

# Reissner-Mindlin 板的非协调 稳定化组合有限元法

冯民富<sup>1</sup>, 杨 艳<sup>2</sup>, 周天孝<sup>3</sup>

(1. 四川大学 数学学院, 成都 610064;

2. 西南石油大学 理学院, 四川 南充 637001;

3. 航空计算研究所, 西安 710078)

(龙驭球推荐)

**摘要:** 基于 Reissner-Mindlin 板的组合变分格式, 提出了一种非协调稳定化组合有限元方法. 若有限元空间满足能量协调条件, 该方法收敛, 并有误差估计. 作为应用, 讨论了 3 种有限元空间, 并和 MITC4 和 DKQ 方法比较. 数值结果表明该方法对网格畸变不敏感, 若选取适当的参数, 在粗网格上就有高精度.

**关键词:** Reissner-Mindlin 板; 能量协调条件; 组合杂交元; 非协调有限元

**中图分类号:** O241; O343      **文献标识码:** A

## 引 言

Reissner-Mindlin 板模模拟的是弹性板在横向外力作用下的形变. 它的主要特点是引入了剪切变量. 工程上具有计算薄、中厚度的板问题时广泛使用该模型. 但是, 当板很薄的时候, 通常的有限元方法不收敛, 这就是所谓的剪切 locking 现象. 即当板的厚度越来越小时, 通常要求 Kirchhoff 假设成立, 这对低阶有限元来说要求太高. 为解决这一问题, 近年来已经有不少研究的方法.

1986 年, Brezzi<sup>[1]</sup>对 Reissner-Mindlin 板问题提出了混合有限元方法, 引入剪切变量, 避免了剪切 Locking. 但它要求有限元空间同时满足强制性和 inf-sup 条件, 这使有限元空间的构造有很大限制. 为减弱这一条件, Duran 和 Liberman<sup>[2]</sup>提出了一类混合插值/投影有限元法, 要求横向位移空间  $W_h$  和剪切力空间  $\Gamma_h$  满足  $\nabla W_h \subset \Gamma_h$ . 之后 Zhou<sup>[3]</sup>提出了部分投影法, Chinosi<sup>[4]</sup>提出了几种稳定化方法, 使得强制性条件自动满足, 但 inf-sup 条件需特定条件才能保证. 以上这些方法都是基于协调有限元逼近. 近年来, 非协调有限元方法也有不少工作<sup>[5-14]</sup>, 但通常要求有限元空间满足  $\nabla_h W_h \subset \Gamma_h$ <sup>[5-6]</sup>. 2005 年, Ming 和 Shi 等<sup>[7]</sup>在没有此条件下构造了两个满足强制性和 inf-sup 条件的四边形元. 根据广义协调元理论<sup>[11-12]</sup>, 也可以构造出一系列不需要  $\nabla_h W_h \subset \Gamma_h$  的非协调元.

\* 收稿日期: 2007-12-24; 修订日期: 2008-12-09

基金项目: 四川省科技攻关课题资助项目(05CG006-006-2)

作者简介: 冯民富(1964—), 男, 四川人, 教授(联系人. Tel: + 86-28-85460879; E-mail: fmf@wtjs.cn).

本文提出一个新的不需要满足  $\nabla_h W_h \subset \Gamma_h$  和 inf-sup 条件的非协调稳定化混合有限元方法. 设  $(w_h, \beta_h, \sigma_h)$  为  $(w, \beta, \sigma)$  的有限元解, 若  $w_h$  是非协调的,  $\beta_h$  是协调的, 且  $\sigma_h \in L^2(\Omega)$ , 那么该方法就绝对稳定. 若  $w_h$  可分解成一个协调部分加上一个非协调部分, 且非协调部分满足能量协调条件, 该格式就是收敛的, 并有误差估计. 作为应用, 对 Taylor 元<sup>[15]</sup>, Wu 元<sup>[16]</sup> 以及 Wilson 元<sup>[17-18]</sup> 进行数值模拟, 并与 MITC4<sup>[19]</sup> 和 DKQ<sup>[20]</sup> 方法比较, 数值结果表明该方法对网格畸变不敏感, 若适当选取参数, 在粗网格上就有高精度.

## 1 Reissner-Mindlin 板模型及变分格式

我们用标准的 Sobolev 空间的范数记号. 用黑体表示向量, 如  $H^s(\Omega) = [H^s(\Omega)]^2$ . 用  $(\cdot, \cdot)$  表示  $L^2(\Omega)$  或  $L^2(\Omega)$  上的内积. 设  $\Omega$  是多角形区域,  $\mathcal{T}_h$  是  $\Omega$  的一个四边形剖分, 剖分单元为  $K$ . 设  $h_K$  为单元  $K$  的直径,  $h = \max \{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$ . 定义分片 Sobolev 空间

$$H^1(\mathcal{T}_h) := \left\{ v \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^1(K) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

这样可定义该区域上的分片微分算子, 我们在算子右下方加上  $h$ . 空间  $H^1(\mathcal{T}_h)$  上的半范数为  $|v|_{1,h} = \|\nabla_h v\|_0$ , 相应的范数为  $\|v\|_{1,h}^2 = |v|_{1,h}^2 + \|v\|_0^2$ .

设  $\Omega \subset R^2$  是板的中面,  $w$  是板的横向位移,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$  是角位移,  $\sigma$  是剪切力,  $t$  为板厚,  $g \in L^2(\Omega)$  为一致载荷,  $C$  为弯曲张量, 那么固支的 Reissner-Mindlin 板问题就是求下列微分方程的解:

求  $(w, \beta, \sigma) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , 使得

$$-A\beta - \sigma = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div} \sigma = g, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (2)$$

$$\sigma = \lambda t^{-2}(\nabla w - \beta), \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad (3)$$

$$w = 0, \quad \beta = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \quad (4)$$

在式(3)中,  $\lambda = Ek/(2(1+\nu))$  是剪切模量, 这里  $k = 5/6$  为剪力修正因子,  $E$  是弹性模量,  $\nu$  是 Poisson 比. 在式(1)中,  $A$  是微分算子, 定义如下:

$$A = -\operatorname{div} C \varepsilon(\beta),$$

这里,  $\varepsilon(\cdot)$  是对称梯度算子. 对式(1)和(2)两端分别乘以  $\eta \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v \in H_0^1(\Omega)$ , 分部积分, 再相加; 将式(3)两端乘以  $\tau \in L^2(\Omega)$  然后积分. 得到如下混合变分格式.

求  $(w, \beta, \sigma) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  满足

$$a(\beta, \eta) + (\sigma, \nabla v - \eta) = (g, v), \quad \forall (v, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (5)$$

$$\lambda^{-1} t^2 (\sigma, \tau) - (\tau, \nabla w - \beta) = 0, \quad \forall \tau \in L^2(\Omega), \quad (6)$$

其中

$$a(\beta, \eta) = (C\varepsilon(\beta), \varepsilon(\eta)).$$

从式(6)中消去  $\sigma$ , 可得: 求  $(w, \beta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , 满足

$$a(\beta, \eta) + \lambda t^{-2}(\nabla w - \beta, \nabla v - \eta) = (g, v), \quad \forall (v, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \quad (7)$$

将式(5)至(7)按如下方式组合:  $[(7) \times \alpha t^2] + [(5), (6) \times (1 - \alpha t^2)]$ , 则得新的变分格式: 求  $(w, \beta, \sigma) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , 满足

$$B(w, \beta, \sigma; v, \eta, \tau) = a(\beta, \eta) + \lambda \alpha (\nabla w - \beta, \nabla v - \eta) +$$

$$(1 - \alpha t^2)[(\boldsymbol{\sigma}, \nabla v - \boldsymbol{\eta}) + \lambda^{-1} t^2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) - (\boldsymbol{\tau}, \nabla w - \boldsymbol{\beta})] = (g, v),$$

$$\forall (v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (8)$$

这里,  $\alpha > 0$  为组合参数, 且  $1 - \alpha t^2 > 0$ .

下面我们用  $C$  或  $C_i$  表示与  $h_k$  和  $t$  无关的常数, 在不同的式子里取值可以不同.

## 2 非协调有限元离散

选取有限元空间  $W_h \subset H^1(\mathcal{T}_h)$ ,  $R_h \subset H_0^1(\Omega)$ ,  $\Gamma_h \subset L^2(\Omega)$ , 得到式(8)的一个非协调稳定化格式.

求  $(w_h, \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) \in W_h \times R_h \times \Gamma_h$ , 满足

$$B_h(w_h, \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\sigma}_h; v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) =$$

$$\alpha(\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}) + \lambda\alpha(\nabla_h w_h - \boldsymbol{\beta}_h, \nabla_h v - \boldsymbol{\eta}) + (1 - \alpha t^2)[(\boldsymbol{\sigma}_h, \nabla_h v - \boldsymbol{\eta}) -$$

$$(\boldsymbol{\tau}, \nabla_h w_h - \boldsymbol{\beta}_h) + \lambda^{-1} t^2(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} b h_K^2 (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_h + \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\tau})] = (g, v),$$

$$\forall (v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) \in W_h \times R_h \times \Gamma_h. \quad (9)$$

**定义 1** 定义范数:

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (t^2 + h_K^2) \|\boldsymbol{\tau}\|_0^2,$$

$$\| \! \| (v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) \! \| \! \|_h^2 = \alpha \|\nabla_h v - \boldsymbol{\eta}\|_0^2 + \|\boldsymbol{\eta}\|_1^2 +$$

$$(1 - \alpha t^2) \left( \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,h}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\|_{0,K}^2 \right).$$

在有限元空间中有下面不等式成立:

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_1^2 \geq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_{2,K}^2 \geq C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\|_{0,K}^2. \quad (10)$$

**引理 1** 设  $b > 0, 1 - \alpha t^2 > 0$ , 那么对任意  $(v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) \in W_h \times R_h \times \Gamma_h$ , 有下式成立:

$$B_h(v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}; v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) \geq C \| \! \| (v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) \! \| \! \|_h^2. \quad (11)$$

**证明** 由式(10)及 Korn 不等式

$$B_h(v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}; v, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = \alpha(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) + \lambda\alpha \|\nabla_h v - \boldsymbol{\eta}\|_0^2 +$$

$$(1 - \alpha t^2) [\lambda^{-1} t^2 \|\boldsymbol{\tau}\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} b h_K^2 \|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\tau}\|_{0,K}^2] \geq$$

$$C_2 \|\boldsymbol{\eta}\|_1^2 + \lambda\alpha \|\nabla_h v - \boldsymbol{\eta}\|_0^2 + (1 - \alpha t^2) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\lambda^{-1} t^2 \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,K}^2 +$$

$$b h_K^2 (\|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\|_{0,K}^2 + 2(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) + \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,K}^2)] \geq$$

$$\frac{1}{2} C_2 \|\boldsymbol{\eta}\|_1^2 + \lambda\alpha \|\nabla_h v - \boldsymbol{\eta}\|_0^2 +$$

$$(1 - \alpha t^2) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \lambda^{-1} t^2 \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,K}^2 + \frac{C_1 C_2 h_K^2}{2(1 - \alpha t^2)} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\|_{0,K}^2 + \right.$$

$$\left. \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) b h_K^2 \|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\|_{0,K}^2 + \left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right) b h_K^2 \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,K}^2 \right].$$

若

$$2 < \varepsilon < 2 + \frac{C_1 C_2}{b(1 - \alpha t^2)},$$

则结论成立.

下面我们对一类非协调有限元空间讨论,为此引入以下概念:

**定义 2** 设  $W_h = W_c \oplus W_1$ , 其中,  $W_c$  为协调的,  $W_1$  为非协调的. 对任意的  $v_1 \in W_1$ , 称  $v_1$  关于剪切力是能量协调的, 如果对任意  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $\tau \in \Gamma_h$ , 存在两个与  $h_K$  无关的常数  $C > 0$  和  $l > 0$ , 满足

$$\oint_{\partial K} \tau \cdot n v_1 ds \leq Ch_K^l \|\tau\|_{0,K} \|v_1\|_{1/2,\partial K}, \quad (12)$$

其中

$$\|v_1\|_{1/2} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v_1\|_{1/2,\partial K} = \sum_{\substack{u \in W_1 \\ u|_{\partial K} = v_1|_{\partial K}}} \inf \|u\|_{1,K}.$$

特别地, 如果

$$\oint_{\partial K} \tau \cdot n v_1 ds = 0, \quad (13)$$

则称  $v_1$  是完全能量协调的. 我们称式(12)或(13)为能量协调条件.

**注 1** Zhou<sup>[22]</sup>在研究弹性问题的组合杂交有限元法时,提出了所谓的“能量协调条件”,本文建立的能量协调条件,可以看作是文献[22]的能量协调思想关于 Reissner-Mindlin 板非协调有限元逼近的推广和应用.

**定理 1** 设  $(w_h, \beta_h, \sigma_h)$  和  $(w, \beta, \sigma)$  分别为式(9)和式(1)至(3)的解.  $W_h = W_c \oplus W_1$ , 其中,  $W_1$  满足式(12), 那么下面不等式成立:

$$\begin{aligned} & \|\beta - \beta_h\|_1 + \sqrt{\alpha} \|\nabla_h(w - w_h) - (\beta - \beta_h)\|_0 + \\ & \sqrt{1 - \alpha t^2} (\|\sigma - \sigma_h\|_{0,h} + h \|A(\beta - \beta_h)\|_0) \leq \\ & C \{ \|\tilde{\beta} - \beta\|_1 + (\sqrt{\alpha} + h^{-1}) \|\nabla_h(\tilde{w} - w) - (\tilde{\beta} - \beta)\|_0 + \\ & \sqrt{1 - \alpha t^2} [\|\tilde{\sigma} - \sigma\|_{0,h} + \alpha^{-1/2} \|\tilde{\sigma} - \sigma\|_0 + h \|A(\tilde{\beta} - \beta)\|_0] \} + \\ & Ch^l \|\sigma\|_0, \quad \forall (\tilde{w}, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}) \in W_h \times R_h \times \Gamma_h. \end{aligned} \quad (14)$$

**证明** 对式(1)至(3), 两端分别乘以  $\eta \in R_h, v \in W_h$  和  $\tau \in \Gamma_h$ , 分部积分, 则有

$$a(\beta, \eta) + (\sigma, \nabla_h v - \eta) = (g, v) + b(\sigma, v_1), \quad \forall (v, \eta) \in W_h \times R_h, \quad (15)$$

$$\lambda^{-1} t^2 (\sigma, \tau) - (\tau, \nabla_h w - \beta) = 0, \quad \forall \tau \in \Gamma_h, \quad (16)$$

其中

$$b(\sigma, v_1) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \sigma \cdot n v_1 ds, \quad v_1 = v - v_c, \quad v_1 \in W_1, \quad v_c \in W_c.$$

消去  $\sigma$ , 有

$$\begin{aligned} a(\beta, \eta) + \lambda t^{-2} (\nabla_h w - \beta, \nabla_h v - \eta) &= (g, v) + b(\sigma, v_1), \\ &\forall (v, \eta) \in W_h \times R_h. \end{aligned} \quad (17)$$

由式(15)至(17)以及式(9)可得, 对任意的  $(\tilde{w}, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}) \in W_h \times R_h \times \Gamma_h$ , 有

$$\begin{aligned} B_h(\tilde{w} - w_h, \tilde{\beta} - \beta_h, \tilde{\sigma} - \sigma_h; v, \eta, \tau) &= \\ B_h(\tilde{w} - w, \tilde{\beta} - \beta, \tilde{\sigma} - \sigma; v, \eta, \tau) - b(\sigma, v_1). \end{aligned} \quad (18)$$

令  $v = \tilde{w} - w_h, \eta = \tilde{\beta} - \beta_h, \tau = \tilde{\sigma} - \sigma_h$ , 由引理 1 得

$$B_h(\tilde{w} - w_h, \tilde{\beta} - \beta_h, \tilde{\sigma} - \sigma_h; v, \eta, \tau) \geq C \text{III}(v, \eta, \tau) \text{III}_h^2. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_h(\tilde{w} - w, \tilde{\beta} - \beta, \tilde{\sigma} - \sigma; v, \eta, \tau) &\leq \\ C \{ \|\tilde{\beta} - \beta\|_1 \cdot \|\eta\|_1 + \alpha \|\nabla_h(\tilde{w} - w) - (\tilde{\beta} - \beta)\|_0 \cdot \|\nabla_h v - \eta\|_0 + \\ (1 - \alpha t^2) [\|\tilde{\sigma} - \sigma\|_0 \cdot \|\nabla_h v - \eta\|_0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| \tau \|_0 \cdot \| \nabla_h(\tilde{w} - w) - (\tilde{\beta} - \beta) \|_0 + t^2 \| \tilde{\sigma} - \sigma \|_0 \cdot \| \tau \|_0 + \\ & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} b h_K^2 \| A(\tilde{\beta} - \beta) + (\tilde{\sigma} - \sigma) \|_{0,K} \cdot \| A\eta + \tau \|_{0,K} \} \leq \\ & C \{ \| \tilde{\beta} - \beta \|_1 + \sqrt{\alpha} \| \nabla_h(\tilde{w} - w) - (\tilde{\beta} - \beta) \|_0 + \\ & \sqrt{1 - \alpha t^2} [ \alpha^{-1/2} \| \tilde{\sigma} - \sigma \|_0 + h^{-1} \| \nabla_h(\tilde{w} - w) - (\tilde{\beta} - \beta) \|_0 + \\ & \| \tilde{\sigma} - \sigma \|_{0,h} + h \| A(\tilde{\beta} - \beta) + (\tilde{\sigma} - \sigma) \|_0 ] \} \cdot C \| (v, \eta, \tau) \|_h, \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} & \| \eta \|_1 + \sqrt{\alpha} \| \nabla_h v - \eta \|_0 + \sqrt{1 - \alpha t^2} ( \| \tau \|_{0,h} + h \| A\eta \|_0 ) \leq \\ & C \{ \| \tilde{\beta} - \beta \|_1 + (\sqrt{\alpha} + h^{-1}) \| \nabla_h(\tilde{w} - w) - (\tilde{\beta} - \beta) \|_0 + \\ & \sqrt{1 - \alpha t^2} [ \| \tilde{\sigma} - \sigma \|_{0,h} + \alpha^{-1/2} \| \tilde{\sigma} - \sigma \|_0 + \\ & h \| A(\tilde{\beta} - \beta) \|_0 ] \} + \frac{|b(\sigma, v_1)|}{\| (v, \eta, \tau) \|_h}. \end{aligned} \quad (20)$$

则

$$\begin{aligned} & \| (v, \eta, \tau) \|_h \geq \min\{\sqrt{\alpha}, 1\} \| \nabla_h v - \eta \|_0 + \| \eta \|_1 \geq \\ & \min\{\sqrt{\alpha}, 1\} ( \| \nabla_h v \|_0 - \| \eta \|_0 ) + \| \eta \|_1 \geq C \| \nabla_h v \|_0. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(12)和(21)得

$$\begin{aligned} & \frac{b(\sigma, v_1)}{\| (v, \eta, \tau) \|_h} \leq \{ Ch^t \| \sigma \|_0 \cdot \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \| v_1 \|_{1/2, \partial K} \} / \{ C \| \nabla_h v \|_0 \} \leq \\ & \frac{Ch^t \| \sigma \|_0 \cdot \| \nabla_h v \|_0}{C \| \nabla_h v \|_0} \leq Ch^t \| \sigma \|_0. \end{aligned} \quad (22)$$

根据式(20)及三角不等式即得结论.

在定义 1 中, 若取

$$\alpha = \bar{\alpha} h_i^{-2}, \quad (23)$$

其中,  $h_i = \max\{h, t\}$ ,  $\bar{\alpha}$  为常数, 且  $0 < \bar{\alpha} < 1$ . 那么有

**定理 2** 在式(23)及定理 1 的条件下, 有下式成立:

$$\begin{aligned} & \| \beta - \beta_h \|_1 + h_i^{-1} \| \nabla_h(w - w_h) - (\beta - \beta_h) \|_0 + \\ & \| \sigma - \sigma_h \|_{0,h} + h \| A(\beta - \beta_h) \|_0 \leq \\ & \frac{C}{\min(\sqrt{\bar{\alpha}}, \sqrt{1 - \bar{\alpha}})} \{ \| \tilde{\beta} - \beta \|_1 + h_i^{-1} \| \nabla_h(\tilde{w} - w) - (\tilde{\beta} - \beta) \|_0 + \\ & \| \tilde{\sigma} - \sigma \|_{0,h} + h \| A(\tilde{\beta} - \beta) \|_0 \} + Ch^t \| \sigma \|_0. \end{aligned}$$

### 3 能量协调条件及有限元空间

设  $F_i$  是从参考单元  $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  到  $K_i$  的等参变换(见图 1). 其中,  $(x_i, y_i)$  为 4 个定点的坐标. 则有

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F_i(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \zeta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi \zeta + a_3 \zeta \\ b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi \zeta + b_3 \zeta \end{bmatrix},$$

这里

$$N_i(\xi, \zeta) = \frac{1}{4} [(1 + \xi \xi)(1 + \zeta \zeta)] \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

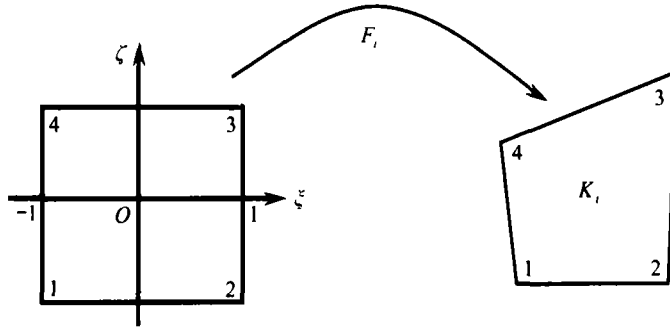


图1 双线性等参变换

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \zeta_3 \\ \xi_4 & \zeta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}.$$

$\hat{v}_c = \hat{v}(F_i(\xi, \zeta)) = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4) \mathbf{q}_c$  为协调位移, 其中,  $\mathbf{q}_c = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)^T$  为节点位移向量.

定义三类非协调有限元空间——Taylor 元<sup>[15]</sup>, Wu 元<sup>[16]</sup>及 Wilson 元<sup>[17-18]</sup>:

$$\hat{v}_1^\pi = (N_1^i \ N_2^i) q_1, \hat{v}_1^{Wu} = (N_3^i \ N_4^i) q_1, \hat{v}_1^{Ws} = (N_5^i \ N_6^i) q_1.$$

其中,  $q_1 = (v_5 \ v_6)$  表示没有节点的内部自由度,

$$N_1^i = \left(1 - \frac{J_2}{J_0} \zeta\right) (1 - \xi^2) + \frac{J_1}{J_0} \xi (1 - \zeta^2),$$

$$N_2^i = \left(1 - \frac{J_1}{J_0} \xi\right) (1 - \zeta^2) + \frac{J_2}{J_0} \zeta (1 - \xi^2),$$

$$N_3^i = \xi^2 - \frac{2J_1}{3J_0} \xi + \frac{2J_2}{3J_0} \zeta, \quad N_4^i = \zeta^2 + \frac{2J_1}{3J_0} \xi - \frac{2J_2}{3J_0} \zeta,$$

$$N_5^i = 1 - \xi^2, \quad N_6^i = 1 - \zeta^2.$$

这里,  $J_0 = a_1 b_3 - a_3 b_1, J_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1, J_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$ .

设

$$\mathbf{R}_h := \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \boldsymbol{\eta}|_{K_i} \in (Q_1(K_i))^2, K_i \in \mathcal{T}_h \},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_h := \{ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}|_{K_i} = \text{const}, K_i \in \mathcal{T}_h \},$$

$$U_{\pi}^h := \{ v : v|_{K_i} = v_c + v_1^\pi|_{K_i} = \hat{v}_c + \hat{v}_1^\pi \circ F_i^{-1}, K_i \in \mathcal{T}_h \},$$

$$U_{Wu}^h := \{ v : v|_{K_i} = v_c + v_1^{Wu}|_{K_i} = \hat{v}_c + \hat{v}_1^{Wu} \circ F_i^{-1}, K_i \in \mathcal{T}_h \},$$

$$U_{Ws}^h := \{ v : v|_{K_i} = v_c + v_1^{Ws}|_{K_i} = \hat{v}_c + \hat{v}_1^{Ws} \circ F_i^{-1}, K_i \in \mathcal{T}_h \}.$$

引理 2<sup>[15-16]</sup> 设  $\mathcal{T}_h$  为正则剖分, 则对任意的  $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Gamma}_h, v \in U_{\pi}^h$  或  $v \in U_{Wu}^h$ , 有  $b(\boldsymbol{\tau}, v) = 0$ .

引理 3<sup>[17]</sup> 设  $\mathcal{T}_h$  为正则剖分, 则对任意的  $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Gamma}_h, v \in U_{Ws}^h$ , 有下式成立:

$$b(\boldsymbol{\tau}, v) \leq Ch \|\boldsymbol{\tau}\|_0 \|v\|_1.$$

定义 3 组四边形有限元空间:

$$S_{PT\pi} = U_{\pi}^h \times \mathbf{R}_h \times \boldsymbol{\Gamma}_h, \quad S_{PWu} = U_{Wu}^h \times \mathbf{R}_h \times \boldsymbol{\Gamma}_h, \quad S_{PWs} = U_{Ws}^h \times \mathbf{R}_h \times \boldsymbol{\Gamma}_h.$$

根据定理 2, 可得

**定理 3** 设  $(w, \beta, \sigma)$  和  $(w_h, \beta_h, \sigma_h)$  分别为式(1)至(3)和(9)的解,若有限元空间选取为  $S_{PTI}, S_{PW_u}$  或者  $S_{PW_s}$ . 那么在式(23)的条件下,有如下误差估计:

$$\begin{aligned} & \| \beta - \beta_h \|_1 + h_i^{-1} \| \nabla_h(w - w_h) - (\beta - \beta_h) \|_0 + \\ & \| \sigma - \sigma_h \|_{0,h} + h \| A(\beta - \beta_h) \|_0 \leq \\ & \frac{Ch}{\min(\sqrt{\bar{\alpha}}, \sqrt{1 - \bar{\alpha}})} \{ \| \beta \|_2 + \| w \|_3 + t \| \sigma \|_1 + \| \sigma \|_0 \}. \end{aligned}$$

注 2 文献[18]中也用到 Wilson 元,但文献[18]中的误差估计不是最优,而我们这里的为最优误差估计.

当  $t$  很小时,有  $h_t = h$ , 此时还有如下结论成立:

**定理 4** 设  $(w, \beta, \sigma)$  和  $(w_h, \beta_h, \sigma_h)$  分别为式(1)至(3)和(9)的解. 若  $t < h$ , 那么在定理 3 的条件下,有

$$\begin{aligned} & \| \nabla_h(w - w_h) - (\beta - \beta_h) \|_0 \leq \\ & \frac{Ch^2}{\min(\sqrt{\bar{\alpha}}, \sqrt{1 - \bar{\alpha}})} \{ \| \beta \|_2 + \| w \|_3 + t \| \sigma \|_1 + \| \sigma \|_0 \}. \end{aligned}$$

### 4 数值结果

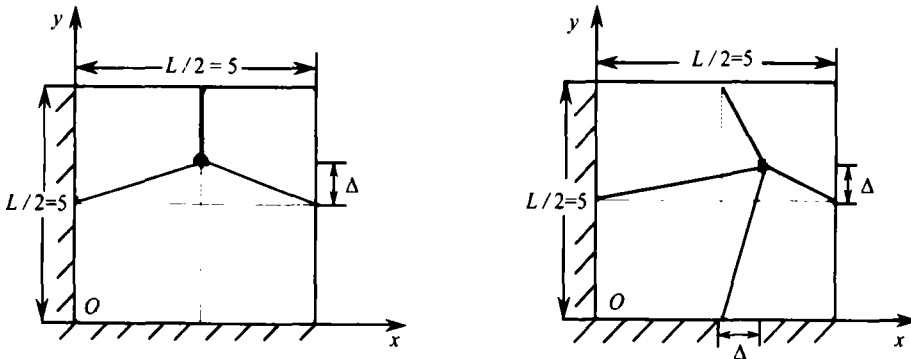
这一节,我们对上一节提出的有限元空间进行数值模拟,并与 MITC4<sup>[19]</sup>和 DKQ<sup>[20]</sup>元比较.

在数值模拟中,我们取  $E = 10\ 920, \mu = 0.3$ ,一致载荷  $g = 1$ . 设板的长度为  $L$ . 由第 2 节的分析知,当  $\alpha \propto h_i^{-2}$  时,得到的误差才是最优的,因此计算时我们取  $\alpha = \bar{\alpha} h_i^{-2}$ ,其中  $\bar{\alpha}$  为常数. 而  $b$  对结果影响不大,计算时我们取  $b = 0.01$ .

#### 4.1 分片检验

文献[15]和[16]中分别证明了 Taylor 元和 Wu 元可以通过分片检验. 文献[17]中指出,尽管 Wilson 元不能通过分片检验,它仍是收敛的. 从上一节的证明我们也可以看出 Wilson 元的收敛性. 这意味着能量协调条件比分片检验的条件要弱些.

#### 4.2 网格畸变的敏感性



(a) 不对称畸变

(b) 对称畸变

图 2 网格畸变

我们在粗网格上以固定方板 ( $L/t = 1\ 000$ ) 为例来研究本文的方法对网格畸变的敏感性. 考虑单元中点沿着与一边平行的方向移动(图 2(a))以及单元中心点沿对角线移动(图 2(b))两种畸变情况. 表 1 和表 2 分别给出了两种情况的数值结果,并与 MITC 4 以及 DKQ 方法比较. 从结果可以看出,有限元空间  $S_{PW_u}/S_{PTI}/S_{PW_s}$  对网格畸变都不敏感.

表1 不对称畸变时中心横向位移  $w_h$  的计算结果 ( $L/t = 1000, \bar{\alpha} = 0.3$ )

$\Delta$	$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	$w_h$ ( $S_{PTI}$ )	$w_h$ ( $S_{PWu}$ )	$w_h$ ( $S_{PWs}$ )	$w_h$ (理论值)
0.00	121.3	146.1	126.7	126.7	126.7	
0.02	112.3	145.8	126.6	126.8	126.6	
0.04	91.82	145.7	126.5	126.8	126.5	
0.06	70.54	145.6	126.3	126.9	126.3	
0.08	53.25	145.5	126.2	126.9	126.2	
0.10	40.48	145.5	126.0	126.9	126.0	
0.15	22.06	145.1	125.5	126.9	125.6	
0.20	13.46	144.8	124.9	126.8	125.0	126.5
0.30	6.339	144.3	123.6	126.4	123.9	
0.50	2.326	143.5	120.1	124.9	121.0	
0.80	0.8923	142.8	113.4	120.9	115.2	
1.00	0.5585	142.6	108.4	117.5	110.7	
1.50	0.2302	143.1	102.0	109.1	107.8	
2.00	0.1176	144.9	98.50	100.5	99.96	
2.49	0.0679	146.9	86.96	90.74	88.62	

表2 对称畸变时中心横向位移  $w_h$  的计算结果 ( $L/t = 1000, \bar{\alpha} = 0.3$ )

$\Delta$	$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	$w_h$ ( $S_{PTI}$ )	$w_h$ ( $S_{PWu}$ )	$w_h$ ( $S_{PWs}$ )	$w_h$ (理论值)
-1.249	118.6	169.4	99.37	102.2	104.3	
-1.00	126.0	165.8	109.1	110.9	115.7	
-0.50	126.4	154.3	123.2	121.2	127.6	
0.00	121.1	146.1	126.7	126.7	126.7	126.5
0.50	115.3	141.8	116.2	120.1	117.3	
1.00	110.7	142.7	107.0	110.4	108.6	
1.249	108.5	139.8	99.5	101.4	100.4	

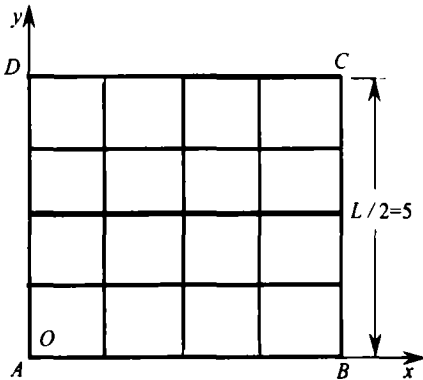


图3 1/4方板的剖分

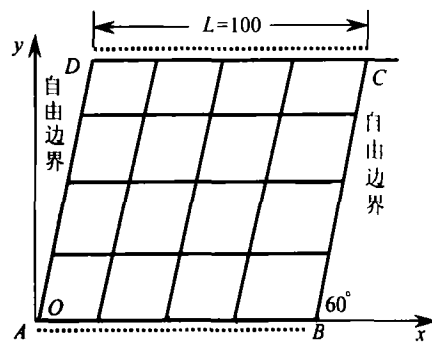


图4 Razaque斜板的剖分

### 4.3 方板

图3给出了方板的剖分。我们考虑了简支方板( $SS2, w = \beta_s = 0$ )和夹支方板( $w = \beta_n = \beta_s = 0$ )两种情况。其中, $n$ 表示板边界的法向, $s$ 表示板边界的切向。表3给出了简支方板SS2在一致载荷下从薄板( $L/t = 10^{30}$ )到厚板( $L/t = 5$ )时中心横向位移的数值结果。表4给出夹支方板( $L/t = 100$ )的中心横向位移。数值结果表明该方法无论对薄板还是厚板都有高精



度,并且当板很薄的时候不会出现剪切 locking 现象.

表 3  $L/t$  变化时 SS 2 方板的中心横向位移  $w_h(8 \times 8, \bar{\alpha} = 0.3)$

情况	$L/t$							
	5	20	$10^2$	$10^5$	$10^7$	$10^{10}$	$10^{15}$	$10^{30}$
$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	490.0	410.6	405.5	405.3	417.0	0	0	0
$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	406.1	406.1	406.1	406.1	406.1	406.1	406.1	406.1
$w_h$ (PTI/PW <sub>u</sub> /PW <sub>s</sub> )	496.0	411.8	406.7	406.5	406.5	406.5	406.5	406.5
$w_h$ (理论值)	490.8	410.8	406.4	406.2	406.2	406.2	406.2	406.2

注 3 当剖分单元为平行四边形时,这 3 种有限元空间的结果是相同的,表 3 至 6 中只给出了一组结果.

表 4 夹支方板的中心横向位移  $w_h(L/t = 100, \bar{\alpha} = 0.3)$

情况	$2 \times 2$	$4 \times 4$	$6 \times 6$	$8 \times 8$	$10 \times 10$	精确值
$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	121.3	125.3	126.1	126.4	126.5	
$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	146.1	131.9	129.0	127.9	127.4	126.5
$w_h$ (PTI/PW <sub>u</sub> /PW <sub>s</sub> )	149.9	129.2	128.1	127.1	126.8	

#### 4.4 斜板

(a) 图 4 给出了  $60^\circ$  Razzaque 斜板的剖分. 这类板有两对条边为固定边界 ( $w|_{AB,CD} = 0$ ),另外两条( $AD,BC$ )是自由边界. 表 5 给出了计算结果.

(b) 图 5 为  $30^\circ$ 斜板的剖分. 这类板的边界条件为 ( $w|_{ABCD} = 0$ ). 表 6 给出了计算结果. 数值结果可以看出,该方法应用在斜板时也有很好的结果.

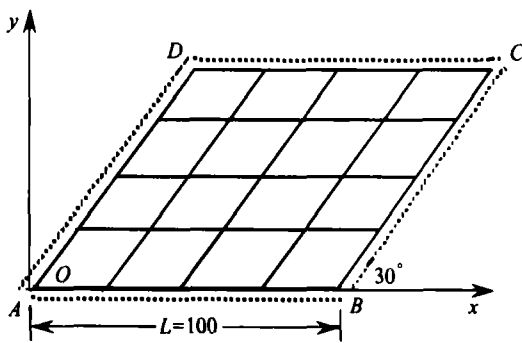


图 5  $30^\circ$ 斜板的剖分

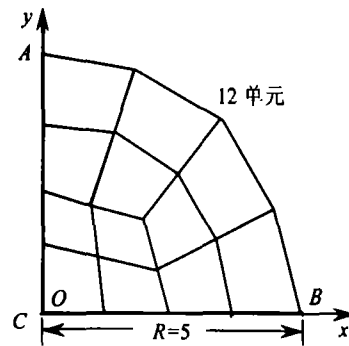


图 6  $1/4$ 圆板的剖分

表 5 Razzaque 板的中心横向位移  $w_h(\bar{\alpha} = 0.05)$

情况	$L/t$							
	100				1 000			
	$2 \times 2$	$4 \times 4$	$8 \times 8$	$12 \times 12$	$2 \times 2$	$4 \times 4$	$8 \times 8$	$12 \times 12$
$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	0.397 9	0.674 1	0.761 5	0.779 2	0.397 6	0.673 7	0.761 0	0.778 6
$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	0.666 7	0.769 6	0.787 7	0.790 9	0.666 7	0.769 6	0.787 7	0.790 9
$w_h$ (PTI/PW <sub>u</sub> /PW <sub>s</sub> )	0.601 0	0.778 4	0.785 8	0.788 4	0.601 0	0.778 4	0.785 8	0.788 4
$w_h$ (理论值)	0.794 5							

#### 4.5 圆板

这里讨论了夹支圆板 ( $w = \beta_n = \beta_s = 0$ )和简支圆板两种边界情况,单元剖分如图 6 所示.

对称条件是  $\beta_x|_{CA} = 0, \beta_y|_{CB} = 0$ . 设圆板的半径为 5, 结果如表 7 至 8 所示. 可以看出, 该方法即使在粗网格上也有很好的结果.

表 6 30°板的中心横向位移  $w_h(\bar{\alpha} = 0.05)$

情况	$L/t$					
	100			1 000		
	4 × 4	8 × 8	16 × 16	4 × 4	8 × 8	16 × 16
$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	0.359	0.357	0.383	0.358	0.343	0.343
$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	0.760	0.507	0.443	0.760	0.507	0.443
$w_h$ (PTI/PWu/PWs)	0.500	0.458	0.400	0.500	0.459	0.406
$w_h$ (理论值)	0.408					

表 7 夹支圆板的中心横向位移  $w_h(R/t = 50, \bar{\alpha} = 0.15)$

单元数 $N$	$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	$w_h(S_{PTI})$	$w_h(S_{PWu})$	$w_h(S_{PWs})$	$w_h$ (理论值)
3	9.068 1	10.756	9.371	10.199	11.221	
12	9.698 6	10.064	9.561	9.855	10.118	9.783 5
48	9.764 5	9.854 2	9.712	9.791	9.853	

表 8 简支圆板的中心横向位移  $w_h(R/t = 50, \bar{\alpha} = 0.05)$

单元数 $N$	$w_h$ (MITC 4 <sup>[19]</sup> )	$w_h$ (DKQ <sup>[20]</sup> )	$w_h(S_{PTI})$	$w_h(S_{PWu})$	$w_h(S_{PWs})$	$w_h$ (理论值)
3	36.430	28.118	37.035 8	38.988	40.465	
12	39.038	39.408	38.935	39.462	39.799	39.831
48	39.634	39.720	39.580	39.708	39.787	

致谢 作者衷心感谢编委和审稿人对本文提出的宝贵的建设性意见, 使本文有进一步完善和提高.

### [参 考 文 献]

- [1] Brezzi F. Numerical approximation of Mindlin-Reissner plates[J]. *Math Comput*, 1986, 47(175): 151-158.
- [2] Duran R, Lieberman E. On mixed finite element methods for the Reissner-Mindlin plate model[J]. *Math Comput*, 1992, 58(198): 561-573.
- [3] ZHOU Tian-xiao. The partial projection method in the finite element discretization of the Reissner-Mindlin plate model[J]. *J Comput Math*, 1995, 13(2): 172-191.
- [4] Chinosi C. Remarks on some mixed finite element schemes for Reissner-Mindlin plate model[J]. *Calcolo*, 2002, 39(2): 87-108.
- [5] Lovadina C. A low-order nonconforming finite element for Reissner-Mindlin plates[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2005, 42(6): 2688-2705.
- [6] Chinosi C, Lovadina C, Marini L D. Nonconforming locking-free finite elements for Reissner-Mindlin plates[J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2006, 195(25/28): 3448-3460.
- [7] MING Ping-bing, SHI Zhong-ci. Two nonconforming quadrilateral elements for the Reissner-Mindlin plate[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 2005, 15(10): 1503-1517.
- [8] LUO Kun, ZHOU Tian-xiao. An accurate quadrilateral plate element based on energy optimization[J]. *Commun Numer Meth Engng*, 2005, 21(9): 487-498.
- [9] CHEN Shao-chun, SHI Dong-yang. General error estimates of nonconforming plate elements[J].

- Mathematica Numerica Sinica*, 2000, 22(1): 295-300.
- [10] HU Jun, SHI Zhong-ci. Two lower order nonconforming rectangular elements for the Reissner-Mindlin plate[J]. *Math Comput*, 2007, 76(260): 1771-1786.
- [11] 龙驭球, 赵俊卿. 厚板薄板通用的广义协调元[J]. 工程力学, 1988, 5(1): 1-8.
- [12] 龙志飞, 岑松. 有限元法新论[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001.
- [13] CEN Song, LONG Yu-qiu, YAO Zhen-han, et al. Application of the quadrilateral area co-ordinate method; a new element for Mindlin-Reissner plate[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2006, 66(1): 1-45.
- [14] FENG Min-fu, YANG Rong-kui, XIONG Hua-xin. Stabilized finite element methods for the Reissner-Mindlin plate[J]. *J Numer Math*, 1999, 8(2): 125-132.
- [15] Taylor R L, Simo J C, Zienkiewicz O C, et al. The patch test—a condition for assessing FEM convergence[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1986, 22(1): 39-62.
- [16] WU Chang-chun, BIAN Xue-huang. *Nonconforming Numerical Analysis and Combined Hybrid Finite Element Methods*[M]. Beijing: Science Press, 1997.
- [17] SHI Zhong-ci. A convergence condition for the quadrilateral Wilson element[J]. *Numer Math*, 1984, 44(3): 349-361.
- [18] ZHANG Zhi-min, ZHANG Shang-you. Derivative superconvergence of rectangular finite elements for the reissner-mindlin plate[J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1995, 134(1): 1-16.
- [19] Bathe K J, Dvorkin E. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1985, 21(2): 367-383.
- [20] Batoz J L, Benthahar M. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1982, 18(11): 1655-1677.
- [21] Brezzi F, Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Method*[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [22] ZHOU Tian-xiao. Stabilized hybrid finite element methods based on the combination of saddle point principles of elasticity problems[J]. *Math Comput*, 2003, 72(244): 1655-1673.

## Nonconforming Stabilized Combined Finite Element Method for the Reissner-Mindlin Plate

FENG Min-fu<sup>1</sup>, YANG Yan<sup>2</sup>, ZHOU Tian-xiao<sup>3</sup>

(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China;

2. School of Sciences of Southwest Petroleum University,  
Nanchong, Sichuan 637001, P. R. China;

3. Institute of Aeronautical Computing Technique, Xi'an 710078, P. R. China)

**Abstract:** Based on the combination of two variational principles, a nonconforming stabilized finite element method was presented for the Reissner-Mindlin plates. The method is convergent when the finite element space is energy-compatible. Moreover, the error estimates were derived. In particular, three finite element spaces were applied to the computation. Numerical results show that the method is insensitive to the mesh distortion and has better behavior than MITC4 and DKQ methods. If the parameters are properly chosen, high accuracy will be achieved at coarse meshes.

**Key words:** Reissner-Mindlin plate; energy-compatibility; combined FEM; nonconforming finite element