^X$ 是一具有紧闭(紧开)值的 KKM 型映射, 则对每一 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$,

$$\varphi_N(\Delta_n) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n} G(x_i)\right) \neq \emptyset.$$

此外, 如果 G 有紧闭值和存在 $M \in \langle X\rangle$ 使得 $\bigcap_{x\in M}G(x)$ 是紧的, 则 $\bigcap_{x\in X}G(x) \neq \emptyset$.

下面我们总假设所有一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 是 Hausdorff 的. 下面 Himmelberg 型不动点定理是 Ding[10] 的定理 2.1.

引理 1.2 设 $(X, \mathscr{U}, \varphi_N)$ 是局部 FG-一致空间和 $F: X \to 2^X$ 是具有非空闭值的紧上半连续集值映射, 使得对每一 $x \in X$, $F(x)$ 是 X 的 FG-子空间. 则 F 有一不动点 $x_0 \in X$, 即 $x_0 \in F(x_0)$.

注 1.4 引理 1.2 分别推广了 Tarafdar[21] 的定理 2.1 和 Park[22] 的定理 2 从局部 H-凸一致空间和局部 G-凸空间到局部 FG-一致空间.

下面结果是 Ding[10] 的定理 2.2.

引理 1.3 设 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 令 $(X_i,\mathscr{U}_i,\varphi_{N_i})$ 是局部 FG-一致空间, 具有对每一 $(X_i,\mathscr{U}_i)$ 有一由对称环境组成的基 $\mathscr{B}_i$. 令 $X=\prod_{i\in I}X_i$, $\mathscr{U}=\prod_{i\in I}\mathscr{U}_i$ 和对任何 $N\in\langle X\rangle$, $\varphi_N=\prod_{i\in I}\varphi_{N_i}$, 其中 $N_i=\pi_i(N)$. 则 $(X,\mathscr{U},\varphi_N)$ 也是一局部 FG-一致空间.

2 SGVQVIPs 解的存在性

引理 2.1[26] 设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间 $T:X\to 2^Y$ 是集值映射.

(i) 如果 T 是上半连续的具有闭值, 则 T 是闭的;

(ii) 如果 T 是闭的和 Y 是紧的, 则 T 是上半连续的;

(iii) 如果 X 是紧的和 T 是上半连续的具有紧值, 则 $T(X)$ 是紧的.

引理 2.2[27] 设 X 和 Y 是拓扑空间和 $G:X\to 2^Y$ 是集值映射. 则 G 在点 $x\in X$ 是下半连续的当且仅当对任何 $y\in G(x)$ 和满足 $x_\alpha\to x$ 的任何网 $\{x_\alpha\}$, 存在一网 $\{y_\alpha\}$ 使得 $y_\alpha\in G(x_\alpha)$ 和 $y_\alpha\to y$.

设 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 令 $(X_i,\mathscr{U}_i,\varphi_{N_i})$ 和 $(Y_i,\mathscr{U}_i',\varphi_{N_i}')$ 是局部 FG-一致空间和 Z_i 是拓扑矢量空间. 令 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在引理 1.3 内定义的局部 FG-一致空间. 令 $C_i:X\to 2^{Z_i}$ 是集值映射, 使得对每一 $x\in X$, $C_i(x)$ 是 Z_i 内的闭凸锥.

定理 2.1 假设对每一 $i\in I$:

(i) $S_i:X\times Y\to 2^{X_i}$ 是一紧连续集值映射具有闭值, 使得对每一 $(x,y)\in X\times Y$, $S_i(x,y)$ 是 X_i 的 FG-子空间;

(ii) $T_i:X\times Y\to 2^{Y_i}$ 是紧上半连续集值映射具有非空闭值, 使得对每一 $(x,y)\in X\times Y$, $T_i(x,y)$ 是 Y_i 的 FG-子空间;

(iii) $C_i:X\to 2^{Z_i}$ 在 X 上是上半连续的;

(iv) 对每一固定的 $x\in X$, $F_i:Y\times X\times X_i\to 2^{Z_i}$ 是下 $(-C_i(x))$-半连续的和上 $C_i(x)$-半连续的具有非空闭值;

(v) 对每一 $(x,y)\in X\times Y$, $F_i(y,x,\cdot):X_i\to 2^{Z_i}$ 在 X_i 上是上 $C_i(x)$-拟凸的, 则存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 使得对每一 $i\in I$, $\hat{x}_i\in S_i(\hat{x},\hat{y})$, $\hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和

$$F_i(\hat{y},\hat{x},v_i)\subseteq F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)+C_i(\hat{x}),\qquad \forall v_i\in S_i(\hat{x},\hat{y}),$$

即, $(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQVIP(Ⅰ) 的一个解.

证明 对每一 $i\in I$, 定义集值映射 $M_i:X\times Y\to 2^{X_i}$ 如下:

$$M_i(x,y)=\Big\{u_i\in S_i(x,y):F_i(y,x,v_i)\subseteq F_i(y,x,u_i)+C_i(x),\ \ \forall v_i\in S_i(x,y)\Big\},\qquad \forall (x,y)\in X\times Y.$$

对每一 $i\in I$ 和 $(x,y)\in X\times Y$, 定义集值映射 $P_{i,(x,y)}:S_i(x,y)\to 2^{S_i(x,y)}$ 如下

$$P_{i,(x,y)}(v_i)=\Big\{u_i\in S_i(x,y):\ F_i(y,x,v_i)\subseteq F_i(y,x,u_i)+C_i(x)\Big\},\qquad \forall v_i\in S_i(x,y).$$

我们主张对每一 $i\in I$ 和 $(x,y)\in X\times Y$, $P_{i,(x,y)}$ 是一 KKM 型映射. 如果不真, 则存在 $i\in I$,

$(x, y) \in X \times Y$, $N_i = \left\{v_{i,0}, \cdots, v_{i,n}\right\} \in \langle S_i(x, y)\rangle$ 和 $\left\{v_{i,i_0}, \cdots, v_{i,i_k}\right\} \subset N_i$ 使得

$$\varphi_{N_i}(\Delta_k) \not\subseteq \bigcup_{j=0}^{k} P_{i,(x,y)}(v_{i,i_j}).$$

因此存在 $v_i^* \in \varphi_{N_i}(\Delta_k)$ 使得

$$v_i^* \notin P_{i,(x,y)}(v_{i,i_j}), \qquad \forall j = 0, \cdots, k.$$

因为由(ⅰ), $S_i(x, y)$ 是 X_i 的 FG-子空间, 我们有 $v_i^* \in \varphi_{N_i}(\Delta_k) \subseteq S_i(x, y)$. 由此推得

$$F_i(y, x, v_{i,i_j}) \not\subseteq F_i(y, x, v_i^*) + C_i(x), \qquad \forall j = 0, \cdots, k.$$

但是, 由(ⅴ)和定义 1.6, 存在 $j \in \left\{0, \cdots, k\right\}$, 使得 $F_i(y, x, v_{i,i_j}) \subseteq F_i(y, x, v_i^*) + C_i(x)$. 这是一矛盾. 所以 $P_{i,(x,y)}$ 是一 KKM 型映射. 现在我们证明对每一 $i \in I$ 和 $v_i \in S_i(x, y)$, $P_{i,(x,y)}(v_i)$ 是闭的. 的确, 如果 $w_i \in \overline{P_{i,(x,y)}(v_i)}$, 则存在一网 $\left\{w_{i,\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq P_{i,(x,y)}(v_i)$ 使得 $w_{i,\lambda} \to w_i$. 我们有 $w_{i,\lambda} \in S_i(x, y)$ 和 $F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, w_{i,\lambda}) + C_i(x)$, 对一切 $\lambda \in \Lambda$ 成立. 因为 $S_i(x, y)$ 是闭集, 我们有 $w_i \in S_i(x, y)$. 因为由(ⅳ), $v_i \mapsto F_i(y, x, v_i)$ 在点 w_i 是上 $C_i(x)$-半连续的, 从定义 1.2 推得对 Z_i 内原点的任意给定的开邻域 V_i, 存在 w_i 的一相对开邻域 U_i 使得

$$F_i(y, x, z_i) \subseteq F_i(y, x, w_i) + V_i + C_i(x), \qquad \forall z_i \in U_i.$$

注意到 $w_{i,\lambda} \to w_i$, 存在 λ_0 使得对一切 $\lambda \geqslant \lambda_0$, $w_{i,\lambda} \in U_i$ 且因此我们有

$$F_i(y, x, w_{i,\lambda}) \subseteq F_i(y, x, w_i) + V_i + C_i(x), \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_0.$$

这蕴含对 Z_i 内原点的一切开邻域 V_i,

$$F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, w_{i,\lambda}) + C_i(x) \subseteq F_i(y, x, w_i) + V_i + C_i(x).$$

因为 $F_i(y, x, w_i) + C_i(x)$ 是闭的, 我们有

$$F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, w_i) + C_i(x).$$

因此 $w_i \in P_{i,(x,y)}(v_i)$ 和对每一 $i \in I$, $P_{i,(x,y)}(v_i)$ 是一闭集. 由(ⅰ), $\overline{S_i(X, Y)}$ 是紧的且 $P_{i,(x,y)}(v_i) \subseteq \overline{S_i(X, Y)}$. 由此推得对每一 $i \in I$, $P_{i,(x,y)}(v_i)$ 是紧的和 $v_i \in S_i(x, y)$. 由引理 1.1, $\bigcap_{v_i\in S_i(x,y)} P_{i,(x,y)}(v_i) \neq \varnothing$. 取 $u_i \in \bigcap_{v_i\in S_i(x,y)} P_{i,(x,y)}(v_i)$, 我们得到 $u_i \in S_i(x, y)$ 和 $F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, u_i) + C_i(x)$ 对一切 $v_i \in S_i(x, y)$ 成立. 因此对每一 $i \in I$ 和 $(x, y) \in X \times Y$, $M_i(x, y) \neq \varnothing$. 现在, 我们证明对每一 $i \in I$, M_i 是闭的. 的确, 如果 $((x, y), w_i) \in \overline{\mathrm{Gr}(M_i)}$, 则存在一网 $((x_\lambda, y_\lambda), w_{i,\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathrm{Gr}(M_i)$ 使得 $((x_\lambda, y_\lambda), w_{i,\lambda}) \to ((x, y), w_i)$. 我们有 $w_{i,\lambda} \in S_i(x_\lambda, y_\lambda)$ 和

$$F_i(y_\lambda, x_\lambda, v_i) \subseteq F_i(y_\lambda, x_\lambda, w_{i,\lambda}) + C_i(x_\lambda), \qquad \forall \lambda \in \Lambda,\ v_i \in S_i(x_\lambda, y_\lambda). \tag{1}$$

因为 $x_\lambda \to x$ 和由(ⅲ), C_i 在点 x 是上半连续的, 则对每一给定的 Z_i 内原点的开邻域 V_i, 存在 $\lambda_1 \in \Lambda$ 使得

$$C_i(x_\lambda) \subseteq C_i(x) + V_i, \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_1.$$

由式(1), 我们有

$$F_i(y_\lambda, x_\lambda, v_i) \subseteq F_i(y_\lambda, x_\lambda, w_{i,\lambda}) + C_i(x) + V_i, \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_1,\ v_i \in S_i(x_\lambda, y_\lambda). \tag{2}$$

由(ⅰ)和引理 2.1, S_i 是闭的且因此我们有 $w_i \in S_i(x, y)$. 因为 S_i 是下半连续的, 由引理 2.2, 对每一 $v_i \in S_i(x, y)$, 存在一网 $\left\{v_{i,\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ 使得 $v_{i,\lambda} \in S_i(x_\lambda, y_\lambda)$ 对每一 $\lambda \in \Lambda$ 成立和 $v_{i,\lambda} \to v_i$. 从式(2)推得

$$F_i(y_\lambda, x_\lambda, v_{i,\lambda}) \subseteq F_i(y_\lambda, x_\lambda, w_{i,\lambda}) + C_i(x) + V_i, \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_1. \tag{3}$$

因为 $(y_\lambda, x_\lambda, v_{i,\lambda}) \to (y, x, v_i)$ 和由(iv), F_i 在点(y, x, v_i) 是下$(-C_i(x))$-半连续的, 对每一给定的 V_i, 存在 $\lambda_2 \in \Lambda$ 使得

$$F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y_\lambda, x_\lambda, v_{i,\lambda}) + V_i + C_i(x), \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_2. \tag{4}$$

因为 $(y_\lambda, x_\lambda, w_{i,\lambda}) \to (y, x, w_i)$ 和由(iv), F_i 在点(y, x, w_i) 是上 $C_i(x)$-半连续的, 对此给定的 V_i, 存在 $\lambda_3 \in \Lambda$ 使得

$$F_i(y_\lambda, x_\lambda, w_{i,\lambda}) \subseteq F_i(y, x, w_i) + V_i + C_i(x), \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_3. \tag{5}$$

令 $\lambda' = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. 从式(3)至(5)推得

$$F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, w_i) + V_i + V_i + V_i + C_i(x), \qquad \forall v_i \in S_i(x, y).$$

因为 $F_i(y, x, w_i)$ 和 $C_i(x)$ 都是闭集, 我们有

$$F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, w_i) + C_i(x), \qquad \forall v_i \in S_i(x, y).$$

这就意味着 $((x, y), w_i) \in \mathrm{Gr}(M_i(x, y))$ 和 M_i 是一闭和紧集值映射且因此由引理2.1, 它在 $X \times Y$ 上是上半连续的. 现在我们证明对每一 $i \in I$ 和$(x, y) \in X \times Y$, $M_i(x, y)$ 是 X_i 的FC-子空间. 注意到

$$M_i(x, y) = S_i(x, y) \cap \left(\bigcap_{v_i \in S_i(x, y)} \left\{ u_i \in X_i : F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, u_i) + C_i(x) \right\} \right).$$

我们仅需证明对每一 $(x, y) \in X \times Y$ 和 $v_i \in S_i(x, y)$, 集

$$Q_{i,(x,y)}(v_i) = \left\{ u_i \in X_i : F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, u_i) + C_i(x) \right\}$$

是 X_i 的FC-子空间. 如果不真, 则存在 $N_i = \{u_{i,0}, \cdots, u_{i,n}\} \in \langle X_i \rangle$, $\{u_{i,i_0}, \cdots, u_{i,i_k}\} \subseteq N_i \cap Q_{i,(x,y)}(v_i)$ 和 $u_i^* \in \varphi_{N_i}(\Delta_k)$ 使得

$$F_i(y, x, v_i) \not\subseteq F_i(y, x, u_i^*) + C_i(x). \tag{6}$$

因为$\{u_{i,i_0}, \cdots, u_{i,i_k}\} \subseteq Q_{i,(x,y)}(v_i)$, 我们有

$$F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, u_{i,i_j}) + C_i(x), \qquad \forall j = 0, \cdots, k. \tag{7}$$

由条件(v)和定义1.5, 存在 $j \in \{0, \cdots, k\}$ 使得

$$F_i(y, x, u_{i,i_j}) \subseteq F_i(y, x, u_i^*) + C_i(x). \tag{8}$$

从式(7)和(8)推得

$$F_i(y, x, v_i) \subseteq F_i(y, x, u_i^*) + C_i(x).$$

这与式(6)矛盾. 因此 $Q_{i,(x,y)}(v_i)$ 是 X_i 的FC-子空间. 因为 $S_i(x, y)$ 是 X_i 的FC-子空间, 所以 $M_i(x, y) = S_i(x, y) \cap (\bigcap_{v_i \in S_i(x,y)} Q_{i,(x,y)}(v_i))$ 必是 X_i 的非空FC-子空间. 定义一集值映射 $R: X \times Y \to 2^{X \times Y}$ 如下

$$R(x, y) = \left[\prod_{i \in I} M_i(x, y) \right] \times \left[\prod_{i \in I} T_i(x, y) \right], \qquad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

由(ii)和文献[28]的引理3, $\prod_{i \in I} M_i(x, y)$, $\prod_{i \in I} T_i(x, y)$ 和 $R(x, y)$ 全都是紧上半连续集值映射具有非空闭值. 由引理1.3, X, Y 和 $X \times Y$ 全都是局部FC-一致空间, 且对每一$(x, y) \in X \times Y$, $\prod_{i \in I} M_i(x, y)$ 是 X 的FC-子空间, $\prod_{i \in I} T_i(x, y)$ 是 Y 的FC-子空间和 $R(x, y)$ 是 $X \times Y$ 的FC-子空间. 由引理1.2, 存在 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$, 使得 $\hat{x} \in \prod_{i \in I} M_i(\hat{x}, \hat{y})$ 和 $\hat{y} \in \prod_{i \in I} T_i(\hat{x}, \hat{y})$. 由此推得对每一 $i \in I$,

$$\hat{x}_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y})_i, \hat{y} \in T_i(\hat{x}, \hat{y}), \quad F_i(\hat{y}, \hat{x}, v_i) \subseteq F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i) + C_i(\hat{x}),$$
$$\forall v_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y}),$$

即, $(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQVIP(Ⅰ)的一个解. 证毕.

注 2.1　1) 如果对每一 $i\in I$ 和对一切 $x\in X$, $C_i(x)=C_i$, 则条件(iii)被平凡满足;

2) 如果 I 是单点集, X 和 Y 分别是局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集, Z 是一局部凸拓扑矢量空间和对每一 $x\in X$, $C(x)=C$ 是 Z 内一常值锥, 则定理 2.1 退化为 Lin 和 Tan[1] 的定理 3.6 和 3.8.

因此定理 2.1 在下列方面改进和推广了 Lin 和 Tan[1] 的定理 3.6 和 3.8: (a) 从 UQVIP(1) 到 SGVQVIP(Ⅰ); (b) 从局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集到没有凸性结构的局部 FC-一致空间; (c) S_i 和 T_i 的定义域 $X\times Y$ 可以不是紧的; (d) $C_i(x)$ 可以不是 Z_i 内的常值锥; (e) Z_i 可以不是局部凸的.

系 2.1　在定理 2.1 的假设下, 如果进一步假设对每一 $i\in I$, $F_i(y,x,x_i)\subset C_i(x)$ 对一切 $(x,y)\in X\times Y$ 成立, 则存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 使得对每一 $i\in I$, $\hat{x}_i\in S_i(\hat{x},\hat{y})$, $\hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和

$$F_i(\hat{y},\hat{x},v_i)\subseteq C_i(\hat{x}),\qquad \forall v_i\in S_i(\hat{x},\hat{y}).$$

证明　显然系 2.1 的结论根据定理 2.1 成立.

注 2.2　系 2.1 在更弱的假设下推广了 Lin 和 Tan[1] 的系 3.14 到上理想拟平衡问题组和到没有凸性结构的局部 FC-一致空间.

定理 2.2　如果定理 2.1 的条件(iv)和(v)被下面条件代替:

(iv)′ 对每一固定的 $x\in X$, $F_i: Y\times X\times X_i\to 2^{Z_i}$ 是下 $C_i(x)$-半连续和上 $(-C_i(x))$-半连续的具有非空闭值;

(v)′ 对每一 $(x,y)\in X\times Y$, $F_i(y,x,\bullet): X_i\to 2^{Z_i}$ 在 X_i 上是下 $C_i(x)$-拟凸的.

则存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 使得对每一 $i\in I$, $\hat{x}_i\in S_i(\hat{x},\hat{y})$, $\hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和

$$F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)\subseteq F_i(\hat{y},\hat{x},v_i)-C_i(\hat{x}),\qquad \forall v_i\in S_i(\hat{x},\hat{y}),$$

即 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQVIP(Ⅱ)的一个解.

证明　对每一 $i\in I$, 定义一集值映射 $M_i: X\times Y\to 2^{X_i}$ 如下:

$$M_i(x,y)=\left\{u_i\in S_i(x,y): F_i(y,x,u_i)\subseteq F_i(y,x,v_i)-C_i(x),\ \forall v_i\in S_i(x,y)\right\},\quad \forall (x,y)\in X\times Y.$$

则由使用定理 2.1 的证明中类似的论证, 容易证明定理 2.2 的结论成立.

注 2.3　如果 I 是单点集, X 和 Y 分别是局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集, Z 是一局部凸拓扑矢量空间和对每一 $x\in X$, $C(x)=C$ 是 Z 内一常值锥, 则定理 2.2 退化为 Lin 和 Tan[1] 的定理 3.7 和 3.9.

因此定理 2.2 在下列方面改进和推广了 Lin 和 Tan[1] 的定理 3.7 和 3.9: (a) 从 UQVIP(2) 到 SGVQVIP(Ⅱ); (b) 从局部凸拓扑矢量空间的紧凸子集到没有凸性结构的局部 FC-一致空间; (c) S_i 和 T_i 的定义域 $X\times Y$ 可以不是紧的; (d) $C_i(x)$ 可以不是 Z_i 内的常值锥; (e) Z_i 可以不是局部凸的.

系 2.2　在定理 2.2 的假设下, 如果进一步假设对每一 $i\in I$, $F_i(y,x,x_i)\cap C_i(x)\neq\emptyset$ 对一切 $(x,y)\in X\times Y$ 成立, 则存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 使得对每一 $i\in I$, $\hat{x}_i\in S_i(\hat{x},\hat{y})$, $\hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和

$$F_i(\hat{y},\hat{x},v_i)\cap C_i(\hat{x})\neq\emptyset,\qquad \forall v_i\in S_i(\hat{x},\hat{y}).$$

证明　由定理 2.2, 存在 $(\hat{x},\hat{y})\in X\times Y$ 使得得每一 $i\in I$, $\hat{x}_i\in S_i(\hat{x},\hat{y})$, $\hat{y}_i\in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和

$$F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)\subseteq F_i(\hat{y},\hat{x},v_i)-C_i(\hat{x}),\qquad \forall v_i\in S_i(\hat{x},\hat{y}).\tag{9}$$

由假设, $F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)\cap C_i(\hat{x})\neq\emptyset$. 选取 $w_i\in F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)\cap C_i(\hat{x})$. 对任何固定的 $v_i\in$

$S_i(\hat{x},\hat{y})$, 由式(9) 存在 $u_i \in F_i(\hat{y},\hat{x},v_i)$ 和 $c_i \in C_i(\hat{x})$ 使得 $w_i = u_i - c_i$ 且因此有 $u_i = w_i + c_i \in C_i(\hat{x}) + C_i(\hat{x}) = C_i(\hat{x})$. 由此推得 $u_i \in F_i(\hat{y},\hat{x},v_i) \cap C_i(\hat{x})$. 所以得到

$$F_i(\hat{y},\hat{x},v_i) \cap C_i(\hat{x}) \neq \emptyset, \qquad \forall v_i \in S_i(\hat{x},\hat{y}).$$

证毕.

注 2.4 系 2.2 在更弱的假设下, 推广了 Lin 和 Tan[1] 的系 3.18 到下理想拟平衡问题组和到没有凸性结构的局部 FC-一致空间. 我们也能推广 Lin 和 Tan[1] 的系 3.10~3.11 和定理 3.12~3.13 到相应的广义矢量拟变分包含问题组和到局部 FC-一致空间. 为了节省篇幅, 我们省去.

定理 2.3 在定理 2.1 的假设下, 如果对每一 $(x,y) \in X \times Y$,

$(\mathrm{I}\min(F_i(y,x,x_i)/C_i(x)) \neq \emptyset$, 则 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQVIP (Ⅰ) 的一个解当且仅当它是 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{I}}$ 的一个解.

证明 首先我们假设 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 SGVQVIP (Ⅰ) 的一个解. 对每一 $i \in I$, 选取 $v_i^* \in \mathrm{I}\min(F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)/C_i(\hat{x}))$. 显然对每一 $i \in I$, $F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i) \subseteq v_i^* + C_i(\hat{x})$. 因此我们有对每一 $i \in I$,

$$F_i(\hat{y},\hat{x},v_i) \subseteq F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i) + C_i(\hat{x}) \subseteq v_i^* + C_i(\hat{x}), \qquad \forall v_i \in S_i(\hat{x},\hat{y}).$$

这就蕴含 $v_i^* \in \mathrm{I}\min(F_i(\hat{y},\hat{x},S_i(\hat{x},\hat{y}))/C_i(\hat{x}))$ 且因此

$$F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i) \cap (\mathrm{I}\min(F_i(\hat{y},\hat{x},S_i(\hat{x},\hat{y}))/C_i(\hat{x})) \neq \emptyset.$$

这就证明了 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{I}}$ 的一个解. 现在假设 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{I}}$ 的一个解. 对每一 $i \in I$, 选取 $v_i^* \in \mathrm{I}\min(F_i(\hat{y},\hat{x},S_i(\hat{x},\hat{y}))/C_i(\hat{x}))$, 我们有

$$F_i(\hat{y},\hat{x},v_i) \subseteq v_i^* + C_i(\hat{x}) \subseteq F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i) + C_i(\hat{x}), \qquad \forall v_i \in S_i(\hat{x},\hat{y}).$$

这就意味着 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{I}}$ 的一个解.

注 2.5 定理 2.3 在很弱的假设下, 推广了 Lin 和 Tan[1] 的系 3.15 到 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{I}}$ 和到没有凸性结构的局部 FC-一致空间.

定理 2.4 在定理 2.1 的假设下, 如果对每一 $(x,y) \in X \times Y$, $F_i(y,x,x_i)$ 是紧的, 则 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{P}}$ 有一解.

证明 由定理 2.1, 存在 $(\hat{x},\hat{y}) \in X \times Y$ 使得对每一 $i \in I$, $\hat{x}_i \in S_i(\hat{x},\hat{y})$, $\hat{y}_i \in T_i(\hat{x},\hat{y})$ 和

$$F_i(\hat{y},\hat{x},v_i) \subseteq F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i) + C_i(\hat{x}), \qquad \forall v_i \in S_i(\hat{x},\hat{y}). \tag{10}$$

由假设, $F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)$ 在 Z_i 内是紧的, 我们有

$$\mathrm{P}\min(F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)/C_i(\hat{x})) \neq \emptyset.$$

假设 $v_i^* \in \mathrm{P}\min(F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)/C_i(\hat{x}))$ 和 $v_i^* \notin \mathrm{P}\min(F_i(\hat{y},\hat{x},S_i(\hat{x},\hat{y})/C_i(\hat{x}))$, 则存在 $v_i \in F_i(\hat{y},\hat{x},S_i(\hat{x},\hat{y}))$ 满足 $v_i \in F_i(\hat{y},\hat{x},v_i')$ 对某 $v_i' \in S_i(\hat{x},\hat{y})$ 成立使得

$$v_i^* - v_i \in C_i(\hat{x}) \setminus l(C_i(\hat{x})). \tag{11}$$

从式(10) 推得 $v_i \in F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i) + C_i(\hat{x})$ 且所以存在 $w_i \in F_i(\hat{y},\hat{x},\hat{x}_i)$ 和 $c_i \in C_i(\hat{x})$ 似的 $v_i = w_i + c_i$ 和

$$v_i - w_i \in C_i(\hat{x}). \tag{12}$$

从式(11) 和(12) 推得

$$v_i^* - w_i = v_i^* - v_i + v_i - w_i \in C_i(\hat{x}) \setminus l(C_i(\hat{x})) + C_i(\hat{x}) \subseteq$$

$$C_i(\hat{x}) \setminus l(C_i(\hat{x})).$$

这就与事实 $v_i^* \in \mathrm{P}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i)/C_i(\hat{x}))$ 相矛盾. 所以, 我们得到

$$F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i) \cap \mathrm{P}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, S_i(\hat{x}, \hat{y}))/C_i(\hat{x})) \neq \emptyset.$$

证毕.

注 2.6 定理 2.4 在更弱的假设下, 推广了 Lin 和 Tan[1] 的系 3.17 到 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{P}}$ 和到没有凸性结构的局部 FG-一致空间.

定理 2.5 在定理 2.1 的假设下, 如果对每一 $i \in I$ 和 $x \in X$, 存在不是全空间的凸锥 $C_i(x)$ 包含 $C_i(x) \setminus \{0\}$ 在其内部, 并且对每一 $(x, y) \in X \times Y$, $F_i(y, x, x_i)$ 是紧的, 则 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{Pr}}$ 有一解.

证明 因为对每一 $i \in I$ 和 $x \in X$, $C_i(x)$ 有假设中提到的性质, 于是对 Z_i 的任何紧子集 A_i, 我们有 $\mathrm{Pr}\min(A_i/C_i(x)) \neq \emptyset$ (由使用锥 $C_i^*(x) = \{0\} \cup \mathrm{int}C_i(x)$, 我们能证明 $\mathrm{P}\min(A_i/C_i^*(x)) \neq \emptyset$, 例如, 见文献[11] 内第二章系 3.15). 于是, 应用定理 2.1, 存在 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ 使得对每一 $i \in I$, $\hat{x}_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{y}_i \in T_i(\hat{x}, \hat{y})$ 和

$$F_i(\hat{y}, \hat{x}, v_i) \subseteq F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i) + C_i(\hat{x}), \qquad \forall v_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y}). \tag{13}$$

$F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i)$ 的紧性蕴含

$$\mathrm{Pr}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i)/C_i(\hat{x})) \neq \emptyset.$$

选取 $v_i^* \in \mathrm{Pr}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i)/C_i(\hat{x}))$, 我们证明 $v_i^* \in \mathrm{Pr}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, S_i(\hat{x}, \hat{y}))/C_i(\hat{x}))$.

如果 $v_i^* \notin \mathrm{Pr}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, S_i(\hat{x}, \hat{y}))/C_i(\hat{x}))$, 则存在 $v_i \in F_i(\hat{y}, \hat{x}, S_i(\hat{x}, \hat{y}))$ 使得

$$v_i^* - v_i \in C_i^*(\hat{x}) \setminus l(C_i^*(\hat{x})). \tag{14}$$

假设 $v_i \in F_i(\hat{y}, \hat{x}, w_i)$ 对某 $w_i \in S_i(\hat{x}, \hat{y})$ 成立. 从式(13) 推得存在 $v_i' \in F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i)$ 使得 $v_i - v_i' = c_i \in C_i(\hat{x})$. 如果 $c_i = 0$, 则 $v_i = v_i'$ 和 $v_i^* - v_i' \in C_i^*(\hat{x}) \setminus l(C_i^*(\hat{x}))$. 如果 $c_i \neq 0$, 由使用式(14), 我们有

$$v_i^* - v_i' = v_i^* - v_i + v_i - v_i' \in C_i^*(\hat{x}) \setminus l(C_i^*(\hat{x})) + C_i(\hat{x}) \setminus \{0\} \subseteq$$
$$C_i^*(\hat{x}) \setminus l(C_i^*(\hat{x})).$$

所以我们有 $v_i^* - v_i' \in C_i^*(\hat{x}) \setminus l(C_i^*(\hat{x}))$. 注意到 $v_i' \in F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i)$ 和 $v_i^* \in \mathrm{Pr}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, S_i(\hat{x}, \hat{y}))/C_i(\hat{x}))$, 我们得到一矛盾. 因此我们有对每一 $i \in I$,

$$F_i(\hat{y}, \hat{x}, \hat{x}_i) \cap \mathrm{Pr}\min(F_i(\hat{y}, \hat{x}, S_i(\hat{x}, \hat{y}))/C_i(\hat{x})) \neq \emptyset,$$

即, $(\hat{x}, \hat{y})$ 是 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{Pr}}$ 的一个解.

注 2.7 定理 2.5 在更弱的假设下, 推广了 Lin 和 Tan[1] 的系 3.16 到 $(\mathrm{SGVQOP})_{\mathrm{Pr}}$ 和到没有凸性结构的局部 FG-一致空间.

[参 考 文 献]

[1] Lin L J, Tan N X. On quasivariational inclusions of type I and related problems[J]. J Glob Optim, 2007, **39**(3): 393-407.

[2] Hai N X, Khanh P Q. Existence of solutions to general quasiequilibrium problems and applications [J]. J Optim Theory Appl, 2007, **133**(3): 317-327.

[3] Hai N X, Khanh P Q. The solution existence of general variational inclusion problems[J]. J Math

Anal Appl, 2007, **328**(2): 1268-1277.

[4] Hai N X, Khanh P Q. Systems of set-valued quasivariational inclusion problems[J]. J Optim Theory Appl, 2007, **135**(1): 55-67.

[5] Lin L J, Shie H J. Existence theorems of quasivariational inclusion problems with applications to bilevel problems and mathematical programs with equilibrium constraint[J]. J Optim Theory Appl, 2008, **138**(3): 445-457.

[6] Lin L J. Systems of generalized quasivariational inclusion problems with applications to variational analysis and optimization problems[J]. J Glob Optim, 2007, **38**(1): 21-39.

[7] Lin L J, Wang S Y, Chuang C S. Existence theorems of systems of variational inclusion problems with applications[J]. J Glob Optim, 2008, **40**(4): 751-764.

[8] 丁协平, 黎进三, 姚任之. 局部FC-一致空间内的广义约束多目标对策[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(3): 272-280.

[9] DING Xie-ping, Liou Y C, Yao J C. Generalized R-KKM type theorems in topological spaces with applications[J]. Appl Math Lett, 2005, **18**(12): 1345-1350.

[10] DING Xie-ping. Generalized game and system of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally FC-uniform spaces[J]. Nonlinear Anal, 2008, **68**(4): 1028-1036.

[11] Luc D T. Theory of Vector Optimization[M]. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. **319**. Berlin, Germany: Springer Verlag, 1989.

[12] Ben-El-Mechaiekh H, Chebbi S, Flornzano M, et al. Abstract convexity and fixed points[J]. J Math Anal Appl, 1998, **222**(1): 138-150.

[13] DING Xie-ping. Maximal element theorems in product FC-spaces and generalized games[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 29-42.

[14] Horvath C D. Contractibility and generalized convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341-357.

[15] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 551-571.

[16] 丁协平. 局部FC-一致空间内凝聚映象的极大元和广义对策及应用(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(12): 1392-1399.

[17] DING Xie-ping. Minimax inequalities and fixed points of expansive set-valued mappings with noncompact and nonconvex domains and ranges in topological spaces[J]. Nonlinear Anal. DOI: 10.1016/j.na.2008.01.018.

[18] Kelly J L. General Topology[M]. Princeton N J: Van Nostrand, 1955.

[19] Köthe G. Topological Vector Spaces Ⅰ[M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1983.

[20] 丁协平. 局部FC-一致空间内凝聚映象的极大元和广义对策及应用(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(12): 1400-1410.

[21] Tarafdar E. Fixed point theorems in locally H-convex uniform spaces[J]. Nonlinear Anal, 1997, **29**(9): 971-978.

[22] Park S. Fixed point theorems in locally G-convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2002, **48**(6): 869-879.

[23] DING Xie-ping. generalizations of Himmelberg type fixed point theorems in locally FC-spaces[J]. J Sichuan Normal Univ (NS), 2006, **29**(1): 1-6.

[24] DING Xie-ping. System of generalized vector quasi-equilibrium problems in locally FC-spaces[J]. Acta Math Sinica, 2006, **22**(5): 1529-1538.

[25] DING Xie-ping. Weak Pareto equilibria for generalized constrained multiobjective games in locally FC-spaces[J]. Nonlinear Anal, 2006, **65**(3): 538-545.

[26] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.

[27] Aliprantis C D, Border K C. Infinite Dimensional Analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
[28] Fan K. Fixed-points and minimax theorems in locally convex topological linear spaces[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1952, **38**(1): 131-136.

Systems of Generalized Vector Quasi-Variational Inclusions and Systems of Generalized Vector Quasi-Optimization Problems in Locally FC-Uniform Spaces

DING Xie-ping
(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University
Chengdu, Sichuan 610066, P.R. China)

Abstract: Some new systems of generalized vector quasi-variational inclusion problems and system of generalized vector ideal(resp., proper, Pareto, weak) quasi-optimization problems in locally FC-uniform spaces without convexity structure are introduced and studied. By using KKM type theorem and Himmelberg type fixed point theorem, some new existence theorems of solutions for the systems of generalized vector quasi-variational inclusion problems were first proved. As applications, some new existence results of solutions for systems of generalized vector quasi-optimization problems were obtained also.

Key words: KKM type theorem; Himmelberg type fixed point theorem; generalized vector quasi-variational inclusions; system of generalized vector optimization problems; locally FC-uniform space