

# 直角坐标网格下 LSFD 方法的 显式公式和性能研究<sup>\*</sup>

蔡庆东<sup>1,2</sup>

(1. 北京大学 工学院 力学与空天技术系, 湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871;

2. 北京大学 工学院 应用物理与技术研究中心, 北京 100871)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 重点讨论了 LSFD(least square-based finite difference)方法和传统的 FD(finite difference)方法在性能上的对比问题。对于传统的中心差分格式,一阶导数和二阶导数在二维情况的数值格式基架点有 9 个点,三维情况有 27 个点。在同样的基架点下,给出了 LSFD 方法近似一阶导数和二阶导数的显式公式,并指出 LSFD 方法在这种情况下实质上就是在不同网格线上的传统中心差分格式的组合。在数值模拟中,LSFD 方法达到收敛所需要的迭代步数比传统差分格式少,并且  $x$  和  $y$  方向的网格纵横尺度比在 LSFD 方法中是一个非常重要的参数,对计算的稳定性有重要影响。

**关键词:** LSFD 方法; 无网格方法; 直角坐标网格; 网格纵横尺度比

**中图分类号:** O241.82; O242 **文献标识码:** A

## 引言

在流动模拟中,最常用的基于网格的方法包括有限差分法(FD)<sup>[1]</sup>、有限元方法(FE)<sup>[2-3]</sup>以及有限体积方法(FV)<sup>[4]</sup>。FD用于规则区域上时,通常采用结构化的规则网格,在这种网格上,FD精度高、效率高、容易实现。对于复杂区域,则必须引入如坐标变换这种额外的处理方法。FE和FV则可以采用非结构网格比较方便地处理不规则区域。所有这些方法的共同点都是都需要关于计算网格的详细结构信息,包括所有节点以及网格单元的连接关系、层次结构等数据,对于复杂问题,网格的生成和修改都不是件容易的事情。

为简化网格生成这一过程,通常可以使用树结构直角坐标网格<sup>[5]</sup>,FD和FV都可以在这种网格上实现。采用直角坐标网格的主要不足是无法很好地处理曲线边界。似乎这种不足可以通过无网格方法克服。这里,无网格方法指的是能够完全利用节点信息来构造函数值或者导数值的方法。目前,从文献中可以见到大量的无网格方法,包括光滑粒子流体动力学方法(SPH)<sup>[6]</sup>、再生核粒子方法(RPKM)<sup>[7-8]</sup>、移动最小二乘法(MLSQ)<sup>[9]</sup>、无单元 Galerkin 法(EFG)<sup>[10]</sup>、hp-云团法<sup>[11]</sup>、径向基函数法(RBF)<sup>[12-15]</sup>等。在这些无网格方法中,我们分析 Ding

\* 收稿日期: 2008-06-05; 修订日期: 2008-10-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872005; 10532010)

作者简介: 蔡庆东(1968—),男,吉林松原人,副教授,博士(Tel: + 86-10-62757942; E-mail: caiqd@pku.edu.cn).

等近期提出的一种基于最小二乘法的有限差分方法(LSFD)<sup>[16-17]</sup>。在其他文献中,也可以看到和 LSFD 类似的方法<sup>[18-22]</sup>。这种方法已经成功用于流体力学问题<sup>[23]</sup>和固体力学问题<sup>[24-26]</sup>的模拟。LSFD 是直接离散偏微分方程的一种有效方法,是传统差分格式的一种自然推广。众所周知,传统差分格式可以利用一维的 Taylor 级数展开,通过把导数看作未知量得到。如文献[17]中所给出的那样,对多维情况,同样可以利用多维 Taylor 级数展开,把所有空间导数都当作未知量,引入最小二乘法做优化,建立多维 LSFD 方法。由于 LSFD 方法仅使用了节点处的信息,可以用于节点是随机分布的情况。正是由于这种性质,使得该方法可以用于不规则的节点分布的复杂问题的模拟。另外,必须指出,和传统的 FD 方法对比,LSFD 方法需要更多的存储空间来存储节点的相邻关系信息。为了降低存储量的需求,同时又能处理复杂边界,不规则节点可以限制在边界附近的区域,在其他区域,采用规则的直角坐标网格。文献[17]的研究表明,采用这种技术可以极大地提高效率。这其实就是把 LSFD 方法用于直角坐标网格下的规则节点分布情况,据此可以提出几个相关的问题。首先就是在这种特殊情况下,是否可以给出 LSFD 的显式公式。通常情况下,LSFD 的公式都是通过求解一个方程组隐式给出的,不方便用于理论分析。另外一个问题就是,传统的 FD 方法在直角坐标网格上是一种非常自然的方法,把 LSFD 也方法用于直角坐标网格时,这两种方法在性能上有什么不同,包括精度、收敛速度、数值稳定性等。这些问题到目前为止还没有在文献中简单明了地论述,本文正是要回答这些问题。

本文针对二维 9 点基架点和三维 27 点基架点给出 LSFD 方法对一阶导数和二阶导数的显式近似表达式。这两种基架点是传统差分格式中最常使用的。关于 LSFD 方法和传统中心差分格式性能的研究通过对 Poisson 方程的求解情况给出。研究表明,达到同样的收敛解,LSFD 方法比传统中心差分格式所需要的迭代次数少很多,并且在 LSFD 方法中, $x$  和  $y$  方向的网格尺度比是一个重要的参数,对 LSFD 方法的稳定性有很大的影响。

## 1 LSFD 方法

### 1.1 一般形式

以二维情况为例,一个参考点  $(x_0, y_0)$  周围有  $n$  个邻点:  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。点集  $S = \{(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n\}$ , 构成了点  $(x_0, y_0)$  的基架点集。对于一般的二维结构网格,  $n = 8$ 。对于非结构网格,在不同点处,这个  $n$  是不同的。建立一个数值方法本质上就是利用点集  $S$  上的给定函数值  $u_i (i = 0, 1, \dots, n)$  给出点  $(x_0, y_0)$  点处函数导数  $u_x$  和  $u_y$  的近似。和建立传统差分格式的思想一样,首先把点  $(x_i, y_i)$  对参考点做 Taylor 展开:

$$u_i = u_0 + u_x \Delta x_i + u_y \Delta y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

其中,  $\Delta x_i = x_i - x_0, \Delta y_i = y_i - y_0$ 。方程组(1)只有两个未知量  $u_x$  和  $u_y$ , 但总共有  $n$  个方程, 可以通过最小二乘法得到其解。也就是通过对如下定义的误差取极小:

$$Q = \sum_{i=1}^n W_i (u_0 + u_x \Delta x_i + u_y \Delta y_i - u_i)^2, \quad (2)$$

这里  $W_i$  是一个给定的权系数, 定义向量  $p = (u_x, u_y)^T, \Delta u = (u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_n - u_0)^T$ 。利用最小二乘法, 得到如下方程组:

$$Bp = D\Delta u, \quad (3)$$

其中,  $B$  是  $2 \times 2$  矩阵,  $D$  是  $2 \times n$  矩阵,

$$d_{1i} = W_i \Delta x_i, \quad d_{2i} = W_i \Delta y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

需要指出的是,矩阵  $B$  和  $D$  仅依赖于网格,和函数无关. 当选取适当的基架点集  $S$  后,矩阵  $B$  是可逆的,于是有

$$P = B^{-1} D \Delta u. \quad (5)$$

$B^{-1} D$  是一个  $2 \times n$  矩阵,并且也是仅和网格有关的. 根据方程(5),在基架点  $S$  上给定函数值后,通过把该矩阵和  $\Delta u$  相乘,可以得到 0 点处的导数近似. 也就是说,矩阵  $B^{-1} D$  实质上就是一个差分算子. 类似地,在式(1)中保留更高阶导数项,可以得到高阶近似.

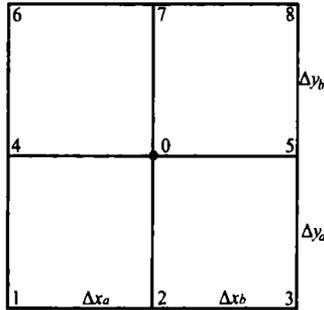


图 1 二维直角坐标网格,参考点 0 周围有 8 个邻点

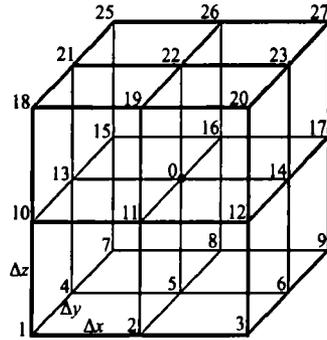


图 2 三维直角坐标网格,参考点 0 周围有 26 个参考点,网格尺度为  $\Delta x, \Delta y$  和  $\Delta z$

### 1.2 二维 9 点基架点上的形式

将 LSF D 方法用于图 1 所示的网格,点 0 有 8 个邻点. 引入列平均值  $U_{x-}, U_{x0}, U_{x+}$ , 以及行平均值  $U_{y-}, U_{y0}, U_{y+}$ , 具体定义为  $U_{y-} = (U_1 + U_2 + U_3)/3, U_{x0} = (U_2 + U_0 + U_7)/3$ . 对于图 1 所示的基架点,经过一些代数运算,得到

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{9(\Delta y_a^2 + \Delta y_b^2)[\Delta x_b(U_{x+} - U_0) + \Delta x_a(U_0 - U_{x-})] - D_1}{9(\Delta x_a^2 + \Delta x_b^2)(\Delta y_a^2 + \Delta y_b^2) - D_2}, \quad (6)$$

其中

$$D_1 = 3(\Delta x_a - \Delta x_b)(\Delta y_a - \Delta y_b)[\Delta y_b(U_{y+} - U_0) + \Delta y_a(U_0 - U_{y-})],$$

$$D_2 = (\Delta x_a - \Delta x_b)^2(\Delta y_a - \Delta y_b)^2.$$

如果  $\Delta y_a = \Delta y_b$ , 那么  $D_1 = D_2 = 0$ , 于是方程(6)成为

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{\Delta x_b(U_{x+} - U_0) + \Delta x_a(U_0 - U_{x-})}{\Delta x_a^2 + \Delta x_b^2}. \quad (7)$$

当  $\Delta x_a = \Delta x_b = \Delta x$  时,方程(6)简化为

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{U_{x+} - U_{x-}}{2\Delta x}, \quad (8)$$

此式即使在  $\Delta y_a \neq \Delta y_b$  时也是成立的,其实方程(8)就是中心差分格式.

在实际计算中,经常使用其他形似的权函数,例如  $W_i = 1/(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^2$ , 这种权函数使得距离参考点近的点权重增加. 为简单,仅考虑均匀网格情况,最终的结果为

$$\begin{cases} U_x = 2\left(\frac{U_5 - U_4}{2\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{U_3 - U_1}{2\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{U_8 - U_6}{2\Delta x}\right), \\ U_y = 2\left(\frac{U_7 - U_2}{2\Delta y} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{U_6 - U_1}{2\Delta y} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{U_8 - U_3}{2\Delta y}\right). \end{cases} \quad (9)$$

式(8)和(9)就是二维直角坐标网格下带有不同权函数时的 LSFD 方法给出的结果. 显然, 它们就是沿相应网格线上中心差分格式的线性组合, 权函数的效果只是改变了组合系数.

对于高阶 LSFD 方法, 为方便, 我们仅考虑  $W_i \equiv 1$  的情况. 一阶导数  $U_x$  和  $U_y$  与(8)式是一样的. 其它的导数离散公式为

$$U_{xy} = \frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{U_8 - U_3}{2\Delta y} - \frac{U_6 - U_1}{2\Delta y} \right) = \frac{1}{2\Delta y} \left( \frac{U_8 - U_6}{2\Delta x} - \frac{U_3 - U_1}{2\Delta x} \right) \quad (10)$$

和

$$\begin{cases} U_{xx} = \frac{3}{5} \frac{U_{x-} - 2U_{x0} + U_{x+}}{\Delta x^2} + \frac{2}{5} \frac{U_4 - 2U_0 + U_5}{\Delta x^2}, \\ U_{yy} = \frac{3}{5} \frac{U_{y-} - 2U_{y0} + U_{y+}}{\Delta y^2} + \frac{2}{5} \frac{U_2 - 2U_0 + U_7}{\Delta y^2}. \end{cases} \quad (11)$$

### 1.3 三维 27 点基架点上的形式

对于三维情况, 网格如图 2 所示, 原点在点 0 处. 为方便, 引入如下表示方法:  $U_{x+}$  为截面  $x = \Delta x$  上 9 个点的平均,  $U_{x-}$  是截面  $x = -\Delta x$  上的平均,  $U_{x0}$  是截面  $x = 0$  上的平均. 这些是面平均值, 类似可以引入其他平均值, 例如角点平均值:  $U_{x+a} = (U_3 + U_9 + U_{20} + U_{26})/4$ , 中心点平均值:  $U_{x+c} = (U_6 + U_{12} + U_{17} + U_{23})/4$ , 以及沿一条线的平均值  $U_{z+y+} = (U_{24} + U_{25} + U_{26})/3$ ,  $U_{x+y+} = (U_9 + U_{17} + U_{26})/3$ . 从图 2 中很容易理解这些表示方法的意义.

对参考点 0 做 Taylor 展开, 注意到  $p = (U_x, U_y, U_z, U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, U_{yz}, U_{zx}, U_{xy})^T$ , 可以得到和方程(5)类似的方程, 其解给出

$$U_x = \frac{U_{x+} - U_{x-}}{2\Delta x}, \quad (12)$$

$$U_{xx} = \frac{9}{21} \frac{U_{x+} - 2U_{x0} + U_{x-}}{\Delta x^2} + \frac{8}{21} \frac{U_{x+c} - 2U_{x0c} + U_{x-c}}{\Delta x^2} + \frac{4}{21} \frac{U_{13} - 2U_0 + U_{14}}{\Delta x^2} + R, \quad (13)$$

$$U_{yz} = \frac{1}{2\Delta z} \left( \frac{U_{z+y+} - U_{z+y-}}{2\Delta y} - \frac{U_{z-y+} - U_{z-y-}}{2\Delta y} \right), \quad (14)$$

其中

$$R = \frac{8}{21\Delta x^2} (2U_{x0c} - U_{x0a} - U_0). \quad (15)$$

式(12)说明 LSFD 方法是 9 条坐标线上中心差分格式的平均, 对  $U_y$  和  $U_z$  可以给出类似的表达式. 方程(13)中的  $R$  是一个附加项, 除了这一项, 其他项都是相应网格线上的中心差分近似. 对  $U_{yy}$  和  $U_{zz}$  有和式(13)类似的表达式, 对  $U_{zx}$  和  $U_{xy}$  则有和式(14)类似的表达式.

### 1.4 与传统 FD 格式的比较

在直角坐标网格上, 最常用的方法就是中心差分格式, 可以把 LSFD 方法和中心差分格式做一比较. 在图 1 所示的网格上, 对函数  $U(x, y)$  采用标准的中心差分格式来近似其一阶和二阶导数:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{S_x(1+S_x)\Delta x_a} [(U_5 - U_0) + S_x^2(U_0 - U_4)] \quad (16)$$

和

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{(U_5 - U_0) - S_x(U_0 - U_4)}{S_x(1+S_x)\Delta x_a^2/2}, \quad (17)$$

其中,  $S_x = \Delta x_b / \Delta x_a$ . 交叉导数的近似略复杂, 可以由下式给出:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \frac{1}{\Delta x_a \Delta y_a S_x S_y (1 + S_x)(1 + S_y)} [(U_8 - U_5 - U_7 + U_0) + \\ &S_x^2 (U_7 - U_0 - U_6 + U_4) + S_y^2 (U_5 - U_3 - U_0 + U_2) + \\ &S_x^2 S_y^2 (U_0 - U_2 - U_4 + U_1)], \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $S_y = \Delta y_b / \Delta y_a$ . 当  $\Delta x_a = \Delta x_b = \Delta x$  且  $\Delta y_a = \Delta y_b = \Delta y$  时, 也就是  $S_x = S_y = 1$ , 上述公式成为

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{U_5 - U_4}{2\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{U_5 - 2U_0 + U_4}{\Delta x^2}, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{U_8 - U_6 - U_3 + U_1}{4\Delta x \Delta y}, \quad (20)$$

这些公式就是均匀网格上的标准中心差分格式。

式(10)说明, 对  $U_{xy}$  的近似, LSFD 方法和中心差分格式给出的式(20)是完全相同的. 式(11)则意味着对  $U_{xx}$  或  $U_{yy}$  的离散中, LSFD 方法是中心差分格式在相应网格线上离散的线性组合. 例如二维情况下, LSFD 方法是三条网格线上中心差分格式的加权平均.

对于三维情况, 根据式(12)至(14)知, 一阶导数和交叉导数离散公式和预期一样, 是相应网格线上中心差分格式的线性组合. 然而, 方程(13)除了中心差分格式线性组合项, 还多出一项  $R$ , 该项中所有点都处于  $x = 0$  截面上, 它表示一种侧向效应(函数值的扭曲分布). 这一项在中心差分格式中是不存在的, 在数值测试中发现这一项的存在可以提高格式的精度.

## 2 直角坐标网格上 LSFD 方法的性能分析

### 2.1 导数近似的精度

考虑一个定义在矩形区间  $[x_0 - \Delta x_a, x_0 + \Delta x_b] \times [y_0 - \Delta y_a, y_0 + \Delta y_b]$  内的光滑函数  $U(x, y) = C \sin Ax \cos By$ , 采用图 1 所示的 9 点基架点. 在这 9 个点上, 函数值精确给出, 点 0 导数值采用上述方法计算. 参数的选取为  $C = 0.2, x_0 = 0.5, y_0 = 1.2, \Delta x_a = 0.12, \Delta y_a = 0.14, A = 1.2, B = 2.1$ . 在两个不同尺度的网格上 ( $\Delta_1$  和  $\Delta_2 = \Delta_1/2$ ) 分别采用 LSFD 方法和

表 1 均匀网格上一点处导数近似计算结果

	$U_x$	$U_y$	$U_{xx}$	$U_{yy}$	$U_{xy}$
精确值	-0.161 030	-0.138 100	0.132 200	-0.242 232	0.404 862
$R_C(\Delta_1)$	-0.160 474	-0.136 119	0.131 972	-0.237 933	0.401 955
$R_C(\Delta_2)$	-0.160 891	-0.137 603	0.132 144	-0.241 152	0.404 136
$E_C(\Delta_1)$	0.000 555 95	0.001 980 90	0.000 227 84	0.004 298 88	0.002 907 37
$E_C(\Delta_2)$	0.000 139 04	0.000 496 72	0.000 055 54	0.001 079 34	0.000 725 81
阶数	1.999 42	1.995 67	2.036 50	1.993 82	2.002 06
$R_L(\Delta_1)$	-0.155 884	-0.135 180	0.129 707	-0.237 933	0.400 290
$R_L(\Delta_2)$	-0.159 734	-0.137 365	0.131 573	-0.241 152	0.403 716
$E_L(\Delta_1)$	0.005 146 32	0.002 920 11	0.002 492 90	0.004 298 88	0.004 571 53
$E_L(\Delta_2)$	0.001 295 86	0.000 734 52	0.000 626 74	0.001 079 57	0.001 146 02
阶数	1.989 63	1.991 14	1.991 88	1.993 50	1.996 05

中心差分格式计算一阶导数和二阶导数, 并和精确值比较, 结果如表 1 所示. 两个网格上的结

果可以给出格式的精度阶数. 下标 C 表示中心差分格式, 下标 L 表示 LSFD 方法,  $R_C(\Delta_1)$  表示网格  $\Delta_1 = (\Delta x_a, \Delta y_b)$  上的计算结果,  $E_C(\Delta_1)$  表示网格  $\Delta_1$  上计算结果的绝对误差. 于是, 解的精度阶数就是  $\log_2(E_C(\Delta_1)/(E_C(\Delta_2)))$ . 从表 1 可以看出, LSFD 方法在精度阶数上几乎和中心差分格式完全一致.

表 2 非均匀网格上一点处导数近似计算结果

	$U_x$	$U_y$	$U_{xx}$	$U_{yy}$	$U_{xy}$
精确值	-0.161 030	-0.138 100	0.132 200	-0.242 232	0.404 862
$R_C(\Delta_1)$	-0.160 749	-0.137 258	0.127 397	-0.240 334	0.385 686
$R_C(\Delta_2)$	-0.160 960	-0.137 895	0.129 844	-0.241 768	0.395 801
$E_C(\Delta_1)$	0.000 281 45	0.000 842 11	0.004 802 53	0.001 897 20	0.019 175 77
$E_C(\Delta_2)$	0.000 070 05	0.000 204 97	0.002 355 56	0.000 463 55	0.009 061 28
阶数	2.006 43	2.038 63	1.027 72	2.033 09	1.081 50
$R_L(\Delta_1)$	-0.159 041	-0.137 149	0.128 557	-0.279 884	0.378 396
$R_L(\Delta_2)$	-0.160 522	-0.137 870	0.130 719	-0.261 853	0.392 235
$E_L(\Delta_1)$	0.001 988 72	0.000 951 05	0.003 643 18	0.037 652 43	0.026 465 65
$E_L(\Delta_2)$	0.000 508 28	0.000 230 09	0.001 481 03	0.019 621 25	0.012 627 30
阶数	1.968 15	2.047 33	1.298 60	0.940 33	1.067 57

表 3 三维均匀网格上中心差分和 LSFD 方法的结果

	$U_x$	$U_y$	$U_z$	$U_{xx}$	$U_{yy}$	$U_{zz}$	$U_{yz}$	$U_{zx}$	$U_{xy}$
精确值	-0.056 675	-0.121 262	-0.044 925	0.088 266	0.088 266	0.088 266	-0.061 719	-0.028 846	-0.077 862
$R_C(\Delta_1)$	-0.056 581	-0.120 456	-0.044 798	0.088 193	0.087 973	0.088 142	-0.061 135	-0.028 717	-0.077 215
$R_C(\Delta_2)$	-0.056 652	-0.121 060	-0.044 893	0.088 248	0.088 193	0.088 235	-0.061 572	-0.028 814	-0.077 700
$E_C(\Delta_1)$	0.000 094	0.000 807	0.000 126	0.000 074	0.000 294	0.000 124	0.000 583	0.000 129	0.000 647
$E_C(\Delta_2)$	0.000 024	0.000 202	0.000 032	0.000 018	0.000 074	0.000 031	0.000 146	0.000 032	0.000 162
阶数	1.999 459	1.997 836	1.999 086	1.999 639	1.998 557	1.999 390	1.996 065	1.998 092	1.996 718
$R_L(\Delta_1)$	-0.055 515	-0.119 379	-0.044 056	0.087 570	0.087 446	0.087 296	-0.060 932	-0.028 335	-0.076 780
$R_L(\Delta_2)$	-0.056 383	-0.120 789	-0.044 706	0.088 091	0.088 061	0.088 023	-0.061 521	-0.028 718	-0.077 590
$E_L(\Delta_1)$	0.001 160	0.001 883	0.000 869	0.000 697	0.000 820	0.000 971	0.000 787	0.000 511	0.001 081
$E_L(\Delta_2)$	0.000 292	0.000 473	0.000 218	0.000 175	0.000 206	0.000 244	0.000 197	0.000 128	0.000 271
阶数	1.991 615	1.992 902	1.992 172	1.993 107	1.995 298	1.994 040	1.994 188	1.993 192	1.993 792

表 1 的计算采用的是均匀网格, 即  $\Delta x_a = \Delta x_b, \Delta y_a = \Delta y_b$ , 因此一阶导数和二阶导数都具有二阶精度.

表 2 给出了非均匀网格上的计算结果, 取  $C_x = \Delta x_b/\Delta x_a = 0.5, C_y = \Delta y_b/\Delta y_a = 0.4$ . 一阶导数仍然具有二阶精度, 但二阶导数的计算仅具有一阶精度, 和 LSFD 方法的预期是一致的.

在前面已经知道, 二维直角坐标网格上的 LSFD 方法对一阶导数和二阶导数的近似公式就是几条不同网格线上中心差分格式的线性组合. 对于三维情况, 由式(13)知, 除了线性组合项, 还有一个额外的  $R$  项. 在图 2 所示的网格上, 可以把 LSFD 方法和中心差分格式做一对比. 表 3 给出了计算结果的对比, 所使用的函数是  $U(x, y, z) = C \sin x \cos y \sin z$ , 其中  $C = 0.2$ . 参考点  $0$  是  $(x_0, y_0, z_0) = (1.0, 2.2, 1.1)$ , 网格尺度  $\Delta_1 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0.1, 0.2,$

0.13). 表 3 中还给出了网格  $\Delta_2 = \Delta_1/2$  上的计算结果以及精度阶数. 从表 3 看出, LSFD 的精度阶数和中心差分格式几乎完全一样, 在均匀网格上, 一阶导数和二阶导数的近似都具有二阶精度.

表 4 三维非均匀网格上中心差分和 LSFD 方法的结果

	$U_x$	$U_y$	$U_z$	$U_{xx}$	$U_{yy}$	$U_{zz}$	$U_{yz}$	$U_{zx}$	$U_{xy}$
精确值	-0.056 675	-0.121 262	-0.044 925	0.088 266	0.088 266	0.088 266	-0.061 719	-0.028 846	-0.077 862
$R_c(\Delta_1)$	-0.056 599	-0.120 771	-0.044 860	0.087 827	0.084 818	0.087 201	-0.061 379	-0.028 765	-0.077 442
$R_c(\Delta_2)$	-0.056 656	-0.121 140	-0.044 909	0.088 062	0.086 595	0.087 756	-0.061 634	-0.028 826	-0.077 757
$E_c(\Delta_1)$	0.000 076	0.000 491	0.000 065	0.000 439	0.003 448	0.001 066	0.000 339	0.000 081	0.000 420
$E_c(\Delta_2)$	0.000 019	0.000 122	0.000 016	0.000 204	0.001 672	0.000 510	0.000 084	0.000 020	0.000 104
阶数	2.005 129	2.008 738	2.021 804	1.104 325	1.044 607	1.063 388	2.011 012	2.013 011	2.006 745
$R_l(\Delta_1)$	-0.056 008	-0.120 134	-0.044 413	0.086 527	0.084 299	0.086 355	-0.067 494	-0.030 001	-0.080 225
$R_l(\Delta_2)$	-0.056 506	-0.120 980	-0.044 797	0.087 531	0.086 408	0.087 443	-0.064 753	-0.029 533	-0.079 249
$E_l(\Delta_1)$	0.000 667	0.001 128	0.000 512	0.001 739	0.003 967	0.001 911	0.005 775	0.001 155	0.002 363
$E_l(\Delta_2)$	0.000 169	0.000 282	0.000 128	0.000 735	0.001 858	0.000 823	0.003 035	0.000 688	0.001 388
阶数	1.983 154	2.000 872	1.999 085	1.242 439	1.094 038	1.215 102	0.928 302	0.748 338	0.768 201

表 4 给出了非均匀网格上的结果, 和二维情况类似, 考虑 3 个参数,  $S_x = \Delta x_b / (\Delta x_a) = 0.8, S_y = \Delta y_b / (\Delta y_a) = 0.6, S_z = \Delta z_b / (\Delta z_a) = 0.5$  (参考图 1). 在非均匀网格上, LSFD 方法对二阶导数的近似通常只有一阶精度, 但交叉导数项的中心差分近似在二维 (见表 2) 和三维情况下都具有二阶精度.

### 2.2 网格尺度比对 Poisson 方程收敛效果的影响

在 CFD 中 Poisson 方程很重要, 不可压缩流中的压力方程、流函数方程以及速度势方程都属于 Poisson 方程. 解 Poisson 方程时, 最重要的就是对 Laplace 算子的离散. 该算子也出现在 Navier-Stokes 方程的粘性项中. 负 Laplace 算子  $-\nabla^2$  是一个对称正定的微分算子. 在离散形式下, 系数矩阵所有的非对角元应该是负的.

采用中心差分格式(19)可以直接对 Laplace 算子做离散. 对于图 1 所示的二维基架点, 对 Poisson 方程  $\nabla^2 U = f(x, y)$ , 将给出一个对角占优的线性代数方程组, 并且对任意的  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 每个非对角元都是正的. 对于 LSFD 方法(11), 我们有

$$A(\nabla^2 U)_0 = (U_1 + U_3 + U_6 + U_8) + B(U_2 + U_7) + C(U_4 + U_5) - 6U_0, \quad (21)$$

其中

$$A = \frac{5\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, B = \frac{3\Delta x^2 - 2\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, C = \frac{3\Delta y^2 - 2\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

如果我们要求  $B > 0$  和  $C > 0$ , 即

$$\frac{2}{3} < \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} < \frac{3}{2} \text{ 或者 } 0.8165 < \frac{\Delta x}{\Delta y} < 1.2247, \quad (22)$$

此时, 方程(21)是对角占优的和正定的. 式(22)是对网格尺度非常苛刻的条件, 只有对接近均匀的网格, 方程(21)的系数才是正的.

在区域  $[0, 1] \times [0, 1]$  上求解如下的 Poisson 方程:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (23)$$

采用 Dirichlet 边界条件,精确解是  $U(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ 。采用 5 套不同的网格计算,网格比  $\Delta x/\Delta y$  不同,以测试网格比对收敛效果的影响,这些网格的节点数目都非常接近。

计算程序采用的是双精度变量,代数方程组采用 Jacobi 点迭代法求解,收敛误差为  $\epsilon = 10^{-10}$ 。对每个网格,为了得到精度阶数,还使用了一个更密的网格( $\Delta_2 = \Delta_1/2$ )。表 5 列出了网格尺度、网格比、迭代步数以及如下定义的平均绝对误差:

$$E(\Delta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |U_i^{(n)} - U_i^{(e)}|,$$

其中,  $N$  是节点总数,  $U_i^{(n)}$  是点  $i$  处的数值结果,  $U_i^{(e)}$  是精确解。上述定义的误差可以对精度阶数给出非常稳定的估计值,表 5 的最后 1 列给出了精度阶数。

**表 5** 采用中心差分格式(上)和 LSFD 方法(下)离散,用 Jacobi 迭代法在 5 套网格上的收敛情况对比

	网格尺度( $\Delta_1$ )	$\Delta x/\Delta y$	迭代次数( $\Delta_1$ )	$E(\Delta_1)$	迭代次数( $\Delta_2$ )	$E(\Delta_2)$	精度阶数
网格 1	50 × 50	1.000 0	8 506	0.133 3 E-03	31 227	0.332 5 E-04	2.002 8
网格 2	48 × 52	1.083 3	8 519	0.133 9 E-03	31 274	0.334 1 E-04	2.002 8
网格 3	47 × 53	1.127 7	8 534	0.134 7 E-03	31 332	0.336 1 E-04	2.002 8
网格 4	44 × 57	1.295 5	8 802	0.137 3 E-03	32 307	0.342 6 E-04	2.002 8
网格 5	41 × 61	1.487 8	9 148	0.143 8 E-03	33 569	0.358 9 E-04	2.0 028
网格 1	50 × 50	1.000 0	5 260	0.453 3 E-03	19 359	0.113 3 E-03	2.000 5
网格 2	48 × 52	1.083 3	5 268	0.455 5 E-03	19 388	0.113 8 E-03	2.000 5
网格 3	47 × 53	1.127 7	5 278	0.458 2 E-03	19 424	0.114 5 E-03	2.000 5
网格 4	44 × 57	1.295 5	—	—	—	—	—
网格 5	41 × 61	1.487 8	—	—	—	—	—

**表 6** 采用中心差分格式(上)和 LSFD 方法(下)离散,用 Gauss-Sidel 迭代法在 5 套网格上的收敛情况对比

	网格尺度( $\Delta_1$ )	$\Delta x/\Delta y$	迭代次数( $\Delta_1$ )	$E(\Delta_1)$	迭代次数( $\Delta_2$ )	$E(\Delta_2)$	精度阶数
网格 1	50 × 50	1.000 0	4 429	0.133 3 E-03	16 317	0.332 9 E-04	2.001 2
网格 2	48 × 52	1.083 3	4 436	0.133 9 E-03	16 341	0.334 5 E-04	2.001 2
网格 3	47 × 53	1.127 7	4 445	0.134 7 E-03	16 372	0.336 5 E-04	2.001 1
网格 4	44 × 57	1.295 5	4 584	0.137 3 E-03	16 882	0.343 0 E-04	2.001 2
网格 5	41 × 61	1.487 8	4 765	0.143 9 E-03	17 544	0.359 4 E-04	2.001 1
网格 1	50 × 50	1.000 0	2 737	0.453 3 E-03	10 102	0.113 3 E-03	2.000 2
网格 2	48 × 52	1.083 3	2 741	0.455 5 E-03	10 117	0.113 9 E-03	2.000 2
网格 3	47 × 53	1.127 7	2 746	0.458 2 E-03	10 136	0.114 5 E-03	2.000 2
网格 4	44 × 57	1.295 5	2 832	0.467 1 E-03	10 453	0.116 8 E-03	2.000 2
网格 5	41 × 61	1.487 8	2 943	0.489 4 E-03	10 863	0.122 3 E-03	2.000 2

可以看出,为了达到同样的余量容限,高网格比的网格上的计算需要更多的迭代步数,LSFD 方法比中心差分格式需要的迭代步数少。对于网格 4 和网格 5,LSFD 方法是发散的,原因是限制条件(22)不满足。如果采用其他迭代方法,限制条件会不同,在高网格尺度比下也是有可能收敛的。例如,采用 Gauss-Sidel 迭代,在网格 4 和网格 5 上都可以得到收敛的结果。表

6 给出了采用 Gauss-Sidel 迭代时的结果。显然,随着网格比  $\Delta x/\Delta y$  增加,误差是增加的,此误差是因为离散算子和连续算子的差异导致的。除了发散的情况,各网格上的收敛过程都类似,图 3 所给出的网格 1 至 3 上计算的收敛曲线几乎完全重合,这 3 套网格的网格比都满足式 (22)。对于网格 4 和 5,收敛速度略微降低(见图 3 的局部放大图)。图 4 给出的是 LSFD 方法采用 Jacobi 迭代时的收敛曲线,显然,采用网格 4 和 5 时,计算是发散的,并且网格比  $\Delta x/\Delta y$  越大,LSFD 计算的发散速度越快。

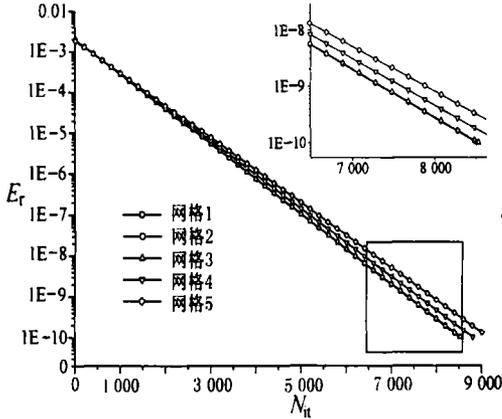


图 3 采用中心差分和 Jacobi 迭代法时的收敛曲线,方框部分的图被放大显示

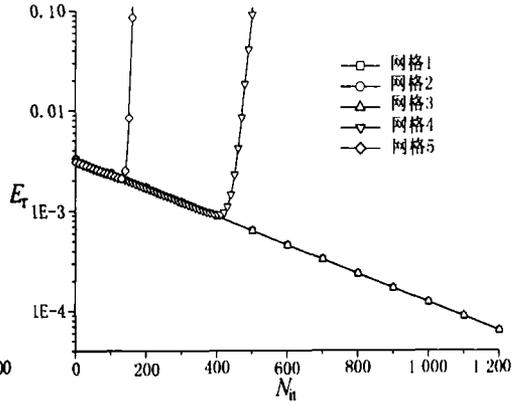


图 4 采用 LSFD 方法和 Jacobi 迭代法时的收敛曲线

对于三维 Laplace 算子,在图 2 所示的基架点上,中心差分格式(19)再次给出一个对角占优的正定系数矩阵。如果采用 LSFD 方法离散三维 Poisson 方程,则有

$$(\nabla^2 U)_0 = A_x(U_{x+} + U_{x-}) + A_y(U_{y+} + U_{y-}) + A_z(U_{z+} + U_{z-}) - A_0 U_0, \quad (24)$$

其中

$$A_x = \frac{15}{7\Delta x^2} - \frac{6}{7\Delta y^2} - \frac{6}{7\Delta z^2}, \quad A_y = \frac{15}{7\Delta y^2} - \frac{6}{7\Delta z^2} - \frac{6}{7\Delta x^2},$$

$$A_z = \frac{15}{7\Delta z^2} - \frac{6}{7\Delta x^2} - \frac{6}{7\Delta y^2}, \quad A_0 = \frac{6}{7} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right).$$

如果我们要求所有的系数都是正的,引入  $C_x = \Delta x/\Delta z, C_y = \Delta y/\Delta z$ , 可得到如下不等式:

$$\begin{cases} \frac{8}{C_x^2} < \frac{6}{C_y^2} + 6 < \frac{15}{C_x^2}, \\ \frac{8}{C_y^2} < 6 + \frac{6}{C_x^2} < \frac{15}{C_y^2}, \\ 8 < \frac{6}{C_x^2} + \frac{6}{C_y^2} < 15. \end{cases} \quad (25)$$

总共有 6 个不等式,分别标记为 L1, R1, L2, R2, L3 和 R3。每个不等式在  $C_x-C_y$  参数空间对应一条曲线。图 5 给出了所有的 6 条线,有效区是曲边三角形 ABC。不失一般性,可以假设  $\Delta x \geq \Delta y \geq \Delta z$ , 即  $C_x \geq C_y \geq 1$ , 于是有效区域成为曲边三角形 ASD, 也可以描述为

- 1) 当  $\Delta x/\Delta z \leq \sqrt{5}/2 \approx 1.1180$  时,  $\Delta y$  可以是  $\Delta z$  和  $\Delta x$  之间的任意值;
- 2) 当  $\sqrt{5}/2 < \Delta x/\Delta z \leq \sqrt{3}/2 \approx 1.2247$  时,  $\Delta y$  不能太小,不等式 R1

$$C_y^2 > \frac{2C_x^2}{5 - 2C_x^2}$$

必须满足,这是对网格尺度一个比较严格的限制。

我们还是利用 Poisson 方程做测试,测试三维情况下网格比的影响.精确解为  $U(x, y, z) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$ , 计算区域为单位立方体.采用 5 套不同的网格,表 7 中列出了网格尺度和网格尺度比 ( $C_x, C_y$ ),在图 6 中也标记了这些点(仅显示了前 4 个点,第 5 个点已经出了显示区).这 5 套网格中的网格节点数目几乎是相同的(误差小于 1%).表 7 所给出的特性和二维情况是一致的,当网格比增大时,需要更多的迭代步数,且中心差分格式的误差增加.LSFD 方法所需要迭代步数少,精度阶数和网格尺度比没有明显的依赖关系.

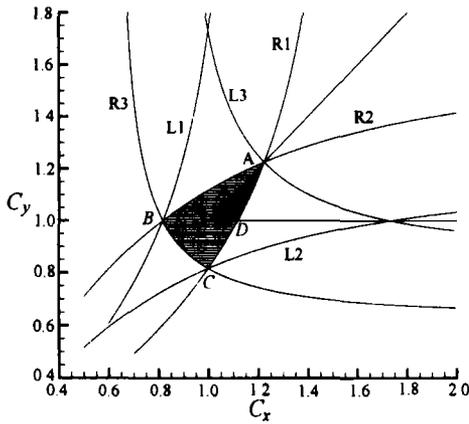


图 5  $C_x-C_y$  参数平面(特征点  $S(1,1), A(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}), B(\sqrt{2/3}, 1), C(1, \sqrt{2/3}), D(\sqrt{5/2}, 1)$ )

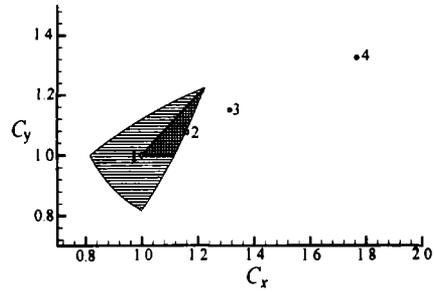


图 6 求解三维 Poisson 方程所用网格的网格尺度比

表 7 采用中心差分格式(上)和 LSFD 方法(下)离散,用 Jacobi 迭代法在 5 套网格上的收敛情况对比

	网格尺度( $\Delta_1$ )	$C_x$	$C_y$	迭代次数( $\Delta_1$ )	$E(\Delta_1)$	迭代次数( $\Delta_2$ )	$E(\Delta_2)$	精度阶数
网格 1	40 × 40 × 40	1.000 0	1.000 0	7 078	0.132 5 E-03	26 534	0.331 5 E-04	1.998 7
网格 2	37 × 40 × 43	1.162 2	1.075 0	7 103	0.134 0 E-03	26 628	0.335 2 E-04	1.998 7
网格 3	35 × 40 × 46	1.314 3	1.150 0	7 277	0.135 2 E-03	27 275	0.338 3 E-04	1.998 6
网格 4	30 × 40 × 53	1.766 7	1.325 0	7 794	0.147 8 E-03	29 204	0.369 8 E-04	1.998 5
网格 5	25 × 40 × 64	2.560 0	1.600 0	9 208	0.174 3 E-03	34 475	0.436 4 E-04	1.998 1
网格 1	40 × 40 × 40	1.000 0	1.000 0	3 153	0.738 8 E-03	11 844	0.184 7 E-03	1.999 8
网格 2	37 × 40 × 43	1.162 2	1.075 0	3 164	0.743 7 E-03	11 887	0.186 0 E-03	1.999 8
网格 3	35 × 40 × 46	1.314 3	1.150 0	3 242	0.742 4 E-03	12 176	0.185 6 E-03	1.999 7
网格 4	30 × 40 × 53	1.766 7	1.325 0	—	—	—	—	—
网格 5	25 × 40 × 64	2.560 0	1.600 0	—	—	—	—	—

### 2.3 网格比对 Poisson 方程数值稳定性的影响

考虑线性方程组  $Ax = b$ ,其中,  $A$  是系数矩阵,  $x$  和  $b$  是  $N$  维向量.采用迭代法解这个方程组时,迭代过程可以写为  $x^{n+1} = Mx^n + f$ .迭代法的收敛性质是由迭代矩阵  $M$  的谱半径  $\rho(M)$  决定的.通常  $\rho(M)$  和网格尺度和网格比都有关.这里,矩阵  $A$  是用 LSFD 方法离散二维 Poisson 方程得到离散方程的系数矩阵.图 7 给出的两个不同网格比下,采用传统中心差分格式离散得到系数矩阵的谱半径分布.显然,对于中心差分格式,网格比  $\Delta x/\Delta y$  对谱半径分布基本没有影响.

对于 LSFD 方法,如图 8 所示,对于  $\Delta x/\Delta y \leq \sqrt{3/2} \approx 1.224 7$  的情况,谱半径几乎和网格

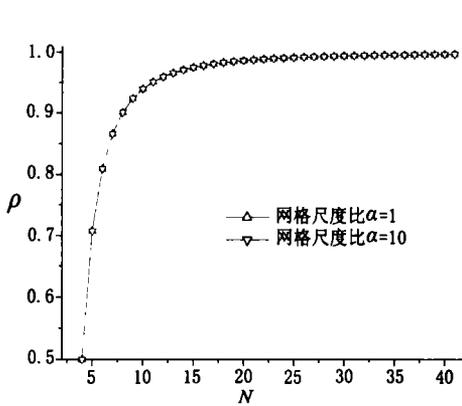


图7 在  $N \times N$  的均匀网格上采用中心差分格式离散 Poisson 方程,采用 Jacobi 迭代法,不同网格尺度比下,迭代矩阵的谱半径

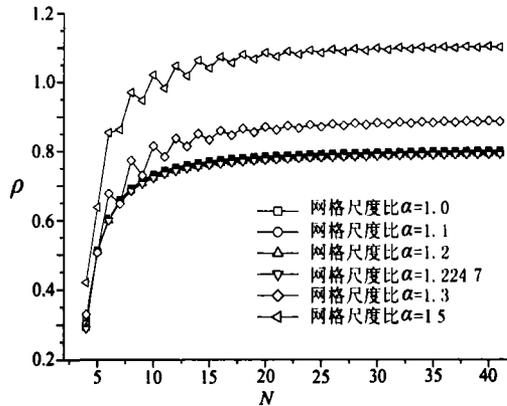


图8 在  $N \times N$  的均匀网格上采用 LSFD 方法离散 Poisson 方程,采用 Jacobi 迭代法,不同网格尺度比下,迭代矩阵的谱半径

比无关;然而,当  $\Delta x/\Delta y > \sqrt{3}/2$  时,例如 1.3 和 1.5,谱半径并不是随网格规模  $N$  单调增加的,而是出现一下锯齿状增加,说明  $N$  是奇数和偶数的不同效果。在网格比 1.3 处,谱半径仍然比 1 小,但当网格比是 1.5 时,  $N$  是偶数情况下,如果  $N \geq 10$ ,或者在  $N$  是奇数时,  $N \geq 13$ ,谱半径会大于 1。这意味着当网格比是 1.5 时,而  $N$  相对稍大时,LSFD 计算会发散。上述结果说明,网格比对 LSFD 计算的数值稳定性有显著的影响。

### 3 结 论

本文的计算和分析可以总结出如下结论:

- 1) 在直角坐标网格上,可以显式给出 LSFD 方法对导数的近似公式,它是相应网格线上传统中心差分格式的加权平均,权函数可以使得中心线上的权重加大;
- 2) 尽管格式的精度阶数和网格比无关,但误差会随网格比的增加而增加,并且达到同样收敛容限所需要的迭代步数也增加;
- 3) 在对 Laplace 算子做离散时,中心差分格式总是可以保证非对角元是正的,在 LSFD 方法中,为了保证这种正系数性质,网格比必须遵守一个苛刻的约束条件;
- 4) 对大网格比情况,由于迭代矩阵的谱半径大,LSFD 方法难以收敛。

无网格方法通常难处理边界层问题,或者是高 Reynolds 数流动问题。在处理这类问题时,贴体网格能够发挥比较好的性能。本文的结论对这种现象给出了初步的解释,其原因就是粘性项离散时正性的缺失造成的。无网格方法也许应在这一方面有所发展和提高。

### [参 考 文 献]

- [1] Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods[J]. *J Comp Phys*, 1981, 40(2): 263-293.
- [2] Chung T J. *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics* [M]. New York: McGraw-Hill Publ, 1978.
- [3] Baker A J, Kim J W. A Taylor weak-statement algorithm for hyperbolic conservation laws[J]. *Internat J Numer Methods Fluids*, 1987, 7(5): 489-520.
- [4] Patankar S V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* [M]. Washington D C: Hemisphere, 1980.
- [5] Wang Z J, Srinivasan K. An adaptive Cartesian grid generation method for 'dirty' geometry[J]. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2002, 39(8): 703-717.

- [6] Monaghan J J. An introduction to SPH[J]. *Comput Physics Communications*, 1988, 48(1): 89-96.
- [7] Aluru N R, Li G. Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2001, 50(10): 2373-2410.
- [8] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. *Internat J Numer Methods Fluids*, 1995, 30(8/9): 1081-1106.
- [9] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the FEM: diffuse approximation and diffuse elements [J]. *Computational Mechanics*, 1992, 10(5): 307-318.
- [10] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1994, 37(2): 229-256.
- [11] Duarte C A, Oden J T. A hp adaptive method using clouds[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139(1/4): 237-262.
- [12] Kansa E J. Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — I surface approximations and partial derivative estimates[J]. *Computers Math Appl*, 1990, 19(8/9): 127-145.
- [13] Kansa E J. Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — II solutions to parabolic, hyperbolic, and elliptic partial differential equations [J]. *Computers Math Appl*, 1990, 19(8/9): 147-161.
- [14] Shu C, Ding H, Yeo K S. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, 192(7/8): 941-954.
- [15] Li J. A radial basis meshless method for solving inverse boundary value problems[J]. *Comm Num Meth Eng*, 2004, 20(1): 51-61.
- [16] Ding H, Shu C, Yeo K S, et al. Simulation of incompressible viscous flows past a circular cylinder by hybrid FD scheme and meshless least square-based finite difference method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2004, 193(9/11): 727-744.
- [17] Ding H, Shu C, Yeo K S, et al. Development of least-square-based two-dimensional finite-difference schemes and their application to simulate natural convection in a cavity[J]. *Computers & Fluids*, 2004, 33(1): 137-154.
- [18] Balakrishnan N, Deshpande S M. Reconstruction on unstructured meshes with upwind solvers[A]. In: Hui W H, Kwok Y K, Chasnov J R, Eds. *Proc of the First Asian CFD Conference* [C]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 1995, 359-364.
- [19] Luo D, Joseph D B, Löhner R. A comparison of reconstruction schemes for compressible flows on unstructured grids[A]. In: Hui W H, Kwok Y K, Chasnov J R, Eds. *Proc of the First Asian CFD Conference* [C]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 1995, 365-370.
- [20] 蔡庆东. 各种网络上统一的数值离散方法[J]. *力学学报*, 2004, 36(4): 393-400.
- [21] Schönauer W, Adolph T. How we solve PDEs[J]. *J Comp Appl Math*, 2001, 131(1/2): 473-492.
- [22] Sridar D, Balakrishnan N. An upwind finite difference scheme for meshless solvers[J]. *J Comp Phys*, 2003, 189(1): 1-29.
- [23] Ding H, Shu C, Yeo K S, et al. Numerical simulation of flows around two circular cylinders by mesh-free least square-based finite difference methods[J]. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2007, 53(2): 305-332.
- [24] Wu W X, Shu C, Wang C M. Computation of modal stress resultants for completely free vibrating plates by LSFD method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 297(3/5): 704-726.
- [25] Wang C M, Wu W X, Shu C, et al. LSFD method for accurate vibration modes and modal stress-re-

sultants of freely vibrating plates that model VLFS[J]. *Computers and Structures*, 2006, **84**(31/32): 2329-2339.

- [26] Wu W X, Shu C, Wang C M. Mesh-free least-squares-based finite difference method for large amplitude free vibration analysis of arbitrarily shaped thin plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **317**(3/5): 955-974.

## Explicit Formulations and Performance Study of LSFD Method on Cartesian Mesh

CAI Qing-dong<sup>1,2</sup>

(1. *LTCS and CAPT; Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Peking University, Beijing 100871, P. R. China;*

2. *College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, P. R. China*)

**Abstract:** The performance of the LSFD (least square-based finite difference) method is compared with the conventional FD (finite difference) schemes. For the approximation of the first and second order derivatives by the conventional central difference schemes, 9-point stencils for the 2D case and 27-point stencils for the 3D case are usually used. When the same stencils are used, the explicit LSFD formulations for approximation of the first and second order derivatives were present. The LSFD formulations are actually the combination of conventional central difference schemes along relevant mesh lines. It is found that LSFD formulations need much less iteration steps than the conventional FD schemes to get the converged solution, and the ratio of mesh spacing in the  $x$  and  $y$  directions is an important parameter in the LSFD application, which has a great effect on the stability of LSFD computation.

**Key words:** LSFD method; meshfree method; Cartesian Mesh; aspect ratio