应用数学和力学,第 30 卷 第 2 期
2009 年 2 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol.30, No.2, Feb.15, 2009

文章编号:1000-0887(2009)02-0142-07

Banach 空间中 Lipschitz 伪压缩半群公共不点的强收敛定理*

张石生

(宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644007)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 在 Banach 空间的框架下,建立了几个关于 Lipschitz 伪压缩半群的隐迭代程序的弱收敛定理. 所得结果改进和推广了 Zhou, Chen 等, Xu 等及 Osilike 等人的最新结果.

关 键 词: Lipschitz 伪压缩半群; 半闭原理; 公共不动点; Opial 条件; 强伪压缩映象; 隐迭代程序

中图分类号: O177.91 **文献标识码:** A

1 引言及预备知识

本文处处假定 E 是一实 Banach 空间, E^* 为 E 的对偶空间, C 是 E 的一非空闭凸子集, $\mathbf{R}^+$ 是非负实数集,而 $J:E\to 2^{E^*}$ 为由下式定义的正规对偶映象

$$J(x)=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|,\ \|x\|=\|f\|\},\qquad x\in E.$$

设 $T:C\to C$ 是一映象. 以后我们用 $F(T)$ 表 T 的不动点的集合. 我们还用"$\to$"表强收敛,"$\rightharpoonup$"表弱收敛. 对一给定的序列 $\{x_n\}\subset C$,我们用 $W_\omega(x_n)$ 表弱 ω - 极限集,即

$$W_\omega(x_n)=\left\{z\in C:\text{存在子序列}\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}\text{ 使得 }x_{n_i}\rightharpoonup z\right\}.$$

定义 1.1

1) 由 C 到 C 的单参数映象族 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geqslant 0\}$ 称为 C **上的伪压缩半群**,如果下列条件满足:

(i) $T(0)x=x$ 对每一 $x\in C$;

(ii) $T(t+s)x=T(t)T(s)x$ 对任意的 $t,s\in\mathbf{R}^+$, $x\in C$;

(iii) 对每一 $x\in C$,映象 $t\mapsto T(t)x$ 是连续的;

(iv) 对任意的 $x,y\in C$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 使得对每一 $t>0$

$$\langle T(t)x-T(t)y,j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2.\tag{1}$$

如所周知[1],条件(iv)等价于:对所有的 $s>0$ 及所有的 $x,y\in C$

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y+s[(I-T(t))x-(I-T(t))y]\|.\tag{2}$$

2) 一伪压缩半群 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geqslant 0\}:C\to C$ 称为**强伪压缩半群**,如果条件(i)至(iii)及下面的条件(iv)'满足:

* **收稿日期:** 2008-03-11; **修订日期:** 2008-12-25

作者简介: 张石生(1934—),男,云南曲靖人,教授(E-mail: changss@yahoo.cn).

(ⅳ)′ 存在一有界函数 $k:[0,\infty)\to(0,1)$，$\sup_{t\geq 0}k(t)<1$，对任意给定的 $x,y\in C$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 使得对每一 $t>0$，

$$\langle T(t)x-T(t)y,j(x-y)\rangle\leqslant k(t)\|x-y\|^2. \tag{3}$$

3) 一伪压缩半群 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geqslant 0\}:C\to C$ 称为**严格伪压缩半群**，如果其满足条件(ⅰ)至(ⅲ)及下面的条件(ⅳ)″:

(ⅳ)″ 存在一有界函数 $\lambda:[0,\infty)\to(0,1/2)$ 使得对任意给定的 $x,y\in C$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$，使得

$$\langle T(t)x-T(t)y,j(x-y)\rangle\leqslant \|x-y\|^2-\lambda(t)\|(I-T(t))x-(I-T(t))y\|^2, \tag{4}$$

对每一 $t>0$.

4) 一伪压缩半群 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geqslant 0\}:C\to C$ 称为 **Lipschitz 的**[2-3]，如果其满足条件(ⅰ)至(ⅳ)及下面的条件(ⅴ):

(ⅴ) 存在一有界的可测函数 $L:(0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得对任意的 $x,y\in C$ 及对每一 $t>0$.

$$\|T(t)x-T(t)y\|\leqslant L(t)\|x-y\|. \tag{5}$$

定义 1.2

1) 一映象 $T:C\to C$ 称为**伪压缩的**[1]，如果对任意的 $x,y\in C$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2;$$

2) $T:C\to C$ 称为**强伪压缩的**，如果存在 $k\in(0,1)$ 使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant k\|x-y\|^2,$$

对每一 $x,y\in C$ 及对某一 $j(x-y)\in J(x-y)$;

3) $T:C\to C$ 称为**按 Browder-Petryshyn 意义下为严格伪压缩的**[4,10]，如果存在 $\lambda>0$ 使得对任意的 $x,y\in C$ 及对某一 $j(x-y)\in J(x-y)$

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2-\lambda\|(I-T)x-(I-T)y\|^2.$$

引理 1.1[4-5]　设 E 是一实 Banach 空间，C 是 E 之一非空闭凸子集，而 $T:C\to C$ 是一连续的强伪压缩映象．则 T 在 C 中有唯一的不动点．

设 E 是一实 Banach 空间，C 是 E 之一非空闭凸子集，而 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geqslant 0\}:C\to C$ 是一 Lipschitz 伪压缩半群．对每一 $u\in C$，$t\in(0,\infty)$ 及每一 $s\in(0,1)$，我们定义一映象 $U_s:C\to C$ 如下:

$$U_s x=su+(1-s)T(t)x,\qquad x\in C.$$

易知，U_s 是一连续的强伪压缩映象．由引理 1，存在 U_s 的唯一的不动点 $x_s\in C$ 使得

$$x_s=su+(1-s)T(t)x_s. \tag{$**$}$$

设 $\mathscr{T}:=\{T(t):T\geqslant 0\}:C\to C$ 是一 Lipschitz 的伪压缩半群，设 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中之一实序列，而 $\{t_n\}$ 是 $(0,\infty)$ 中之一实序列．借助式($**$)，我们可以定义一隐迭代序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$\begin{cases}x_0\in C,\\ x_n=\alpha_n x_{n-1}+(1-\alpha_n)T(t_n)x_n, & n\geqslant 1.\end{cases} \tag{6}$$

应该指出，下面的隐迭代程序:

$$\begin{cases}x_0\in K,\\ x_n=\alpha_n x_{n-1}+(1-\alpha_n)T_n x_n, & n\geqslant 1.\end{cases} \tag{7}$$

在Hilbert空间的框架下,对有限族的非扩张映象$\{T_i\}_{i=1}^N$,首先由Xu,Ori在文献[6]中引入,其中$T_n = T_{n(\mathrm{mod}N)}$. 2004年,Osilike[7]把上面的迭代序列(7)由非扩张映象类,推广到更一般的严格伪压缩映象类. 2006年,Chen等[8]把Osilike[7]的结果推广到更为一般的Banach空间.

最近,Zhou在文献[9]中进一步把Chen等[8]的结果由严格伪压缩映象推广到Lipschitz伪压缩映象,同时把q-一致光滑Banach空间推广到具Fréchet可微范数的一致凸的Banach空间. 即他证明了下面的结果:

定理1.1[9]　设E是一实的具Fréchet可微范数的一致凸的Banach空间. 设K是E之一闭凸子集,$\{T_i\}_{i=1}^N$是K上之一Lipschitz的伪压缩的自映象的有限族,使得$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$. 设$\{x_n\}$是由式(7)定义的系列. 如果选$\{\alpha_n\}$使得$\alpha_n \in (0,1)$且$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$,则$\{x_n\}$弱收敛于映象族$\{T_i\}_{i=1}^N$之一公共不动点.

本文的目的,是在Banach空间中研究Lipschitz伪压缩半群和严格伪压缩半群的隐迭代程序(6)的弱收敛性问题. 本文所介绍的结果,推广和改进了Zhou[9],Chen等[8],Osilike[7],Xu等[6]的相应的结果.

为此,我们先追述某些概念和结果.

一Banach空间E称为**一致凸的**,如果对每一$\varepsilon > 0$,存在一$\delta > 0$使得对任意的$x,y\in E$,$\|x\|,\|y\| \leqslant 1$且$\|x-y\| \geqslant \varepsilon$,$\|x+y\| \leqslant 2(1-\delta)$成立.

E的凸性模定义为:

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\|,\|y\| \leqslant 1, \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\},\quad \forall \varepsilon \in [0,2].$$

Bruck[10]证明了下面的定理:

引理1.2[10]　设E是具凸性模δ_E的一致凸的Banach空间,则$\delta_E:[0,2]\to[0,1]$是一连续的增函数,$\delta_E(0) = 0$,$\delta_E(t) > 0$,$\forall t \in (0,2]$,且

$$\|cu + (1-c)v\| \leqslant 1 - 2\min\{c, 1-c\}\delta_E(\|u-v\|),$$

$\forall c \in [0,1]$,$u,v \in E$且$\|u\|,\|v\| \leqslant 1$.

Banach空间E称为**满足Opial条件**,如果对任意的系列$\{x_n\}\subset E$当$x_n \rightharpoonup x$时,则下面的不等式成立:

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|,$$

对任意的$y \in E$,$y \neq x$.

如所周知,每一Hilbert空间及每一l^p,$p > 1$空间都满足Opial条件. 但是L^p空间(除$p = 2$外)却不满足Opial条件.

引理1.3[9]　设E是一实的且满足Opial条件的自反Banach空间. 设C是E之一非空闭凸子集,而$T: C\to C$是一连续的伪压缩映象. 则$I - T$在零点是半闭的,即,对任意的序列$\{x_n\}\subset E$,当$x_n \rightharpoonup y$且$\|(I-T)x_n\| \to 0$时,则$(I-T)y = 0$.

2　主要结果

定理2.1　设E是满足Opial条件的一致凸的Banach空间. 设C是E之一非空闭凸子集,而$\mathscr{T} := \{T(t): t \geqslant 0\}: C\to C$是一Lipschitz的伪压缩半群使得$\mathscr{F} := \bigcap_{t\geqslant 0} F(T(t)) \neq \emptyset$.

如果$\{\alpha_n\}$是$(0,1)$中之一序列,$\{t_n\}$是$(0,\infty)$中之一满足下述条件的序列:

(ⅰ) $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$;

(ⅱ) $\lim_{n\to\infty}t_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n/t_n) = 0$.

则由式(6)定义的序列$\{x_n\}$弱收敛于半群$\mathscr{T} := \{T(t): t\geqslant 0\}$之一公共不动点.

证明　证明分为4步

(Ⅰ) 对每一$p\in\mathscr{F}$,极限$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$存在.

事实上,

$$\begin{aligned}\|x_n-p\|^2 &= \langle x_n-p, j(x_n-p)\rangle = \\ &\alpha_n\langle x_{n-1}-p, j(x_n-p)\rangle + (1-\alpha_n)\langle T(t_n)x_n-p, j(x_n-p)\rangle \leqslant \\ &\alpha_n\|x_{n-1}-p\|\,\|x_n-p\| + (1-\alpha_n)\|x_n-p\|^2, \qquad \forall n\geqslant 1.\end{aligned}$$

简化之,即得

$$\|x_n-p\| \leqslant \|x_{n-1}-p\|, \qquad \forall n\geqslant 1. \tag{8}$$

因而极限$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$存在,从而序列$\{x_n\}$是有界的.

(Ⅱ) 现证

$$\|T(t_n)x_n - x_n\| \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{9}$$

事实上,由式(2)和式(6),有

$$\begin{aligned}\|x_n-p\| &\leqslant \left\|x_n-p+\frac{1-\alpha_n}{2\alpha_n}(x_n-T(t_n)x_n)\right\| = \\ &\left\|x_n-p+\frac{1-\alpha_n}{2}(x_{n-1}-T(t_n)x_n)\right\| = \\ &\left\|\alpha_n x_{n-1}+(1-\alpha_n)T(t_n)x_n-p+\frac{1-\alpha_n}{2}(x_{n-1}-T(t_n)x_n)\right\| = \\ &\left\|\frac{x_{n-1}+x_n}{2}-p\right\| = \\ &\|x_{n-1}-p\|\cdot\left\|\frac{x_{n-1}-p}{2\|x_{n-1}-p\|}+\frac{x_n-p}{2\|x_{n-1}-p\|}\right\|.\end{aligned} \tag{10}$$

令$u=(x_{n-1}-p)/\|x_{n-1}-p\|$,$v=(x_n-p)/\|x_{n-1}-p\|$,由式(8)知$\|u\|=1$,$\|v\|\leqslant 1$. 于是由式(10)和引理1.2得知

$$\|x_n-p\| \leqslant \|x_{n-1}-p\|\left\{1-\delta_E\left(\frac{\|x_{n-1}-x_n\|}{\|x_{n-1}-p\|}\right)\right\}.$$

简化之,即得

$$\|x_{n-1}-p\|\,\delta_E\left(\frac{\|x_{n-1}-x_n\|}{\|x_{n-1}-p\|}\right) \leqslant \|x_{n-1}-p\| - \|x_n-p\|.$$

上述表明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{n-1}-p\|\,\delta_E\left(\frac{\|x_{n-1}-x_n\|}{\|x_{n-1}-p\|}\right) \leqslant \|x_0-p\|.$$

设$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\| = r$. 如果$r=0$,则定理2.1的结论已证. 如果$r>0$,则由凸性模$\delta_E$的性质知$\|x_{n-1}-x_n\|\to 0\ (n\to\infty)$. 于是由式(6)及条件(ⅰ)有:

$$\|x_{n-1}-T(t_n)x_n\| = \frac{1}{1-\alpha_n}\|x_n-x_{n-1}\| \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{11}$$

故由式(6)和式(11),有

$$\| x_n - T(t_n)x_n \| = \alpha_n \| x_{n-1} - T(t_n)x_n \| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

结论(9)得证.

(Ⅲ) 现证对每一 $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \| T(t)x_n - x_n \| = 0 \quad (n \to \infty). \tag{12}$$

事实上,由假定 $\mathscr{T} := \{T(t): t \geq 0\}$ 是一Lipschitz伪压缩半群. 故对每一给定的 $t > 0$,由条件(ⅱ)及映象 $t \mapsto T(t)x, x \in E$ 的连续性,我们有

$$\begin{aligned}
&\| T(t)x_n - x_n \| \leq \\
&\sum_{k=0}^{[t/t_n]-1} \| T((k+1)t_n)x_n - T(kt_n)x_n \| + \left\| T\left(\left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)x_n - T(t)x_n \right\| = \\
&\sum_{k=0}^{[t/t_n]-1} \| T(kt_n)T(t_n)x_n - T(k\,t_n)x_n + \\
&\left\| T\left(\left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)x_n - T\left(\left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)T\left(t - \left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)x_n \right\| \leq \\
&\sum_{k=0}^{[t/t_n]-1} L(kt_n) \| T(t_n)x_n - x_n \| + L\left(\left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right) \left\| x_n - T\left(t - \left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)x_n \right\| \leq \\
&\left[\frac{t}{t_n}\right] M \| T(t_n)x_n - x_n \| + M \left\| x_n - T\left(t - \left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)x_n \right\| \leq \\
&M\left\{ \frac{t}{t_n} \| T(t_n)x_n - x_n \| + \max_{0 \leq s \leq t_n} \| x_n - T(s)x_n \| \right\} = \\
&M\left\{ \frac{t}{t_n}\alpha_n \| x_{n-1} - T(t_n)x_n \| + \max_{0 \leq s \leq t_n} \| x_n - T(s)x_n \| \right\} = \\
&M\left\{ t\frac{\alpha_n}{t_n} \| x_{n-1} - T(t_n)x_n \| + \max_{0 \leq s \leq t_n} \| x_n - T(s)x_n \| \right\} \to 0 \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

其中,$[t/t_n]$ 是Gauss函数,即 $[t/t_n]$ 是一不大于 t/t_n 的非负整数,而 $M = \sup_{t \geq 0} L(t) < \infty$. 结论(12)得证.

(Ⅳ) 最后,证明 $\{x_n\}$ 弱收敛于半群 $\mathscr{T} := \{T(t): t \geq 0\}$ 之一公共不动点.

因为 E 是一致凸的,从而它是自反的. 又因 $\{x_n\} \subset C$ 是有界的,故存在一子序列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ 使得 $x_{n_i} \rightharpoonup u$. 故由式(12),对任意的 $t > 0$,有

$$\| T(t)x_{n_i} - x_{n_i} \| \to 0 \quad (n_i \to \infty).$$

由引理1.3, $u \in F(T(t)), \forall t \geq 0$.. 这就表明

$$u \in \bigcap_{t \geq 0} F(T(t)) \cap W_\omega(x_n).$$

下面证明 $W_\omega(x_n)$ 是一单点集. 设相反,如果存在一子序列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 使得 $x_{n_j} \rightharpoonup q \in C$ 而且 $q \neq u$. 借助上面给出的相同方法,我们也可证明 $q \in \bigcap_{t \geq 0} F(T(t)) \cap W_\omega(x_n)$. 在式(8)中取 $p = u, p = q$, 得知下面的极限存在:

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - u \|, \ \lim_{n\to\infty} \| x_n - q \|.$$

因为 E 满足Opial条件,故有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \| x_n - u \| &= \limsup_{n\to\infty} \| x_{n_i} - u \| < \limsup_{n_i\to\infty} \| x_{n_i} - q \| = \\
&\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \| = \limsup_{n_j\to\infty} \| x_{n_j} - q \| <
\end{aligned}$$

$$\limsup_{n_j\to\infty}\|x_{n_j}-u\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n-u\|.$$

这是一矛盾．由此矛盾知 $q=u$．从而有

$$W_\omega(x_n)=\{u\}\subset \mathscr{F}:=\bigcap_{t\geq 0}F(T(t)).$$

这就证明了 $x_n \rightharpoonup u$.

定理 2.1 的结论被证明.

下面我们对严格伪压缩半群建立一弱收敛定理.

定理 2.2 设 E 是一满足 Opial 条件的自反的 Banach 空间．设 C 是 E 之一非空的闭凸子集,而 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geq 0\}:C\to C$ 是一具严格伪压缩函数 $\lambda(t):[0,\infty)\to(0,1/2)$ 的严格伪压缩半群,使得 $\mathscr{F}:=\bigcap_{t\geq 0}F(T(t))\neq\emptyset$．设 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列,而 $\{t_n\}$ 是 $(0,\infty)$ 中的序列,满足下面的条件:

(ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{t_n}=0$;

(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda(t_n)}{\alpha_n}=K$,其中,$K$ 是一正常数.

则由式(6)定义的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于严格伪压缩半群 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geq 0\}$ 之一公共不动点.

证明 由式(4)及式(6)得知,对任意给定的 $p\in\mathscr{F}:=\bigcap_{t\geq 0}F(T(t))$,

$$\begin{aligned}\|x_n-p\|^2 &= \langle x_n-p,j(x_n-p)\rangle = \\ &\alpha_n\langle x_{n-1}-p,j(x_n-p)\rangle+(1-\alpha_n)\langle T(t_n)x_n-p,j(x_n-p)\rangle\leq \\ &\alpha_n\|x_{n-1}-p\|\,\|x_n-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|^2- \\ &\lambda(t)(1-\alpha_n)\|x_n-T(t_n)x_n\|^2,\end{aligned}\tag{13}$$

由此推出

$$\begin{aligned}\|x_n-p\|^2 &\leq \|x_{n-1}-p\|\,\|x_n-p\|- \\ &\frac{\lambda(t_n)}{\alpha_n}(1-\alpha_n)\|x_n-T(t_n)x_n\|^2.\end{aligned}\tag{14}$$

上式表明

$$\|x_n-p\|\leq\|x_{n-1}-p\|,\qquad \forall\, n\geq 1.$$

因而极限 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ 存在,从而 $\{x_n\}$ 是有界的．记 $M=\sup_{n\geq 0}\|x_n-p\|$．由式(14)有

$$\frac{\lambda(t_n)}{\alpha_n}(1-\alpha_n)\|x_n-T(t_n)x_n\|^2\leq M\{\|x_{n-1}-p\|-\|x_n-p\|\},\tag{15}$$

于式(15)两端让 $n\to\infty$ 取极限,并引用条件(ⅰ)和(ⅱ),即得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T(t_n)x_n\|=0.\tag{16}$$

利用在定理 2.1 的证明中所使用的相同方法,由式(16)及条件(ⅰ),我们可以证明 $\{x_n\}$ 弱收敛于严格伪压缩半群 $\mathscr{T}:=\{T(t):t\geq 0\}$ 的某一公共不动点.

定理 2.2 的结论得证.

注 定理 2.1 及定理 2.2 推广和改进了文献[6-9]中的相应的结果.

致谢 作者衷心感谢审稿人对本文提出的宝贵意见及宜宾学院自然科学基金(2007Z3)对本文的资助.

[参 考 文 献]

[1] Browder F E. *Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces*[M]. *Proc Sympos Pure Math*, **18**(2). Providence RI: Amer Math Soc, 1976.

[2] Kim T H, Xu H K. Strong convergence of modified Mann iterations for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups[J]. *Nonlinear Anal*, 2006, **64**(5): 1140-1152.

[3] Xu H K. Strong asymptotic behavior of almost-robits of nonlinear semigroups[J]. *Nonlinear Anal*, 2001, **46**(1): 135-151.

[4] Deimling K. Zeros of accretive operators[J]. *Manuscripta Math*, 1974, **13**(4): 365-374.

[5] Chang S S, Cho Y J, Zhou H Y. *Iterative Methods for Nonlinear Operator Equations in Banach Spaces*[M]. New York: Nova Science Publishers, 2002.

[6] Xu H K, Ori R G. An implicit iteration process for nonexpansive mappings[J]. *Numer Func Anal Optim*, 2001, **22**(5/6): 767-773.

[7] Osilike M O. Implicit iteration process for common fixed points of a finite family of strictly pseudocontractive maps[J]. *J Math Anal Appl*, 2004, **294**(1): 73-81.

[8] Chen R D, Song Y S, Zhai H Y. Convergence theorems for implicit iteration press for a finite family of continuous pseudocontractive mappings[J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **314**(2): 701-709.

[9] Zhou H Y. Convergence theorems of common fixed points for a finite family of Lipschitzian pseudocontractions in Banach spaces[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **68**(10): 2977-2983.

[10] Bruck R E. A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces [J]. *Israel J Math*, 1979, **32**(1): 107-116.

Convergence Theorem of Common Fixed Points for Lipschitzian Pseudocontraction Semigroups in Banach Spaces

ZHANG Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan* 644007, *P. R. China*)

Abstract: Some weak convergence theorems of the implicity iteration process for a Lipschitzian pseudocontractive semi-groups in general Banach spaces were established, which extend and improve the corresponding new results of Zhou, Chen, *et al*, Xu, *et al* and Osilike.

Key words: Lipschitzian pseudocontraction semigroup; demi-closed principle; common fixed point; Opial condition; strong pseudocontraction mapping; implicit iteration process