应用数学和力学, 第 30 卷 第 1 期
2009 年 1 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 30, No. 1, Jan. 15, 2009

文章编号: 1000-0887(2009) 01-0083-07

非线性电报方程组的 3 个双周期正解问题*

王方磊, 安玉坤

(南京航空航天大学 理学院, 南京 210016)

摘要: 主要考虑了带有双周期边值条件的耦合的非线性电报方程组的至少有 3 个双周期正解的存在性. 首先利用线性电报方程的 Green 函数和极值原理, 将非线性电报方程组解的存在性转化为算子的不动点. 其次赋予非线性项一定的增长条件, 然后利用有序 Banach 空间锥上的 Leggett-Williams 不动点定理来证明算子在锥中至少存在 3 个不动点,即非线性电报方程组至少 3 个非负双周期解的存在性.

关 键 词: 电报方程组; 双周期解; 锥; 不动点定理

中图分类号: O175.15; O177.91 文献标识码: A

引 言

当非线性项有界或线性增长时, 许多作者[1-5]研究了非线性电报方程的周期边值问题. 另一方面, 文献[6-7]研究波方程组、电报-波耦合方程组时间周期解的存在性和多重性. 在许多实际问题当中, 只有正解是重要的. 近来, Ortega 和 Robles-Perez[5]建立了线性电报方程的极值原理. 他们证明了线性电报方程

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \lambda u = h(t,x), \qquad (t,x) \in R^2,$$

2π-周期解的极值原理成立当且仅当 $\lambda \in (0, \nu(c)]$, 其中 $\nu(c) \in (c^2/4, c^2/4 + 1/4)$ 是一个不能准确计算出的常数. 这个极值原理建立在环面T^2($T = R/(2\pi Z)$ 表示单位圆). 当泛函 $u \mapsto F(t,x,u) + \nu(c)u$ 单调不减, 作者[5]利用这个环面T^2上的极值原理建立了下面非线性电报方程双周期解的上下解方法:

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \nu(c)u = F(t,x,u), \qquad (t,x) \in R^2.$$

目前, Li、Wang 和 An[8-9]分别利用锥拉伸-压缩不动点定理来研究电报方程或方程组双周期正解的存在性和多重性. 特别, 在极值原理[5]的基础上, 当非线性项超线性或次线性增长, 文献[9]研究了电报方程组

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + c_1u_t + a_{11}(t,x)u + a_{12}(t,x)v = f_1(t,x,u,v), \\ v_{tt} - v_{xx} + c_2v_t + a_{21}(t,x)u + a_{22}(t,x)v = f_2(t,x,u,v), \end{cases} \tag{1}$$

满足双周期边值条件

* 收稿日期: 2007-12-10; 修订日期: 2008-11-11
作者简介: 王方磊(1982—) , 男, 山东青岛人, 博士(联系人. E-mail: wang-fanglei@hotmail.com) ;
安玉坤, 教授(E-mail: anyksd@hotmail.com) .

$$\begin{cases} u(t+2\pi, x) = u(t, x+2\pi) = u(t, x), & (t, x) \in R^2, \\ v(t+2\pi, x) = v(t, x+2\pi) = v(t, x), & (t, x) \in R^2 \end{cases} \tag{2}$$

的双周期正解的存在性和多重性.

除此之外, 文献[10-11]利用 Leggett-Williams 不动点定理研究不同边值问题 3 个正解的存在性. 受文献[9, 11]的启发, 本文利用 Leggett-Williams 不动点定理研究电报方程组(1)、(2)的 3 个解的存在性.

1 准备知识

令T^2表示环面

$$T^2 = (R/(2\pi Z)) \times (R/(2\pi Z)).$$

用下面符号表示定义在T^2的双周期函数空间:

$$L^p(T^2), C(T^2), C^\alpha(T^2), D(T^2) = C^\infty(T^2), \cdots,$$

$D'(T^2)$ 表示定义在T^2上的广义函数空间.

电报方程组(1)、(2)的解是指 $(u, v) \in L^1(T^2) \times L^1(T^2)$ 在广义的意义下满足方程组(1)、(2), 即

$$\begin{cases} \int_{T_2} u(\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - c_1\varphi_t + a_{11}\varphi) + a_{12}\int_{T_2} v\varphi = \int_{T^2} b_1 f_1 \varphi, \\ \int_{T_2} v(\phi_{tt} - \phi_{xx} - c_2\phi_t + a_{22}\phi) + a_{21}\int_{T_2} u\phi = \int_{T^2} b_2 f_2 \phi, \\ \qquad \forall (\varphi, \phi) \in D'(T^2) \times D'(T^2). \end{cases}$$

首先, 我们考虑线性方程

$$u_{tt} - u_{xx} + c_i u_t - \lambda_i u = h_i(t, x), \quad 在 D'(T^2) 中, \tag{3}$$

其中 $c_i > 0,\ \lambda_i \in \mathbf{R},\ h_i \in L^1(T^2)\ (i = 1, 2)$.

令 $\pounds_{\lambda_i}$ 表示微分算子

$$\pounds_{\lambda_i} = u_{tt} - u_{xx} + c_i u_t - \lambda_i u,$$

其中, $u(t, x)$ 是定义在T^2上的函数.

由文献[5, 8]知, 如果 $\lambda_i < 0$, 则 $\pounds_{\lambda_i}$ 有预解算子R_{λ_i}:

$$R_{\lambda_i}: L^1(T^2) \to C(T^2),\ h_i \mapsto u_i,$$

其中, u_i 是线性方程(3)的唯一解, 且R_{λ_i}限制在$L^p(T^2)(1 < p < \infty)$或$C(T^2)$是紧算子. 特别, $R_{\lambda_i}: C(T^2) \to C(T^2)$ 是一个全连续算子.

由引理5.2[5]知, 当 $\lambda_i = -c_i^2/4$, 微分算子 $\pounds_{\lambda_i}$ 的 Green 函数 $G_i(t, x)$ 为

$$G_i(t, x) = \begin{cases} \gamma_i^{(10)} e^{-c_i t/2}, & (t, x) \in D_i^{(10)}, \\ \gamma_i^{(01)} e^{-c_i t/2}, & (t, x) \in D_i^{(01)}, \end{cases}$$

其中 $\gamma_i^{(10)} = (1 + e^{-c_i\pi})/(2(1 - e^{-c_i\pi})^2),\ \gamma_i^{(01)} = e^{-c_i\pi}/(1 - e^{-c_i\pi})^2$.

由 $G_i(t, x)$ 的定义[8], 可知

$$\underline{G_i} := e^{-3c_i\pi/2}/(1 - e^{-c_i\pi})^2 \leqslant G_i(t, x) \leqslant \overline{G_i} := (1 + e^{-c_i\pi})/(2(1 - e^{-c_i\pi})^2).$$

令X表示 Banach 空间 $C(T^2)$. 定义锥

$$P = \{u \in X \mid u(t, x) \geqslant 0,\ \forall (t, x) \in T^2\},$$

那么 X 是一个有序的 Banach 空间.

当方程(3)中的 $-\lambda_i$ 用函数 $a_{ii}(t,x)$ 替换时, Li[8] 关于方程(3)证明了下面解的存在唯一性和正定性估计:

引理 1.1 令 $h_i(t,x)\in L^1(T^2)$, X 表示 Banach 空间 $C(T^2)$. 那么方程(3)有唯一解 $u_i = Q_ih_i$, $Q_i: L^1(T^2)\to X$ 是一个有界线性算子满足下面性质:

(i) $Q_i: C(T^2)\to C(T^2)$ 是全连续算子;

(ii) 如果 $h_i(t,x)>0$, a.e. $(t,x)\in T^2$, Q_ih_i 满足下面正定性估计:

$$\underline{G_i}\,\|h_i\|_{L^1}\leqslant(Q_ih_i)\leqslant\frac{G_i}{\underline{G_i}\,\|a_{ii}\|_{L^1}}\|h_i\|_{L^1}. \tag{4}$$

Leggett-Williams[12] 证明了下面锥映射的不动点定理:

令 X 是一个实 Banach 空间, P 是 X 中的锥. 称映射 α 是锥 P 上的连续非负凹泛函, 如果

$$\alpha: P\to[0,+\infty)$$

是连续的且对所有的 $x,y\in P$, $t\in[0,1]$, 有

$$\alpha(tx+(1-t)y)\geqslant t\alpha(x)+(1-t)\alpha(y).$$

对数 a、b 使得 $0<a<b$ 且 α 是锥 P 上的非负连续凹泛函, 定义下面凸子集

$$P_a=\left\{x\in P: \|x\|<a\right\},$$

$$P(\alpha,a,b)=\left\{x\in P: a\leqslant\alpha(x),\ \|x\|\leqslant b\right\}.$$

引理 1.2[12] (Leggett-Williams 不动点定理) 令 $A: P_c\to P_c$ 是全连续算子, α 是定义在锥 P 上的非负连续凹泛函使得对所有 $x\in P_c$, 满足 $\alpha(x)\leqslant\|x\|$. 假定存在 $0<d<a<b\leqslant c$ 使得

(i) $\left\{x\in P(\alpha,a,b): \alpha(x)>a\right\}\neq\varnothing$ 且对所有 $x\in P(\alpha,a,b)$, 有 $\alpha(Ax)>a$;

(ii) 当 $\|x\|\leqslant d$ 时, 恒有 $\|Ax\|<d$;

(iii) 当 $x\in P(\alpha,a,c)$ 且 $\|Ax\|>b$ 时, 恒有 $\alpha(Ax)>a$.

那么, A 至少有 3 个不动点 x_1、x_2、x_3 满足

$$\|x_1\|<d,\qquad a<\alpha(x_2),$$

$$\|x_3\|>d,\qquad \alpha(x_3)<a.$$

2 主要结果

本节中假定下面条件成立:

(H1) $a_{ii}\in C(T^2)$, 对 $\forall(t,x)\in T^2$, 有 $0\leqslant a_{ii}(t,x)\leqslant c_i^2/4$ 且 $\int_{T^2}a_{ii}(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x>0$;

(H2) $a_{12}, a_{21}\in C(T^2,\mathbf{R}^-)$;

(H3) $f,g\in C(T^2\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$.

令 $E=X\times X$, 且当 $U=(u,v)\in E$ 时, 定义范数

$$\|U\|=|u|_1+|v|_1,$$

其中, $|u|_1=\max_{(t,x)\in T^2}|u|$, 那么 E 是一个 Banach 空间. 令

$$P=\left\{U=(u,v)\in E\mid u,v\geqslant 0,\ u+v>\delta(|u|_1+|v|_1)\right\},$$

则 P 是 E 中的锥, 其中

$$\delta=\min\left\{\frac{\underline{G_1}^2\,\|a_{11}\|_{L^1}}{G_1},\ \frac{\underline{G_2}^2\,\|a_{22}\|_{L^1}}{G_2}\right\}.$$

由文献[8]知, $0<\delta<1$.

定义算子

$$A_1(u,v)(t,x) = Q_1(-a_{12}(t,x)v + f_1(t,x,u,v));$$

$$A_2(u,v)(t,x) = Q_2(-a_{21}(t,x)u + f_2(t,x,u,v));$$

$$T(u,v)(t,x) = (A_1(u,v)(t,x), A_2(u,v)(t,x)).$$

引理 2.1 算子 $T: E \to E$ 是全连续的且 $T(P) \subseteq P$.

该引理的证明, 参考文献[9], 我们省略证明过程.

定理 2.1 假定(H1)~(H3)成立.

$$\underline{G}_1 \| a_{11} \|_{L^1} \geqslant 2G_1 \| a_{12} \|_{L^1},\ \underline{G}_2 \| a_{22} \|_{L^1} \geqslant 2G_2 \| a_{21} \|_{L^1}.$$

存在数 a、d 且 $0 < d < a$ 使得下面条件满足:

(i) 如果 $(t,x) \in T^2$, $u, v \geqslant 0$ 且 $u + v < d$, 那么

$$f_i(t,x,u,v) < L_1 d, \qquad i = 1,2,$$

其中 $$L_1 = \min\left\{\frac{\underline{G}_1 \| a_{11} \|_{L^1} - 2G_1 \| a_{12} \|_{L^1}}{8\pi^2 G_1}, \frac{\underline{G}_2 \| a_{22} \|_{L^1} - 2G_2 \| a_{21} \|_{L^1}}{8\pi^2 G_2}\right\}.$$

(ii) 存在 $i_0 \in \{1, 2\}$, 使得对 $\forall (t,x) \in T^2$, $u, v \geqslant 0$ 和 $u + v \in [a, \gamma a]$, 有

$$f_{i_0}(t,x,u,v) > L_2 a,$$

其中 $$L_2 = \max\left\{\frac{1 + \gamma \underline{G}_1 \| a_{12} \|_{L^1}}{4\pi^2 G_1}, \frac{1 + \gamma \underline{G}_2 \| a_{21} \|_{L^1}}{4\pi^2 G_2}\right\}$$

和 $$\gamma = 1/\delta.$$

(iii) 下面条件中之一成立:

(A) $$\lim_{u+v\to\infty} \max_{(t,x)\in T^2} \frac{f_i(t,x,u,v)}{u+v} < L_1, \qquad i = 1,2;$$

(B) 存在数 c 使得 $c > \gamma a$, 如果 $\forall (t,x) \in T^2$, $u, v \geqslant 0$ 和 $u + v \leqslant c$, 有

$$f_i(t,x,u,v) < L_1 c, \qquad i = 1,2.$$

那么边值问题(1)、(2)至少存在 3 个双周期正解.

证明 对 $\forall U = (u,v) \in P$, 定义

$$\alpha(U) = \min_{(t,x)\in T^2} u + \min_{(t,x)\in T^2} v,$$

则易知 α 是定义在 P 上的非负连续凹泛函且对 $\forall U \in P$, 有 $\alpha(U) \leqslant \| U \|$.

为了方便, 令 $b = \gamma a$.

步骤 1 如果条件(A)成立, 则存在数 c 使得 $c > b$ 且 $T: P_c \to P_c$.

由条件(A), 可得

$$\lim_{u+v\to\infty} \max_{(t,x)\in T^2} \frac{f_i(t,x,u,v)}{u+v} < L_1, \qquad i = 1,2,$$

那么存在 $\tau_i > 0$ 和 $\sigma_i < L_1$, 使得如果 $u, v \geqslant 0$ 且 $u + v > \tau_i$, 有

$$\lim_{u+v\to\infty} \max_{(t,x)\in T^2} \frac{f_i(t,x,u,v)}{u+v} < \sigma_i, \qquad i = 1,2,$$

即, 对 $\forall (t,x) \in T^2$, $u, v \geqslant 0$ 和 $u + v > \tau_i$, 有

$$f_i(t,x,u,v) \leqslant \sigma_i(u+v), \qquad i = 1,2.$$

令

$$\beta_i = \max\left\{f_i(t,x,u,v) \mid (t,x) \in T^2, u, v \in [0, \tau_i]\right\}, \qquad i = 1,2,$$

则对 $\forall (t,x) \in T^2$, $u, v \geqslant 0$, 有

$$f_i \leqslant \sigma_i(u+v)+\beta_i, \qquad i=1,2.$$

取

$$c=\max\left\{\frac{8\pi^2\beta_1 G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}-2G_1(\|a_{12}\|_{L^1}+4\pi^2\sigma_1)},\right.$$
$$\left.\frac{8\pi^2\beta_2 G_2}{\underline{G}_2\|a_{22}\|_{L^1}-2G_2(\|a_{21}\|_{L^1}+4\pi^2\sigma_2)},\ b\right\},$$

如果 $U=(u,v)\in P_c$, 则有

$$|A_1(u,v)|_1=\max_{(t,x)\in T^2} Q_1(-a_{12}v+f_1(t,x,u,v))\leqslant$$
$$\frac{G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}}\|a_{12}v+f_1(t,x,u,v)\|_{L^1}\leqslant$$
$$\frac{G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}}\|a_{12}v+\sigma_1(u+v)+\beta_1\|_{L^1}\leqslant$$
$$\frac{G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}}[(\|a_{12}\|_{L^1}+4\pi^2\sigma_1)c+4\pi^2\beta_1]<\frac{c}{2}.$$

同理可得

$$|A_2(u,v)|_1<c/2.$$

从而由上可得

$$\|TU\|=|A_1(u,v)|_1+|A_2(u,v)|_1<c.$$

步骤 2　如果存在数 r 使得 $\forall(t,x)\in T^2$, $u,v\geqslant 0$ 且 $u+v\leqslant r$, 有

$$f_i(t,x,u,v)<L_1 r, \qquad i=1,2,$$

那么

$$T:P_r\to P_r.$$

对 $\forall U=(u,v)\in P_r$, 有

$$|A_1(u,v)|_1=\max_{(t,x)\in T^2} Q_1(-a_{12}v+f_1(t,x,u,v))\leqslant$$
$$\frac{G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}}\|a_{12}v+f_1(t,x,u,v)\|_{L^1}\leqslant$$
$$\frac{G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}}\|a_{12}v+L_1 r\|_{L^1}\leqslant$$
$$\frac{G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}}[(\|a_{12}\|_{L^1}+4\pi^2 L_1]r<\frac{r}{2}.$$

同理可得

$$|A_2(u,v)|_1<r/2.$$

因此

$$\|TU\|=|A_1(u,v)|_1+|A_2(u,v)|_1<r.$$

故从上面的推导可知, 如果条件(A)或(B)成立, 那么存在数 c 使得 $T:P_c\to P_c$. 由步骤2知, 当 $r=d$ 时, 由条件(i)可得 $T:P_d\to P_d$.

步骤 3　这步中, 将说明 $\left\{u\in P(\alpha,a,b):\alpha(u)>a\right\}\neq\emptyset$ 且对 $\forall U\in P(\alpha,a,b)$, 有 $\alpha(TU)>a$.

事实上,

$$U=(u,v)=\left(\frac{a+b}{4},\frac{a+b}{4}\right)\in\left\{u\in P(\alpha,a,b):\alpha(u)>a\right\}.$$

对 $\forall U=(u,v)\in P(\alpha,a,b)$, 有

$$b\geqslant|u|_1+|v|_1\geqslant u(t,x)+v(t,x)\geqslant\min_{(t,x)\in T^2}u(t,x)+\min_{(t,x)\in T^2}v(t,x)\geqslant a.$$

那么, 由(ii)可知:

情况 1 $i_0=1$

$$\min_{(t,x)\in T^2}A_1(u,v)(t,x)=\min_{(t,x)\in T^2}Q_1(-a_{12}(t,x)v+f_1(t,x,u,v))>$$
$$\underline{G}_1\|-a_{12}v+aL_2\|_{L^1}\geqslant\underline{G}_1(4\pi^2L_2-\gamma\|a_{12}\|_{L^1})a\geqslant a.$$

因此

$$\alpha(TU)=\min_{(t,x)\in T^2}A_1(u,v)+\min_{(t,x)\in T^2}A_2(u,v)\geqslant\min_{(t,x)\in T^2}A_1(u,v)>a.$$

情况 2 $i_0=2$

$$\min_{(t,x)\in T^2}A_2(u,v)(t,x)=\min_{(t,x)\in T^2}Q_2(-a_{21}(t,x)v+f_2(t,x,u,v))>$$
$$\underline{G}_2\|-a_{21}v+aL_2\|_{L^1}\geqslant\underline{G}_2(4\pi^2L_2-\gamma\|a_{21}\|_{L^1})a\geqslant a.$$

因此

$$\alpha(TU)=\min_{(t,x)\in T^2}A_1(u,v)+\min_{(t,x)\in T^2}A_2(u,v)\geqslant\min_{(t,x)\in T^2}A_2(u,v)>a.$$

步骤 4 如果 $U\in P(\alpha,a,c)$ 且 $\|TU\|>b$, 那么 $\alpha(AU)>a$.

假定 $U\in P(\alpha,a,c)$ 且 $\|TU\|>b$, 则由引理 1.1, 有

$$\min_{(t,x)\in T^2}A_1(u,v)(t,x)=\min_{(t,x)\in T^2}Q_1(-a_{12}(t,x)v+f_1(t,x,u,v))\geqslant$$
$$\underline{G}_1\|-a_{12}v+f_1(t,x,u,v)\|_{L^1}\geqslant$$
$$\frac{\underline{\underline{G}}_1^2\|a_{11}\|_{L^1}}{G_1}\frac{G_1}{\underline{G}_1\|a_{11}\|_{L^1}}\|-a_{12}v+f_1(t,x,u,v)\|_{L^1}\geqslant$$
$$\delta|A_1(u,v)|_1.$$

同理可得

$$\min_{(t,x)\in T^2}A_2(u,v)(t,x)=\min_{(t,x)\in T^2}Q_2(-a_{21}(t,x)v+f_2(t,x,u,v))\geqslant$$
$$\underline{G}_2\|-a_{21}v+f_2(t,x,u,v)\|_{L^1}\geqslant$$
$$\frac{\underline{\underline{G}}_2^2\|a_{22}\|_{L^1}}{G_2}\frac{G_2}{\underline{G}_2\|a_{22}\|_{L^1}}\|-a_{21}v+f_2(t,x,u,v)\|_{L^1}\geqslant$$
$$\delta|A_2(u,v)|_1.$$

因此

$$\alpha(TU)=\min_{(t,x)\in T^2}A_1(u,v)(t,x)+\min_{(t,x)\in T^2}A_2(u,v)(t,x)\geqslant$$
$$\delta|A_1(u,v)|_1+\delta|A_2(u,v)|_1=\delta\|TU\|>\delta b=a.$$

由上面的证明过程可知 Leggett-Williams 不动点定理的假设都是满足的, 故算子 T 存在至少 3 个不动点 $U_1=(u_1,v_1)$, $U_2=(u_2,v_2)$ 和 $U_3=(u_3,v_3)$ 使得

$$\|U_1\|<d,$$
$$a<\min_{(t,x)\in T^2}u_2+\min_{(t,x)\in T^2}v_2,$$
$$\|U_3\|>d,\ \min_{(t,x)\in T^2}u_3+\min_{(t,x)\in T^2}v_3<a.$$

证明完毕. □

由定理 2.1 知, 当非线性项满足一定的增长条件时, 算子 T 在锥 P 中存在至少 3 个不动点, 即边值问题(1)、(2) 存在至少 3 个非负双周期解.

[参 考 文 献]

[1] Fucik S, Mawhin J. Generated periodic solution of nonlinear telegraph equation[J]. Nonlinear Anal, 1978, **2**(5): 609-617.

[2] Kim W S. Doubly-periodic boundary value problem for nonlinear dissipative hyperbolic equations[J]. J Math Appl, 1990, **145**(1): 1-6.

[3] Kim W S. Multiple doubly periodic solutions of semilinear dissipative hyperbolic equations[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(2): 735-748.

[4] Mawhin J. Periodic solution of nonlinear telegraph equations[A]. In: Bedlarek A R, Cesari L, Eds. Dynamical Systems[C]. New York: Academic Press, 1977.

[5] Ortega R, Robles-Perez A M. A maximum principle for periodic solutions of the telegraph equations [J]. J Math Anal Appl, 1998, **221**(2): 625-651.

[6] Berkovits J, Mustonuen V. On nonresonance for system of semilinear wave equations[J]. Nonlinear Anal, 1997, **29**(6): 627-638.

[7] An Y. Periodic solutions of telegraph-wave coupled system at nonresonance[J]. Nonlinear Anal, 2001, **46**(4): 525-533.

[8] Li Y. Positive doubly periodic solutions of nonlinear telegraph equations[J]. Nonlinear Anal, 2003, **55**(3): 245-254.

[9] Wang F, An Y. Nonnegative doubly periodic solutions for nonlinear telegraph system[J]. J Math Anal Appl, 2008, **338**(1): 91-100.

[10] Davis J M, Eloe P W, Henderson J. Triple positive solutions and dependence on high order derivatives [J]. J Math Anal Appl, 1999, **237**(2): 710-720.

[11] Sun J, Li W. Multiple positive solutions of a discrete difference system[J]. Appl Math Comput, 2003, **143**(2): 213-221.

[12] Leggett R W, Williams L R. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces[J]. Indiana Univ Math J, 1979, **28**(4): 673-688.

Triple Positive Doubly Periodic Solutions of a Nonlinear Telegraph System

WANG Fang-lei, AN Yu-kun

(Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R. China)

Abstract: There exist at least three positive doubly periodic solutions of a coupled nonlinear telegraph system with doubly periodic boundary conditions. First, using the Green function and maximum principle, the existence of solutions of nonlinear telegraph system was equivalent to the existence of fixed points of an operator. Finally, imposing growth conditions on the nonlinearities, the existence of at least three fixed points in cone was obtained by using the Leggett-Williams fixed point theorem to cones in ordered Banach spaces, namely, there exist at least three positive doubly periodic solutions of the nonlinear telegraph system.

Key words: telegraph system; doubly periodic solution; cone; fixed point theorem