

# 非均质地层中自然电位测井的 数学模型和数值方法<sup>\*</sup>

潘克家<sup>1</sup>, 谭永基<sup>1</sup>, 胡宏伶<sup>2</sup>

(1. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433;  
2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院, 长沙 410081)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 针对非均质地层中电阻率非分块常数, 提出一个新的自然电位测井模型. 自然电位满足具有交界面跳跃的椭圆边值问题. 证明了该椭圆边值问题弱解的存在唯一性; 提出一种捕捉交界面电位跳跃的有限差分方法求解此类问题, 数值例子验证了该方法的可靠性和有效性.

**关键词:** 自然电位测井; 椭圆交界面问题; 数学模型; 数值模拟

**中图分类号:** TN011      **文献标识码:** A

## 引言

自然电位测井是石油勘探中探测地层参数的重要手段<sup>[1]</sup>. 自然电位数据可用于寻找渗透性地层的位置和边界, 以及结合其它类似测井方法对地层原生水电阻率的修正. 自然电位测井在砂岩测井解释中也起着重要的作用.

自然电位测井基于下面的电学现象. 由于地层中正负离子具有不同的迁移速度, 且一般情形下, 泥岩颗粒经常吸附正离子, 而沙岩颗粒吸附负离子. 因此在不同地层的交界面上会产生稳定的电位差, 称之为自然电位差, 从而在地层中相应地形成一个电场. 油井钻好之后, 把附带电极的测井工具放入井中, 测量电极上的自然电位. 沿着井壁提升测量电极, 就得到如图 1 所示的自然电位测井曲线.

为制作相应的测井解释图版, 通常假设地层的几何结构、地层中各个子区域的电阻率以及交界面上的自然电位差均为已知. 且假设地层关于井轴和中心平面  $z = 0$  对称. 图 2 中, 阴影部分为测井工具所占区域,  $\Omega_m$  为泥浆所占井区域,  $\Omega_s$  为围岩层,  $\Omega_i$  为包含侵入带的目的层.

当泥浆侵入比较深, 或者目的层电阻率  $R_i$  和冲洗带电阻率  $R_x$  相差比较大的时候, 传统的 3 参数阶跃侵入剖面不适合逼近实际地层径向电阻率剖面, 所以需要采用 4 参数连续侵入模型<sup>[2]</sup>, 各子区域电阻率为

\* 收稿日期: 2008-06-17; 修订日期: 2008-12-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10431030); 上海市自然科学基金资助项目(08ZR1401100)

作者简介: 潘克家(1981—)男, 湖南宁乡人, 博士(联系人. Tel: + 86-21-61445354; E-mail: kjian@yahoo.cn).

$$R_e = \begin{cases} R_m, & \text{在 } \Omega_m \triangleq \Omega_1 \text{ 中,} \\ R_s, & \text{在 } \Omega_s \triangleq \Omega_2 \text{ 中,} \\ R_f(r) = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1/R_s - 1/R_1}{1 + ((r - r_0)/w)^N} \right)^{-1}, & \text{在 } \Omega_1 \triangleq \Omega_3 \text{ 中,} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $r_0$  为井半径,  $w$  为冲洗带半高宽,  $N$  为侵入剖面控制参数. 在电子滤波器设计理论中, 函数  $R_f(r)$  为 Butterworth 滤波器<sup>[3]</sup>. 当  $N$  为一正整数,  $R_f(r)$  关于  $r$  的  $N - 1$  阶导数在  $r = 0$  时为 0, 表明电阻率剖面在冲洗带处几乎为水平的. 还注意到, 当  $N$  趋于无穷大, 电阻率剖面的形状趋于现有自然电位测井的数学模型基于的传统的 3 参数 ( $R_1, R_s, r_0$ ) 剖面<sup>[4-5]</sup>.

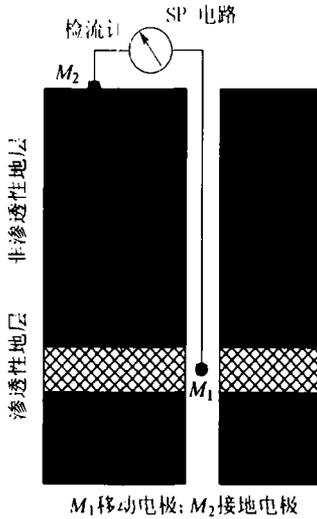


图 1 自然电位测井原理示意图

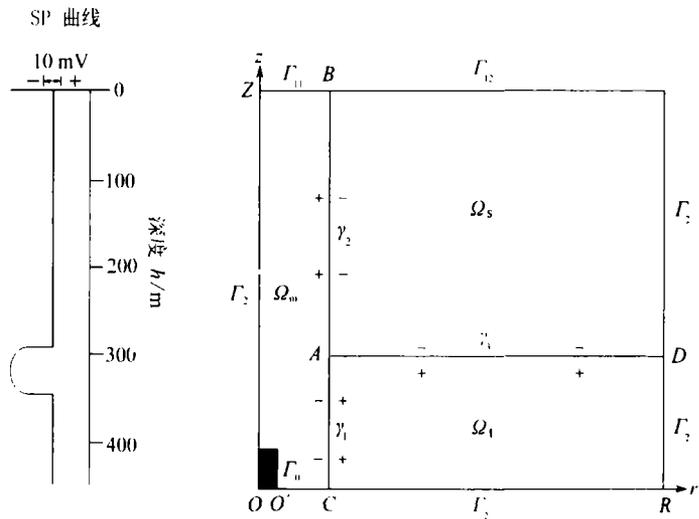


图 2 轴对称有界计算区域:  $\Omega_s, \Omega_1$  和  $\Omega_m$  分别为围岩层、原始目的层和井区域

令光滑函数  $E_j(s)$  为交界面  $\gamma_j (1 \leq j \leq 3)$  上的自然电位差,  $s$  为以  $A$  点作为起点的  $\gamma_j$  的弧长. 记

$$\Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}, \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1). \quad (2)$$

则自然电位  $u$  在区域  $\Omega = \cup_{i=1}^3 \Omega_i$  中满足如下具有交界面的椭圆边值问题(参考文献[4-5]传统的 3 参数侵入自然电位测井模型):

$$Lu = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \quad \text{在 } \Omega_i (1 \leq i \leq 3) \text{ 中,} \quad (3)$$

$$u = E_2(B), \quad \text{在 } \Gamma_{11} \text{ 上, } u = 0, \quad \text{在 } \Gamma_{12} \text{ 上,} \quad (4)$$

$$\frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上,} \quad (5)$$

$$\begin{cases} u = \bar{u} \text{ (未知常数),} \\ \int_{\Gamma_0} \frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \end{cases} \quad \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上,} \quad (6)$$

$$\begin{cases} u^+ - u^- = E_j(s), \\ \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ = \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial n} \right)^-, \end{cases} \quad \text{在 } \gamma_j (1 \leq j \leq 3) \text{ 上,} \quad (7)$$

其中,  $\Gamma_0$  为金属测量电极的表面, 上标“+”和“-”分别表示为图 2 中所标示的  $\gamma_j$  两面的函数值. 并且约定, 单位法向量  $n$  在  $\gamma_j$  两边选取相同的方向. 界面条件(7) 表示  $\gamma_j$  上电流为连续

的,但电位存在跳跃(自然电位差).非局部边界条件<sup>[6]</sup>(6)测量电极不发射电流,且为等势体.

为保证界面跳跃条件(7)和边界条件(5)相容,通常假设

$$E_1'(C) = E_2'(B) = E_3'(D) = 0. \quad (8)$$

当  $E_j(1 \leq j \leq 3)$  均为常数时,条件(8)显然满足.

称自然电位差为相容的,如果围绕界面相交点  $A$  的自然电位差的代数和为 0,即

$$\Delta_A = E_3(A) - E_1(A) - E_2(A) = 0. \quad (9)$$

然而,大多数实际情况下,自然电位差均不是相容的.

文章结构如下:首先在第 1 节对原问题进行简化,第 2 节中给出一些必要的预备结果;第 3 节证明分片  $W_*^{1,p}$  弱解的存在唯一性;第 4 节提出一种捕捉界面跳跃的有限差分格式;最后,第 5 节给出一些数值算例.

## 1 问题的简化

首先,考虑到测量电极大小相对比较小且不发射电流,电极可以简化为一点<sup>[7]</sup>.边值问题的求解区域简化为矩形  $\Omega = \{(r, z) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq Z\}$ .其次,因为  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  两边的电阻率为常数,且自然电位差主要依赖与界面两边的电导率<sup>[8]</sup>,故可假设  $E_1$  和  $E_2$  均为常数.因此,可以作变换

$$v = u - u_0, \quad (10)$$

其中

$$u_0 = \begin{cases} E_2, & \text{在 } \Omega_m \text{ 中,} \\ 0, & \text{在 } \Omega_s \text{ 中,} \\ E_1 + E_2, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 中.} \end{cases} \quad (11)$$

则  $v$  满足如下椭圆边值问题:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad \text{在 } \Omega_i (1 \leq i \leq 3) \text{ 中,} \quad (12)$$

$$v = 0, \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上,} \quad (13)$$

$$\frac{r}{R_e} \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上,} \quad (14)$$

$$\begin{cases} v^+ - v^- = F_j(s), \\ \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial v}{\partial n} \right)^+ = \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial v}{\partial n} \right)^-, \end{cases} \quad \text{在 } \gamma_j (1 \leq j \leq 3) \text{ 上,} \quad (15)$$

其中,  $F_1(s) = F_2(s) \equiv 0$ ,  $F_3(s) = E_3(s) - E_1 - E_2$ .

## 2 预备知识

记  $v|_{\Omega_i}$  为  $v$  在  $\Omega_i$  上的限制,  $\nabla v = (\partial v / \partial r, \partial v / \partial z)^T$ . 对任意实数  $p > 1$ , 定义集合

$$V_p(E) = \{v \mid v|_{\Omega_i} \in W_*^{1,p}(\Omega_i), 1 \leq i \leq 3; \\ (v^+ - v^-)|_{\gamma_j} = E_j(s), 1 \leq j \leq 3; v|_{\Gamma_1} = 0, v|_{\Gamma_0} = \text{const}\}, \quad (16)$$

加权 Sobolev 空间  $W_*^{1,p}$  装配如下范数

$$\|v\|_{W_*^{1,p}(\omega)} = (\|v\|_{L_*^p(\omega)}^p + \|\nabla v\|_{L_*^p(\omega)}^p)^{1/p}, \quad \forall v \in W_*^{1,p}(\omega), \quad (17)$$

其中

$$\|v\|_{L^p_r(\omega)} = \left( \iint_{\omega} r \|v\|^p dr dz \right)^{1/p}, \quad (18)$$

$\omega$  为  $\Omega$  的任一子区域  $\Omega_i (1 \leq i \leq 3)$ . 特别地,  $H^1_* = W^{1,2}$  为 Hilbert 空间. 如果考虑区域在  $r \geq \text{const} > 0$  中, 空间  $W^{1,p}_*$  与通常的 Sobolev 空间  $W^{1,p}$  等价, 详见参考文献[9].

下面研究一个稍微不同的边值问题. 如果控制方程(3)被替换为

$$Lu = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{r}{R_e} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = h(r, z), \quad \text{在 } \Omega_i (1 \leq i \leq 3) \text{ 中}, \quad (19)$$

自然电位差  $E_j(s) (1 \leq j \leq 3)$  满足相容性条件(9). 称  $u \in V_2(E)$  为问题(19)、(4)~(7)的弱解, 若满足

$$\sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega_i} \frac{r}{R_e} (\nabla u \cdot \nabla \phi) dr dz = \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega_i} h \phi dr dz, \quad \forall \phi \in V_2^0, \quad (20)$$

其中,  $V_2^0$  为 Hilbert 空间定义如下:

$$\begin{aligned} V_2^0 = \{ & v \mid v|_{\Omega_i} \in H^1_*(\Omega_i), 1 \leq i \leq 3; \\ & (v^+ - v^-)|_{\gamma_j} = 0, 1 \leq j \leq 3; v|_{\Gamma_1} = 0, v|_{\Gamma_0} = \text{const} \} = \\ & \{ v \mid v|_{\Omega_i} \in H^1_*(\Omega); v|_{\Gamma_1} = 0, v|_{\Gamma_0} = \text{const} \}. \end{aligned} \quad (21)$$

尽管电阻率不再是分片常数, 仍能得到下面的结论<sup>[5,10-11]</sup>:

**引理 1** 集合  $V_2(E)$  非空当且仅当自然电位差  $E_j (1 \leq j \leq 3)$  为相容的, 即条件(9)成立.

**引理 2** 假设相容性条件(9)成立, 式(19)的右端项  $h(r, z)$  为一分块函数, 且使得

$$l(\phi) \triangleq \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega_i} h \phi dr dz, \quad \forall \phi \in V_2^0 \quad (22)$$

为  $V_2^0$  上的线性连续泛函. 则问题(19)、(4)~(7)存在唯一弱解  $u \in V_2(E)$ .

### 3 自然电位测井问题的适定性

本节讨论自然电位测井问题(3)~(7)解的存在唯一性, 且主要考虑相容性条件(9)不满足时的情形.

采用文献[5]中类似的技巧, 通过引入一个合适的变换, 将连接点  $A$  处的奇性转移到方程右端项, 化为第 2 节中讨论过的相容性条件满足时的情形, 从而得到如下定理.

**定理 3** 自然电位测井问题(3)~(7)存在唯一弱解  $u$ , 且  $u$  为一分片  $W^{1,p}_*$  ( $1 \leq p < 2$ ) 函数.

**证明** 主要定理的证明分为以下 3 个步骤:

**第 1 步** 问题的进一步化简

$A$  点的坐标记为  $(r_A, z_A)$ , 以  $A$  为极点的极坐标记为  $(\rho_A, \theta_A)$ , 其中

$$\rho_A = \sqrt{(r - r_A)^2 + (z - z_A)^2}, \quad \theta_A = \arg((r - r_A) + i(z - z_A)). \quad (23)$$

引入分段函数

$$u_A = \begin{cases} \lambda R_s \theta_A f(\rho_A), & \text{在 } \Omega_s \left( 0 < \theta_A < \frac{\pi}{2} \right) \text{ 中,} \\ \lambda R_m \theta_A f(\rho_A), & \text{在 } \Omega_m \left( \frac{\pi}{2} < \theta_A < \frac{3\pi}{2} \right) \text{ 中,} \\ \lambda F(\rho_A, \theta_A) f(\rho_A), & \text{在 } \Omega_i \left( \frac{3\pi}{2} < \theta_A < 2\pi \right) \text{ 中,} \end{cases} \quad (24)$$

其中,  $f(\rho_A)$  为一光滑函数, 且满足

$$f(\rho_A) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho_A \leq a_0, \\ 0, & 2a_0 \leq \rho_A, \end{cases} \quad (25)$$

为一光滑函数,  $a_0$  为充分小的正常数, 满足

$$2a_0 < \min\{|AB|, |AC|, |AD|, |O'C|\} \quad (26)$$

且

$$F(\rho_A, \theta_A) = \int_0^{\theta_A} R_f(r) d\theta = \int_0^{\theta_A} R_f(r_A + \rho_A \cos\theta) d\theta, \quad (27)$$

式中  $R_f$  由式(1)定义. 特别当  $N = 2$  时, 可以得到如下显示的表达式:

$$F(\rho_A, \theta_A) = R_t \theta_A + \frac{R_t(R_x - R_t)}{\sqrt{R_t(R_t + R_x(\rho_A/w)^2)}} \arctan \frac{R_t \tan \theta_A}{\sqrt{R_t(R_t + R_x(\rho_A/w)^2)}}, \quad (28)$$

通常情况下, 亦有

$$F(0, \theta_A) = \int_0^{\theta_A} R_f(r_A) d\theta = \int_0^{\theta_A} R_x d\theta = R_x \theta_A. \quad (29)$$

选取常数  $\lambda$  满足:

$$(u_A^+ - u_A^-) |_{\gamma_3} - (u_A^+ - u_A^-) |_{\gamma_1} - (u_A^+ - u_A^-) |_{\gamma_2} = \Delta_A, \quad (30)$$

得到

$$\lambda = \frac{\Delta_A}{F(0, 2\pi) - F(0, 3\pi/2) + \pi R_m + \pi R_s/2} = \frac{2\Delta_A}{\pi(R_x + 2R_m + R_s)}. \quad (31)$$

容易验证: 如此构造的分块函数  $u_A$  满足

$$\left(\frac{r}{R_e} \frac{\partial u_A}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{r}{R_e} \frac{\partial u_A}{\partial n}\right)^-, \quad \text{在 } \gamma_j (1 \leq j \leq 3) \text{ 上} \quad (32)$$

且对任意的函数  $u \in V_p(E)$ ,  $((u - u_A)^+ - (u - u_A)^-) |_{\gamma_j} (1 \leq j \leq 3)$  满足相容性条件(9).

并且, 注意到  $f(\rho_A)$  具有紧支集,  $u_A$  在边界  $\Gamma_1, \Gamma_2$  和  $\Gamma_0$  满足和  $u$  同样的齐次边界条件.

令  $w = u - u_A$ , 容易验证: 函数  $w$  为问题(19)、(4)~(7)的弱解, 其中

$$h(r, z) = L[u_A] \stackrel{\Delta}{=} h_A(r, z), \quad (33)$$

$E_j(s)$  被  $\tilde{E}_j(s) = E_j(s) - (u_A^+ - u_A^-) |_{\gamma_j}$  替换. 因此, 相容性条件(9)恒成立.

## 第2步 弱解的存在唯一性

为证明问题(19)、(4)~(7)存在唯一弱解  $w \in V_2(\tilde{E})$ , 只须验证引理2中的条件(22).

令  $\tilde{\Omega} = \Omega_m \cup \Omega_s$ , 由式(24)易得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u_A}{\partial \theta_A} = \lambda R_e f(\rho_A), & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \frac{\partial^2 u_A}{\partial \theta_A^2} = \begin{cases} 0, & \text{在 } \tilde{\Omega} \text{ 中,} \\ -\lambda R_t'(r) \rho_A \sin \theta_A, & \text{在 } \Omega_t \text{ 中,} \end{cases} \end{cases} \quad (34)$$

$$\frac{\partial u_A}{\partial \rho_A} = \begin{cases} \lambda R_e \theta_A f'(\rho_A), & \text{在 } \tilde{\Omega} \text{ 中,} \\ \lambda \left( F \cdot f'(\rho_A) + \frac{\partial F(\rho_A, \theta_A)}{\partial \rho_A} f(\rho_A) \right), & \text{在 } \Omega_t \text{ 中,} \end{cases} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 u_A}{\partial \rho_A^2} = \begin{cases} \lambda R_e \theta_A f''(\rho_A), & \text{在 } \tilde{\Omega} \text{ 中,} \\ \lambda \left( F \cdot f''(\rho_A) + 2 \frac{\partial F}{\partial \rho_A} f'(\rho_A) + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho_A^2} f(\rho_A) \right), & \text{在 } \Omega_t \text{ 中,} \end{cases} \quad (36)$$

利用极坐标和以上表达式,可以得到

$$\begin{aligned} h_A |_{\bar{\Omega}} &= L[u_A |_{\bar{\Omega}}] = \\ &= -\frac{r}{R_e} \left( \frac{\partial^2 u_A}{\partial \rho_A^2} + \frac{1}{\rho_A} \frac{\partial u_A}{\partial \rho_A} + \frac{1}{\rho_A^2} \frac{\partial^2 u_A}{\partial \theta_A^2} \right) - \frac{1}{R_e} \left( \cos \theta_A \frac{\partial u_A}{\partial \rho_A} - \frac{\sin \theta_A}{\rho_A} \frac{\partial u_A}{\partial \theta_A} \right) = \\ &= \bar{h}_A^1 + \bar{h}_A^2, \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\bar{h}_A^1 = -\lambda \theta_A \left( r \left( f''(\rho_A) + \frac{1}{\rho_A} f'(\rho_A) \right) + \cos \theta_A f'(\rho_A) \right), \quad (38)$$

$$\bar{h}_A^2 = \lambda \frac{\sin \theta_A}{\rho_A} f(\rho_A) = \lambda \frac{\partial(\ln \rho_A)}{\partial z} f(\rho_A). \quad (39)$$

类似地,也可以得到

$$\begin{aligned} h_A |_{\Omega_i} &= L[u_A |_{\Omega_i}] = \\ &= -\frac{r}{R_e} \left( \frac{\partial^2 u_A}{\partial \rho_A^2} + \frac{1}{\rho_A} \frac{\partial u_A}{\partial \rho_A} + \frac{1}{\rho_A^2} \frac{\partial^2 u_A}{\partial \theta_A^2} \right) - \frac{1}{R_e} \left( \cos \theta_A \frac{\partial u_A}{\partial \rho_A} - \frac{\sin \theta_A}{\rho_A} \frac{\partial u_A}{\partial \theta_A} \right) = \\ &= h_A^1 + h_A^2, \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} h_A^1 &= -\frac{\lambda}{R_f} \left\{ r \left( F \cdot f''(\rho_A) + 2 \frac{\partial F}{\partial \rho_A} f'(\rho_A) + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho_A^2} f(\rho_A) \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\rho_A} F \cdot f'(\rho_A) + \cos \theta_A \left( F \cdot f'(\rho_A) + \frac{\partial F}{\partial \rho_A} f(\rho_A) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$h_A^2 = \frac{\lambda}{\rho_A} \left\{ \left( f(\rho_A) + \frac{r}{R_f} R_f'(r) \right) \sin \theta_A - \frac{r}{R_f} \frac{\partial F}{\partial \rho_A} f(\rho_A) \right\}. \quad (42)$$

显然,  $\bar{h}_A^1$  和  $h_A^1$  是光滑函数,且有包含在  $r \geq b_0 > 0$  的紧支集,其中,  $b_0$  为正常数. 所以,对

$$l_A^1(\phi) = \iint_{\bar{\Omega}} \bar{h}_A^1 \phi \, dr dz + \iint_{\Omega_i} h_A^1 \phi \, dr dz, \quad (43)$$

有

$$|l_A^1(\phi)| \leq C_1 \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|\phi\|_{L^2_*(\Omega)} \leq C_2 \|\phi\|_{V_2^0}, \quad \forall \phi \in V_2^0, \quad (44)$$

这里,  $C_1, C_2$  都是正常数.

另一方面,因为  $\ln \rho_A \in L_2(\Omega)$ ,  $\partial(\ln \rho_A)/\partial r$  和  $\partial(\ln \rho_A)/\partial z$  属于  $V_2^0$  的对偶空间,所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_A} &= \frac{\partial(\ln \rho_A)}{\partial \rho_A} = \frac{\partial(\ln \rho_A)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho_A} + \frac{\partial(\ln \rho_A)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho_A} = \\ &= \frac{\partial(\ln \rho_A)}{\partial r} \cos \theta_A + \frac{\partial(\ln \rho_A)}{\partial z} \sin \theta_A \end{aligned} \quad (45)$$

也属于  $V_2^0$  的对偶空间. 因此对

$$l_A^2(\phi) = \iint_{\bar{\Omega}} \bar{h}_A^2 \phi \, dr dz + \iint_{\Omega_i} h_A^2 \phi \, dr dz, \quad (46)$$

就有

$$|l_A^2(\phi)| \leq C_3 \|\phi\|_{V_2^0}, \quad \forall \phi \in V_2^0, \quad (47)$$

其中,  $C_3$  为正常数.

因此,可以推出

$$l_A(\phi) = \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega_i} h_A \, dr dz \quad (48)$$

是  $V_2^0$  上的连续线性泛函, 即式(22)成立.

由引理 2, 问题(19)、(4)~(7)存在唯一弱解  $\bar{u} \in V_2(\bar{E})$ ; 所以,  $u = u_A + \bar{u}$  是初始问题(3)~(7)的唯一弱解.

### 第 3 步 弱解的正则性

现在证明, 对于任意固定的  $p (1 \leq p < 2)$ , 这个弱解是分片  $W_*^{1,p}$  函数. 为此, 只须证明  $u_A$  是分片  $W_*^{1,p}$  函数.

注意到  $u_A$  有包含在  $r \geq b_0 > 0$  的紧支集, 只须证明  $u_A$  是分片  $W^{1,p}$  函数. 由式(34)和(35)得

$$\frac{\partial u_A}{\partial r} = \frac{\partial u_A}{\partial \rho_A} \cos \theta_A - \frac{\partial u_A}{\partial \theta_A} \frac{\sin \theta_A}{\rho_A} = \begin{cases} \lambda R_e \theta_A f'(\rho_A) \cos \theta_A - \lambda R_e \cdot f(\rho_A) \frac{\sin \theta_A}{\rho_A}, & \text{在 } \tilde{\Omega} \text{ 中,} \\ \lambda \left( F \cdot f'(\rho_A) + \frac{\partial F}{\partial \rho_A} f(\rho_A) \right) \cos \theta_A - \lambda R_f \cdot f(\rho_A) \frac{\sin \theta_A}{\rho_A}, & \text{在 } \Omega_t \text{ 中,} \end{cases} \quad (49)$$

和

$$\frac{\partial u_A}{\partial z} = \frac{\partial u_A}{\partial \rho_A} \sin \theta_A + \frac{\partial u_A}{\partial \theta_A} \frac{\cos \theta_A}{\rho_A} = \begin{cases} \lambda R_e \theta_A f'(\rho_A) \sin \theta_A + \lambda R_e \cdot f(\rho_A) \frac{\cos \theta_A}{\rho_A}, & \text{在 } \tilde{\Omega} \text{ 中,} \\ \lambda \left( F \cdot f'(\rho_A) + \frac{\partial F}{\partial \rho_A} f(\rho_A) \right) \sin \theta_A + \lambda R_f \cdot f(\rho_A) \frac{\cos \theta_A}{\rho_A}, & \text{在 } \Omega_t \text{ 中,} \end{cases} \quad (50)$$

因此,  $\nabla u_A$  的奇性等价于  $\rho_A^{-1}$  在  $\rho_A = 0$  的一个邻域内的奇性. 对任意给定的  $p (1 \leq p < 2)$ ,

$$\iint_{\rho_A \leq a_0} \left( \frac{1}{\rho_A} \right)^p d\rho_A d\theta_A = \iint_{\rho_A \leq a_0} \rho_A^{1-p} dr dz = 2\pi \int_0^{a_0} \rho_A^{1-p} d\rho_A < +\infty, \quad (51)$$

这就容易发现  $\nabla u_A$  是分片  $L^p$  函数, 定理即证.

## 4 数值方法

自然电位测井是石油勘探中的重要手段, 已有大量文献研究其数值方法和误差分析, 如有限元方法(FEM)<sup>[5]</sup>, 数值模式匹配方法(NNM)<sup>[12-13]</sup>等. 和有限元方法相比, 数值模式匹配方法更加简单, 但难以推广到电阻率非分片常数连续变化的情形. 然而, 有限元方法较数值模式匹配方法更加精确.

本节提出一种捕捉界面跳跃的有限差分方法(FDM)求解自然电位测井问题. 此方法非常简单、有效, 并且容易推广到求解其它具有直线交界面的椭圆问题.

### 4.1 子区域内差分格式

对计算区域  $[0, R] \times [0, Z]$ , 采用如下均匀网格:

$$r_i = i\Delta r, \quad z_j = j\Delta z, \quad i = 0, 1, \dots, M; \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

式中,  $\Delta r = R/M, \Delta z = Z/N$ .

由于在任一子区域  $\Omega_i (i = 1, 2, 3)$  中, 电阻率只与  $r$  有关. 记  $R_i = R_e(r_i)$ , 采用标准的二阶中心差分格式

$$\frac{\beta_{i+1/2} u_{i+1,j} - (\beta_{i+1/2} + \beta_{i-1/2}) u_{i,j} + \beta_{i-1/2} u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \beta_i \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta z^2} = 0, \quad (52)$$

式中,  $\beta_i = r_i/R_i, \beta_{i\pm 1/2} = (\beta_i + \beta_{i\pm 1})/2$ .

#### 4.2 界面上差分格式

只须讨论水平界面  $z = H = j_0\Delta z$  上的差分格式的情形, 对垂直界面  $r = r_0$  可类似得到.

设水平界面  $z = j_0\Delta z$  上下两边的电阻率分别为  $R^+$  和  $R^-$ . 在界面上下, 分别利用 Taylor 展开, 可得到

$$u_{i,j_0+1} - u_{i,j_0}^+ = \Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i,j_0}^+ + \frac{\Delta z^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{i,j_0}^+ + O(\Delta z^3), \quad (53)$$

$$u_{i,j_0-1} - u_{i,j_0}^- = -\Delta z \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i,j_0}^- + \frac{\Delta z^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{i,j_0}^- + O(\Delta z^3). \quad (54)$$

分别用  $\beta_i^+ = r_i/R_i^+$  和  $\beta_i^- = r_i/R_i^-$  乘以式(53)和(54), 相加可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta z^2} (\beta_i^+ (u_{i,j_0+1} - u_{i,j_0}^+) + \beta_i^- (u_{i,j_0-1} - u_{i,j_0}^-)) = \\ & \frac{1}{\Delta z} \left[ \beta \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{1}{2} \left( \beta_i^+ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{i,j_0}^+ + \beta_i^- \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{i,j_0}^- \right) + O(\Delta z) = \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i,j_0}^+ + \frac{\partial}{\partial r} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i,j_0}^- \right) + O(\Delta z) = \\ & - \frac{\beta_{i+1/2}^+ u_{i+1,j_0}^+ - (\beta_{i+1/2}^+ + \beta_{i-1/2}^+) u_{i,j_0}^+ + \beta_{i-1/2}^+ u_{i-1,j_0}^+}{2\Delta r^2} - \\ & - \frac{\beta_{i+1/2}^- u_{i+1,j_0}^- - (\beta_{i+1/2}^- + \beta_{i-1/2}^-) u_{i,j_0}^- + \beta_{i-1/2}^- u_{i-1,j_0}^-}{2\Delta r^2} + O(\Delta r + \Delta z). \end{aligned} \quad (55)$$

记  $u_{i,j_0}^+ = u_{i,j_0}^- + E_i \stackrel{\Delta}{=} u_{i,j_0} + E_i$ , 由上式可得

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\beta}_{i+1/2} u_{i+1,j_0} - (\bar{\beta}_{i+1/2} + \bar{\beta}_{i-1/2}) u_{i,j_0} + \bar{\beta}_{i-1/2} u_{i-1,j_0}}{\Delta r^2} + \\ & \left( \beta_i^+ \frac{u_{i,j_0+1} - u_{i,j_0}}{\Delta z^2} + \beta_i^- \frac{u_{i,j_0-1} - u_{i,j_0}}{\Delta z^2} \right) = \\ & \frac{\beta_i^+ E_i - \beta_{i+1/2}^+ E_{i+1} - (\beta_{i+1/2}^+ + \beta_{i-1/2}^+) E_i + \beta_{i-1/2}^+ E_{i-1}}{2\Delta r^2} + O(\Delta r + \Delta z), \end{aligned} \quad (56)$$

其中,  $\bar{\beta}_{i\pm 1/2} = (\beta_{i\pm 1/2}^+ + \beta_{i\pm 1/2}^-)/2$ . 进一步化简可得

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\beta}_{i+1/2}}{\Delta r^2} u_{i+1,j_0} + \frac{\bar{\beta}_{i-1/2}}{\Delta r^2} u_{i-1,j_0} + \frac{\beta_i^+}{\Delta z^2} u_{i,j_0+1} + \frac{\beta_i^-}{\Delta z^2} u_{i,j_0-1} - D_{\text{SUM}} \cdot u_{i,j_0} = \\ & \frac{\beta_i^+ E_i - \beta_{i+1/2}^+ E_{i+1} - (\beta_{i+1/2}^+ + \beta_{i-1/2}^+) E_i + \beta_{i-1/2}^+ E_{i-1}}{2\Delta r^2}, \end{aligned} \quad (57)$$

式中,  $D_{\text{SUM}}$  为差分格式左端前 4 项系数之和.

#### 4.3 总结

比较差分格式(52)和(57), 可以发现界面上的差分格式和子区域上的差分格式形式上是完全一样的. 在界面上时只是对系数采取某种平均, 并相应地在右端加上一个由于自然电位跳跃引入的源项. 所以, 差分离散后得到的线性方程组的系数矩阵仍为一对称正定矩阵, 可利用通常的多重网格和预条件共轭梯度(PCG)等方法快速求解.

## 5 数值算例

本节研究有限差分方法求解自然电位测井问题的实际效果. 数值计算结果表明: 上节中

提出的差分方法比文献[5]中使用的有限元方法更加精确、有效。复杂地层自然电位测井数值模拟的实现不仅为测井介绍提供了依据,对实际测井工程也有一定的指导意义。

为验证方法的有效性,假设地层为上下对称的均匀无限大地层,即  $R_m = R_s = R_x = R_l$ 。此时利用双层位势概念和立体角的计算,可以得到自然电位在井轴上的精确表示<sup>[14]</sup>:

$$u(0, z) = E_2 + \frac{\Delta_A}{2} \left( \frac{z + H}{\sqrt{(z + H)^2 + r_0^2}} - \frac{z - H}{\sqrt{(z - H)^2 + r_0^2}} \right), \quad (58)$$

其中,  $\Delta_A$  由式(9)定义,  $r_0$ 、 $H$  分别为油井半径和目的层半厚度。

表 1 两种方法数值结果比较

z/m	u(0, z)/mV	FEM		FDM	
		u <sub>1</sub> (0, z)/mV	e/(%)	u <sub>2</sub> (0, z)/mV	e/(%)
0.00	109.80	110.19	0.36	109.90	0.09
0.40	109.78	110.17	0.36	109.89	0.10
1.20	109.36	109.77	0.37	109.67	0.28
1.96	75.21	74.57	0.85	75.33	0.16
1.98	67.88	68.45	0.84	67.76	0.17
2.00	59.98	62.03	3.42	59.98	0.01
2.02	52.08	55.62	6.80	52.20	0.24
2.04	44.74	49.57	10.80	44.64	0.23
2.80	10.58	11.52	8.88	10.29	2.70
3.60	10.14	10.57	4.24	10.07	0.73

选取与文献[5]中相同的参数:

$$H = 4 \text{ m}, r_0 = 0.125 \text{ m}, E_1 = 20 \text{ mV}, E_2 = 10 \text{ mV}, E_3 = 130 \text{ mV},$$

由捕捉界面跳跃的 FDM 计算其近似解  $u_1$ , 并与公式(58)计算的精确解  $u$  和文献[5]中的有限元解  $u_2$  进行比较。FEM(3,4 列)和 FDM(5,6 列)计算结果如表 1 所示,  $E$  为相对误差。对 FDM, 选取 2 800 个节点; 而对 FEM, 网格节点数大约为 3 000。从表 1 容易看出, FDM 的计算结果比 FEM 的计算结果更加精确。

### [参 考 文 献]

- [1] Smits L J M. SP log interpretation in shaly sands[J]. *Trans AIME*, 1968, 243(2): 123-136.
- [2] Howard A Q. A new invasion model for resistivity log interpretation[J]. *The Log Analyst*, 1992, 33(2): 96-110.
- [3] Oppenheim A V, Schaffer R W. *Digital Signal Processing*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1975.
- [4] Li T T, Tan Y J, Peng Y J, et al. Mathematical methods for the SP well-logging[A]. In: Spigler R, Ed. *Applied and Industrial Mathematics* [C]. Vol 1. Venice: Kluwer Academic Publishers, 1991, 343-349.
- [5] Li T T, Tan Y J, Peng Y J. Mathematical model and method for spontaneous potential well-logging[J]. *Eur J Appl Math*, 1994, 5(2): 123-139.
- [6] Li T T. A class of non-local boundary value problems for partial differential equations and its applications in numerical analysis[J]. *J Comput Appl Math*, 1989, 28(1989): 49-62.
- [7] Cai Z J. Asymptotic behavior for a class of elliptic equivalued surface boundary value problem with discontinuous interface conditions[J]. *Appl Math J Chinese Univ Ser B*, 1995, 10(3): 237-250.

- [8] 张庚骥. 电法测井[M].上册.北京:石油工业出版社,1984.
- [9] Adams R A. *Sobolev Spaces*[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [10] 彭跃军. 一类偏微分方程边值问题适定的充分必要条件[J]. 同济大学学报, 1988, 16(1):91-100.
- [11] Zhou Y, Cai Z J. Convergence of a numerical method in mathematical spontaneous potential well-logging[J]. *Eur J Appl Math*, 1996, 7(1):31-41.
- [12] Chew W C, Nie Z P, Liu Q H. An efficient solution for the response of electrical well logging tools in a complex environment[J]. *IEEE Trans Geosci Remote Sensing*, 1991, 29(2):308-313.
- [13] 袁宁, 聂在平, 聂小春. 自然电位测井响应的高效数值模拟[J]. 地球物理学报, 1998, 41(增刊): 429-436.
- [14] 李海龙. 均匀地层中自然电位测井方程的“精确解”[J]. 数学年刊, A辑, 1996, 17(1):87-96.

## Mathematical Model and Numerical Method for Spontaneous Potential Log in Heterogeneous Formations

PAN Ke-jia<sup>1</sup>, TAN Yong-ji<sup>1</sup>, HU Hong-ling<sup>2</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China;

2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University,  
Changsha 410081, P. R. China)

**Abstract:** A new spontaneous potential log model for the case when formation resistivity is not piecewise constant was introduced. The spontaneous potential satisfies an elliptic boundary value problem with jump conditions on interfaces. It was proved that the elliptic interface problem has a unique weak solution. Furthermore, a jump condition capturing finite difference scheme was proposed and applied to solve such elliptic problems. The validity and effectiveness of the proposed method were demonstrated through numerical examples.

**Key words:** spontaneous potential log; elliptic interface problems; mathematical model; numerical simulation