应用数学和力学,第24卷 第1期(2004年1月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2004)01-0015-07

压电弹性动力学中第二类 Volterra 积分方程的数值解法*

丁皓江[1], 王惠明[2], 陈伟球[1]

(1.浙江大学 建工学院 土木系,杭州 310027;
2.浙江大学 机械与能源学院 力学系,杭州 310027)

(我刊编委丁皓江来稿)

摘要: 对于径向变形的压电空心圆柱和空心球弹性动力学问题,丁皓江等最近的研究表明,可以将它转变为关于一个时间函数的第二类 Volterra 积分方程,使求解工作得到极大的简化,又使探索第二类 Volterra 积分方程的快速而又高精度的数值解法成为一个关键. 采用插值逼近方法,成功地导出了两个新型的递推公式,不仅计算速度快,且在较大时间步长时仍具有足够的精度,有着广泛的应用价值.

关 键 词: 压电; 弹性动力学; Volterra 积分方程; 数值解; 递推公式

中图分类号: O347.1;O241.8　　**文献标识码:** A

引　言

在科学和工程问题中,常常会遇到 Volterra 积分方程,因此它受到众多学者的关注[1~7]. 对于一些特殊情形,可以找到 Volterra 积分方程的精确解[6,7],更多时候需要用数值方法去求近似解,在这些数值解法中,通常都是就一般的核函数而列的,这使得在应用时,在精度和效率上不理想. 在力学的近期文献中,Souchet 利用第二类 Volterra 积分方程,对具有摩擦的三维刚体碰撞问题进行了分析[8],他所采用的数值法是求面积法[2],也是一种通用方法. 径向变形的纯弹性空心圆柱和空心球的弹性动力学问题已有许多研究[9~12],但是压电空心圆柱和空心球的弹性动力学问题一直未见到报道,最近我们在研究压电空心圆柱和空心球的弹性动力学问题时,成功地将它们转化成如下形式的第二类 Volterra 积分方程[13~15]:

$$\phi(t) = E_1 D(t) + \sum_{i=1}^{m} E_{2i}\int_0^t D(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

式中 $\phi(t)$ 是与电势和外载荷有关的时间 t 的已知函数;$D(t)$ 是与电位移有关的时间的 t 待求函数;$\omega_i(i=1,2,\cdots,m)$ 与某一特征方程的正根有关,一般有无穷多个,从小到大依次排列;m 表示数值计算时,截止到 ω_m 的前 m 项;而 $E_1, E_{2i}(i=1,2,\cdots,m)$,均是已知常数,其中 E_{2i} 与

---

* 收稿日期: 2002-11-01; 修订日期: 2003-08-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172075)
作者简介: 丁皓江(1934—),男,江苏常州人,教授,博导(联系人. Tel:86-571-7993057; E-mail: hjding@mail.hz.zj.cn).

ω_i 有关.

注意到方程(1)的核函数是三角函数,而这一核函数与多项式的乘积能积出显式,本文利用这性质,对时间区间内的 $D(t)$ 进行分段多项式插值,写出积分显式后,构造递推公式,能逐点逐点地给出数值结果,从而快速地得到 $D(t)$ 的一个良好近似解.

对于上述问题,如果方程(1)中的已知函数 $\phi(t)$ 是给定的可导函数,则有

$$\dot{\phi}(t) = E_1\dot{D}(t) + \sum_{i=1}^{m} E_{2i}\omega_i\int_0^t D(\tau)\cos\omega_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2}$$

式中字母上一点表示对 t 求导数. 当 $t = t_0 = 0$ 时,由式(1)和(2)很容易求得

$$D(t_0) = \phi(t_0)/E_1,\ \dot{D}(t_0) = \dot{\phi}(t_0)/E_1, \tag{3,4}$$

式中 $\dot{D}(t_0) = (\mathrm{d}D(t)/\mathrm{d}t)\mid_{t=t_0}$ 和 $\dot{\phi} = (\mathrm{d}\phi(t)/\mathrm{d}t)\mid_{t=t_0}$. 下面给出两种递推公式,一种采用线性插值,另一种采用 Hermite 插值.

1 递推公式一

在区间 $[t_{j-1}, t_j]$ 上采用线性插值函数,

$$D(t) = \zeta_j(t)D(t_{j-1}) + \eta_j(t)D(t_j) \qquad (j = 1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

式中

$$\zeta_j(t) = \frac{t-t_j}{t_{j-1}-t_j},\ \eta_j(t) = \frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} \qquad (j = 1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

将式(5)代入式(1)得

$$\phi(t_j) = E_1 D(t_j) + \sum_i E_{2i}\sum_{k=1}^{j}[A_{ijk}D(t_{k-1}) + b_{ijk}D(t_k)] \tag{7}$$

式中

$$\begin{cases} A_{ijk} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\zeta_k(\tau)\sin\omega_i(t_j-\tau)\mathrm{d}\tau, \\ B_{ijk} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\eta_k(\tau)\sin\omega_i(t_j-\tau)\mathrm{d}\tau, \end{cases} \qquad (k = 1,2\cdots j; j = 1,2\cdots n). \tag{8}$$

由式(7),可得到 $D(t_j)$ 的递推公式

$$D(t_j) = \frac{\phi(t_j) - \sum_{i=1}^{m}E_{2i}\sum_{k=1}^{j-1}[A_{ijk}D(t_{k-1}) + B_{ijk}D(t_k)] - D(t_{j-1})\sum_{i=1}^{m}E_{2i}A_{ijj}}{E_1 + \sum_{i=1}^{m}E_{2i}B_{ijj}} \qquad (j = 1,2,\cdots,n), \tag{9}$$

根据式(3)计算出 $D(t_0)$ 后,可由式(9)依次求得 $D(t_j)$ $(j = 1,2,\cdots,n)$.

2 递推公式二

在区间上 $[t_{j-1}, t_j]$ 上采用 Hermite 二节点三次插值函数,

$$\begin{aligned} D(t) = {} & H_{0j}(t)D(t_{j-1}) + H_{1j}\ D(t_j) + \\ & H_{2j}(t)\dot{D}(t_{j-1}) + H_{3j}\ \dot{D}(t_j) \qquad (j = 1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{10}$$

式中 $\dot{D}(t_j) = (\mathrm{d}D(t)/\mathrm{d}t)\mid_{t=t_j}$ 和

$$\begin{cases} H_{0j}(t) = \left(1 + 2\dfrac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)\left(\dfrac{t - t_j}{t_j - t_{j-1}}\right)^2, \\ H_{1j}(t) = \left(1 + 2\dfrac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}}\right)\left(\dfrac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2, \\ H_{2j}(t) = (t - t_{j-1})\left(\dfrac{t - t_j}{t_j - t_{j-1}}\right)^2, \\ H_{3j}(t) = (t - t_j)\left(\dfrac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 \qquad (j = 1,2,\cdots,n). \end{cases} \tag{11}$$

将式(10)代入式(1)和式(2)得

$$\begin{cases} \phi(t_j) = E_1 D(t_j) + \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i} \sum\limits_{k=1}^{j} [A_{0ijk}D(t_{k-1}) + A_{1ijk}D(t_k) + \\ \qquad A_{2ijk}\dot{D}(t_{k-1}) + A_{3ijk}\dot{D}(t_k)], \\ \dot{\phi}(t_j) = E_1 \dot{D}(t_j) + \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}\omega_i \sum\limits_{k=1}^{j} [B_{0ijk}D(t_{k-1}) + B_{1ijk}D(t_k) + \\ \qquad B_{2ijk}\dot{D}(t_{k-1}) + B_{3ijk}\dot{D}(t_k)], \end{cases} \tag{12}$$

式中 $\dot{\phi}(t_j) = (\mathrm{d}\phi(t)/\mathrm{d}t)\mid_{t=t_j}$ 和

$$\begin{cases} A_{lijk} = \displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k} H_{lk}(\tau)\sin\omega_i(t_j - \tau)\mathrm{d}\tau, \\ B_{lijk} = \displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k} H_{lk}(\tau)\sin\omega_i(t_j - \tau)\mathrm{d}\tau, \end{cases}$$
$$(l = 0,1,2,3;\ k = 1,2,\cdots,j; j = 1,2,\cdots,n). \tag{13}$$

由式(12),可得到 $D(t_j)$ 和 $\dot{D}(t_j)$ 的递推公式

$$D(t_j) = \frac{f_{1j}a_{22j} - f_{2j}a_{12j}}{a_{11j}a_{22j} - a_{12j}a_{21j}},\ \dot{D}(t_j) = \frac{f_{2j}a_{11j} - f_{1j}a_{21j}}{a_{11j}a_{22j} - a_{12j}a_{21j}} \qquad (j = 1,2,\cdots,n), \tag{14}$$

式中

$$\begin{cases} a_{11j} = E_1 + \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}A_{1ijj},\ a_{12j} = \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}A_{3ijj}, \\ a_{21j} = \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}\omega_i B_{1ijj}, a_{22j} = E_1 + \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}\omega_i B_{3ijj}, \\ f_{1j} = \phi(t_j) - \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i} \sum\limits_{k=1}^{j-1} [A_{0ijk}D(t_{k-1}) + A_{1ijk}D(t_k) + A_{2ijk}\dot{D}(t_{k-1}) + \\ \qquad A_{3ijk}\dot{D}(t_k)] - \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}[A_{0ijj}D(t_{j-1}) + A_{2ijj}\dot{D}(t_{k-1})], \\ f_{2j} = \dot{\phi}(t_j) - \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}\omega_i \sum\limits_{k=1}^{j-1} [B_{0ijk}D(t_{k-1}) + B_{1ijk}D(t_k) + B_{2ijk}\dot{D}(t_{k-1}) + \\ \qquad B_{3ijk}\dot{D}(t_k)] - \sum\limits_{i=1}^{m} E_{2i}\omega_i[B_{0ijj}D(t_{j-1}) + B_{2ijj}\dot{D}(t_{k-1})]. \end{cases} \tag{15}$$

根据式(3)和(4)计算出 $D(t_0)$ 和 $\dot{D}(t_0)$ 后,可由式(14)依次求得 $D(t_j)$ 和 $\dot{D}(t_j)(j = 1,2,\cdots, n)$.

3 算 例

在算例中,我们取 $m = 30$ 及

ω_i = {1.427 8, 7.479 2, 14.693 8, 21.969 9, 29.260 5, 36.556 8, 43.855 9, 51.156 6, 58.458 3, 65.760 7, 73.063 5, 80.366 7, 87.670 1, 94.973 7, 102.277 5, 109.581 4, 116.885 4, 124.189 5, 131.493 6, 138.797 8, 146.102 1,153.406 4, 160.710 7, 168.015, 175.319 4, 182.623 8, 189.928 3, 197.232 7, 204.537 2,211.841 7} ;

E_1 = - 0.691 662;

E_{2i} = {0.104 0, 0.606 69, 0.009 364 3, 0.197 33,0.004 426 3, 0.117 959, 0.002 915 96, 0.084 163 6, 0.002 177 6, 0.065 429 9, 0.001 738 5, 0.053 52, 0.001 447 2, 0.045 28, 0.001 239 6, 0.039 24, 0.001 084 2, 0.034 62, 0.000 963 43, 0.030 976, 0.000 866 9, 0.028 025, 0.000 787 96, 0.025 587, 0.000 722 2, 0.023 54, 0.000 666 6, 0.021 796, 0.000 618 94, 0.020 296}.

而 $\phi(t)$ 则由所给出的 $D(t)$ 理论解代入式(1),并完成积分所得出,它具有函数级数的形式.算例中均采用等间距插值,并对采用求面积法(梯形公式求积分)[2]、递推公式一和递推公式二计算的数值结果作了比较.

例 1 理论解 $D(t) = 100.0 + 50.0t + 2.0t^2 + 0.1t^3$.

表 1 步长 $\Delta t = 0.1$

时间	精确结果	求面积法(梯形公式求积分)		递推公式一		递推公式二	
		数值结果	相对误差	数值结果	相对误差	数值结果	相对误差
0.0	100.0	100.000 0	0.000	100.000	0.000	100.000 0	0.000
2.0	208.8	193.629 5	- 7.266E - 2	208.801 8	+ 8.842E - 6	208.800 0	- 3.136E - 13
4.0	338.4	322.965 2	- 4.561E - 2	338.401 9	+ 5.681E - 6	338.400 0	+ 1.371 E - 11
6.0	493.6	470.831 1	- 4.613E - 2	493.602 1	+ 4.328E - 6	493.600 0	- 5.660 E - 12
8.0	679.2	650.115 6	- 4.282E - 2	679.202 1	+ 3.145E - 6	679.200 0	- 2.833 E - 12
10.0	900.0	862.185 5	- 4.202E - 2	900.002 1	+ 2.306E - 6	900.000 0	- 1.699 E - 10

表 2 步长 $\Delta t = 0.5$

时间	精确结果	求面积法(梯形公式求积分)		递推公式一		递推公式二	
		数值结果	相对误差	数值结果	相对误差	数值结果	相对误差
0.0	100.0	100.000	0.000	100.000	0.000	100.000	0.000
10.0	900.0	686.866	- 0.237	900.072	+ 7.948E - 5	900.000	+ 5.074E - 13
20.0	2 700.0	2 059.821	- 0.237	2 700.131	+ 4.856E - 5	2 700.000	+ 3.149E - 12
30.0	6 100.0	4 612.715	- 0.244	6 100.163	+ 2.674E - 5	6 100.000	+ 2.152E - 12
40.0	11 700.0	8 857.273	- 0.243	11 700.231	+ 1.978E - 5	11 700.000	+ 3.826E - 11
50.0	20 100.0	15 218.591	- 0.243	20 100.282	+ 1.380E - 5	20 100.000	+ 1.826E - 10

表 3　　步长 $\Delta t = 1.0$

时间	精确结果	求面积法(梯形公式求积分)		递推公式一		递推公式二	
		数值结果	相对误差	数值结果	相对误差	数值结果	相对误差
0.0	100.0	100.000	0.000	100.000	0.000	100.000	0.000
20.0	2 700.0	14 615.512	+4.413	2 700.006	+2.080E-6	2 700.000	+2.688E-13
40.0	11 700.0	58 061.822	+3.966	11 699.971	-2.337E-6	11 700.000	-4.970E-12
60.0	31 900.0	155 896.112	+3.887	31 899.943	-1.898E-6	31 900.000	-3.297E-12
80.0	68 100.0	328 684.832	+3.827	68 100.051	+6.883E-7	68 100.000	-3.956E-11
100.0	125 100.0	604 855.834	+3.835	125 099.978	-1.874E-7	125 100.000	+1.611E-10

例 2　理论解 $D(t) = 100.0 \times e^{-0.2t} + 50.0$.

表 4　　步长 $\Delta t = 0.1$

时间	精确结果	求面积法(梯形公式求积分)		递推公式一		递推公式二	
		数值结果	相对误差	数值结果	相对误差	数值结果	相对误差
0.0	150.000	150.000	0.000	150.000	0.000	150.000	0.000
2.0	117.032	101.913	-1.289E-1	117.033	+1.050E-5	117.032	-6.888E-11
4.0	94.933	91.641	-3.468 E-2	94.933	+5.867E-6	94.933	-2.454E-11
6.0	80.119	73.017	-8.865E-2	80.120	+6.475E-6	80.119	-5.084E-11
8.0	70.190	71.912	+2.454E-2	70.189	-2.609E-6	70.190	-2.336E-11
10.0	63.534	63.653	+1.882E-3	63.533	-5.344E-6	63.534	-1.354E-10

表 5　　步长 $\Delta t = 0.5$

时间	精确结果	求面积法(梯形公式求积分)		递推公式一		递推公式二	
		数值结果	相对误差	数值结果	相对误差	数值结果	相对误差
0.0	150.000	150.000	0.000	150.000	0.000	150.000	0.000
10.0	63.534	53.110	-0.164	63.536	+3.254E-5	63.534	+3.170E-9
20.0	51.832	42.306	-0.184	51.845	+2.505E-4	51.832	-6.187E-8
30.0	50.248	31.182	-0.379	50.245	-5.253E-5	50.248	-1.008E-8
40.0	50.036	39.326	-0.214	50.051	+3.500E-4	50.036	-3.299E-9
50.0	50.005	37.043	-0.259	50.020	+3.028E-4	50.005	-7.183E-8

表 6　　步长 $\Delta t = 1.0$

时间	精确结果	求面积法(梯形公式求积分)		递推公式一		递推公式二	
		数值结果	相对误差	数值结果	相对误差	数值结果	相对误差
0.0	150.000	150.000	0.000	150.000	0.000	150.000	0.000
20.0	51.832	-471.051	-10.088	51.876	+8.591E-4	51.832	+1.251E-6
40.0	50.034	738.552	+13.761	50.006	-5.442E-4	50.034	-1.677E-6
60.0	50.001	1 241.023	+23.820	49.929	-1.435E-3	50.001	-8.392E-7
80.0	50.000	1 535.629	+29.713	50.076	+1.512E-3	50.000	+3.662E-6
100.0	50.000	-273.963	-6.479	50.056	+1.137E-3	50.000	-3.128E-6

4 结　论

1) 利用对所求函数采用分段插值导出的递推公式来求解这里的卷积型第二类 Volterra 积分方程是非常成功的. 对递推公式一, $D(t) = 100.0 \times e^{-0.2t} + 50.0$,当时间步长分别为 $\Delta t = 0.1, 0.5$ 和 1.0 时,数值解与精确解的相对误差分别在 $10^{-6} \sim 10^{-5}$, $10^{-5} \sim 10^{-4}$ 和 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 量级,已具有较高的精度,而 $D(t) = 100.0 + 50.0t + 2.0t^2 + 0.1t^3$ 时的精度还要高. 对递推公式二,采用相同的步长时,其数值解与精确解的相对误差要比采用线性插值函数的结果在精度上再提高一倍左右. 可见,采用 Hermite 二节点三次插值函数构造出的递推公式给出的数值结果具有相当高的精度. 而一般书中所述的求面积法,当 $\Delta t = 0.1$ 时,数值解与精确解的相对误差在 $10^{-2} \sim 10^{-1}$,其数值结果勉强可用,而当 $\Delta t = 0.5$ 和 $\Delta t = 0.1$ 时,其相对误差急剧增大,要取得较满意的结果,必须采用小的时间步长进行计算. 一般来说,对于理论性问题,可以计算 $\phi(t)$ 的导数,也就是式(2)成立;而对于那些 $\phi(t)$ 是由实测数据拟合而得时,难以确定其导数. 这时后者只能利用递推公式一,而前者则两种递推公式都能用.

2) 计算结果还表明, 对于所有三种步长, 利用递推公式递推 100 次后的相对误差并未发生重大变化, 仍具较高精度, 这显示出文中递推公式在较大步长的计算中的稳定性和应用价值.

3) 当插值函数是多项式时, 式(8)和式(13)的积分可显式积出, 这样有利于提高计算精度.

[参 考 文 献]

[1] Kress R. *Linear Integral Equation*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[2] Delves L M, Mohamed J L. *Computational Method for Integral Equations*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[3] Christopher T H, Baker M A. *The Numerical Treatment of Integral Equation*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1977.

[4] Hamming R W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (2nd Edition)[M]. New York: McGraw-Hill, 1973.

[5] 沈以淡. 积分方程[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1992.

[6] 阎玉斌, 崔明根. 第二类 Volterra 积分方程的准确解[J]. 高等学校计算数学学报, 1993, **15**(4): 291—296.

[7] 李鸿祥, 王国金, 王存政. 几类积分方程和常微分方程的精确解[J]. 上海铁道学院学报, 1995, **16**(1): 72—85.

[8] Souchet R. An analysis of three-dimensional rigid body collisions with friction by means of a linear integral equation of Volterra[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1999, **37**(3): 365—378.

[9] Rose J L, Chou S C, Chou P C. Vibration analysis of thick-walled spheres and cylinders[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1973, **53**(3): 771—776.

[10] Pao Y H, Ceranoglu A N. Determination of transient responses of a thick-walled spherical shell by the ray theory[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1978, **45**(1): 114—122.

[11] WANG Xi, Gong Yu-ming. A theoretical solution for axially symmetric problem in elastodynamics [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, **7**(3): 275—282.

[12] 丁皓江,王惠明,陈伟球.圆柱壳的轴对称平面应变弹性动力学解[J].应用数学和力学, 2002, **23** (2): 138—145.

[13] DING Hao-jing, WANG Hui-ming, HOU Peng-fei. The transient responses of piezoelectric hollow cylinders for axisymmetric plane strain problems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(1): 105—123.

[14] DING Hao-jing, WANG Hui-ming, LING Dao-sheng. Analytical solution of a pyroelectric hollow cylinder for piezothermoelastic axisymmetric dynamic problems[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2003, **26**(3): 261—276.

[15] DING Hao-jing, WANG Hui-ming, CHEN Wei-qiu. Transient responses in a piezoelectric spherically isotropic hollow sphere for symmetric problems[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics* 2003, **70** (3): 436—445.

New Numerical Method for Volterra Integral Equation of the Second Kind in Piezoelastic Dynamic Problems

DING Hao-jiang[1], WANG Hui-ming[2], CHEN Wei-qiu[1]

(1. *Department of Civil Engineering*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *P. R. China*;
2. *Department of Mechanics*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *P. R. China*)

Abstract: The elastodynamic problems of piezoelectric hollow cylinders and spheres under radial deformation can be transformed into a second kind Volterra integral equation about a function with respect to time, which greatly simplifies the solving procedure for such elastodynamic problems. Meanwhile, it becomes very important to find a way to solve the second kind Volterra integral equation effectively and quickly. By using an interpolation function to approximate the unknown function, two new recursive formulae were derived, based on which numerical solution can be obtained step by step. The present method can provide accurate numerical results efficiently. It is also very stable for long time calculating.

Key words: piezoelectric; elastodynamic problem; Volterra integral equation; numerical solution; recursive formulae