

# 复杂形状及开孔功能梯度板的三维分析<sup>\*</sup>

曹志远, 唐寿高, 程国华

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

( 皓江推荐)

**摘要:** 推导出适应功能梯度材料构件分析的半解析梯度有限元法基本算式, 并针对功能梯度构件的材料参数随空间坐标变化的特点, 将材料参数纳入到力学方程中进行体积分计算, 从而分析不同情况功能梯度板件问题. 该法适应性强而又简洁高效, 采用一维离散, 给出三维分析结果, 是一种解决功能梯度构件力学分析的有效数值方法. 用提出的方法分析几种具有复杂形状及开孔的功能梯度板, 给出了板件的力学量三维分布形态.

**关键词:** 功能梯度材料; 半解析法; 复杂形状; 开孔; 三维分析

**中图分类号:** O343.8      **文献标识码:** A

## 引 言

功能梯度材料(FGM)是应现代航空航天工业等高新技术领域的需要而发展起来的一种新型材料<sup>[1]</sup>, 其设计思想是在材料的制备过程中, 连续的控制各组分含量的分布, 使材料宏观特性在空间位置上呈现梯度变化, 因此材料的物理性能不存在突变, 可较好地避免或降低应力集中现象. 这种材料具有良好的可设计性, 通过有针对性地改变各组分材料体积分含量的空间分布规律, 满足结构元件不同部位对材料使用性能的不同要求, 达到优化结构整体使用性能的目的<sup>[2]</sup>, 因此在航空航天、能源工业、电子工业、化工等领域得到广泛应用<sup>[3]</sup>.

到目前为止, 对功能梯度材料的结构分析主要是针对梁、板、壳等典型结构, 主要分析方法有层合模型法、渐近解法、精确解法和简化模型法等. 然而, 这些方法大多只能获得一些特定结构形式在一些特殊边界条件下的结果<sup>[4]</sup>, 其中简化模型法往往能适应更复杂的结构形式和边界条件, 但并不能确切反映材料性质梯度变化, 也不能给出功能梯度构件实际存在的力学量三维分布形态<sup>[5]</sup>.

由于功能梯度材料参数与空间坐标相关, 其控制方程是变系数的, 所以现有研究多见于一般构件(梁、壳、板)在简单形状(矩形、方形)及未开孔下的分析<sup>[6]</sup>. 本文将半解析梯度有限元法用于具有复杂形状及带孔洞的功能梯度板的三维分析. 与一般半解析法<sup>[7]</sup>不同的是本方法使用一维离散而得到三维分析结果.

\* 收稿日期: 2008-07-23; 修订日期: 2008-11-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10432030)

作者简介: 曹志远(1938—), 男, 浙江湖州人, 教授;

唐寿高(1952—), 男, 上海人, 教授(联系人, Tel: + 86 21-65981592; E-mail: tangsg@tongji.edu.cn).

# 1 半解析梯度有限元构造及基本算式

## 1.1 半解析单元构造

分析构件为板件, 可采用一维(  $x$  向) 离散后条单元( 如图 1) . 具体形式为: 单元两端为  $L_1(x)$  与  $L_2(x)$ , 边界条件为简支、固定、自由之一; 单元侧边为联接其他单元或给定简单边界条件( 简支、固定、自由之一) . 单元算式推导将基于三维弹性力学理论.

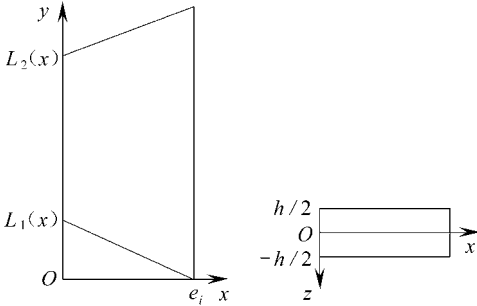


图 1 半解析单元形状

## 1.2 半解析单元的位移模式

采用  $y$  向解析,  $x, z$  平面数值的半解析位移模式, 具体可取沿  $x, y, z$  3 方向位移

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^q Y_n(y) \sum_{k=1}^s N_k(x, z) u_{kn}(t) \\ \sum_{n=1}^q Y_n(y) \sum_{k=1}^s N_k(x, z) v_{kn}(t) \\ \sum_{n=1}^q Y_n(y) \sum_{k=1}^s N_k(x, z) w_{kn}(t) \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

其中,  $Y_n(y)$  为  $y$  向解析函数族, 一般可取为与单元两端边界条件相应的梁( 振型) 函数;  $Y_n(y)$  为  $Y_n(y)$  之导数函数, 例如两端简支单元为

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{L}y, \quad Y_n(y) = \cos \frac{n\pi}{L}y,$$

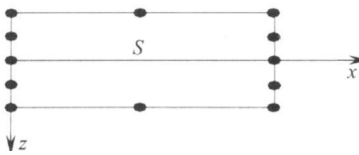


图 2 单元截面结点分布

式中  $L$  为单元  $y$  向长度.  $N_k(x, z)$  取为 12 结点平面有限元形函数( 图 2), 可根据一般有限元中二维形函数的推导予以确定<sup>[8]</sup>.  $u_{kn}, v_{kn}, w_{kn}$  为结线的广义自由度, 待求.

## 1.3 基本算式推导

### 1.3.1 位移列阵

式(1)可表达为矩阵形式

$$[u, v, w]^T = \sum_{n=1}^q N_n \delta_n = N \delta. \quad (2a)$$

其中

$$N_n = \begin{bmatrix} Y_n(y) N_1 & & \dots & & Y_n(y) N_{12} \\ & Y_n(y) N_1 & & \dots & & Y_n(y) N_{12} \\ & & Y_n(y) N_1 & & \dots & & Y_n(y) N_{12} \end{bmatrix}, \quad (2b)$$

$$\delta_n = [u_{1n} \quad v_{1n} \quad w_{1n} \quad \dots \quad u_{12n} \quad v_{12n} \quad w_{12n}]^T, \quad (2c)$$

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_q], \quad (2d)$$

$$\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_q], \quad (2e)$$

### 1.3.2 应变列阵

应变列阵为

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}^T = \sum_{n=1}^q B_n \delta_n = B \delta. \quad (3)$$

将位移表达式(2a)代入式(3),很容易列出  $B_n$  及  $B$  的算式.

### 1.3.3 应力矩阵

$$\sigma = [\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z \quad \alpha_{xy} \quad \alpha_{yz} \quad \alpha_{xz}]^T = \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix} \varepsilon = D\varepsilon = DB\delta, \quad (4a)$$

式中

$$D_1 = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & \mu/(1-\mu) \\ \mu/(1-\mu) & 1 & \mu/(1-\mu) \\ \mu/(1-\mu) & \mu/(1-\mu) & 1 \end{bmatrix}, \quad (4b)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (4c)$$

其中功能梯度构件材料特性沿厚度变化为

$$E = E(z) = E_0 e^{\alpha z/b}, \quad \mu = \mu(z) = \mu_0 e^{\alpha z/b}, \quad G = G(z) = E/[2(1+\mu)], \quad (5)$$

这里,  $\alpha$  为材料变异系数,  $a, b$  分别为板件长、短跨度.

### 1.4 基本运算矩阵

将式(2)、(3)和(4)代入由变形能、动能及外力做功组成的泛函,对  $\delta$  变分,得到单元基本算式:

$$M\delta + K\delta = F, \quad (6)$$

其中,单元刚度矩阵  $K$  的子矩阵为

$$K_{mn} = \iint_S \int_{L_1(x)}^{L_2(x)} B_m^T DB_n dy ds, \quad (7a)$$

单元质量矩阵  $M$  的子矩阵为

$$M_{mn} = \iint_S \int_{L_1(x)}^{L_2(x)} N_m^T \rho N_n dy ds, \quad (7b)$$

单元荷载列阵  $F$  的子列阵为

$$F_n = \iint_S \int_{L_1(x)}^{L_2(x)} N_n^T \rho q dy ds, \quad (7c)$$

而外载列阵  $q = [q_x \quad q_y \quad q_z]^T$ ,  $\rho = \rho(z)$  为质量密度,  $S$  为单元  $xz$  向截面域.

由单元刚度、质量、载荷矩阵装配成总刚度、总质量、总载荷矩阵的方法同一般半解析数值方法<sup>[7]</sup>.

### 1.5 复杂形状及开孔的实现方法

板件形状复杂时,当沿  $x$  向剖分成若干个单元后,其条向长度沿  $x$  向可能变化,单元刚度矩阵  $K$ , 质量矩阵  $M$ , 荷载矩阵  $F$  中的  $y$  向积分限将为  $x$  向坐标的函数,一般可采用数值积分<sup>[8]</sup>.

对开孔板,将开孔部分与未开孔部分分别划分成不同的单元.通过  $y$  向分段积分求取开孔单元的刚度、质量和载荷矩阵;未开孔单元按常规方法处理,最后集合矩阵,实现单元拼装.

## 2 各种形状功能梯度板三维分析

半解析梯度有限元方法可适用于各种形状功能梯度构件三维分析.现列6种不同形状筒

支板件的计算与分析结果.

6 种形状板均有: 板厚 0.02 m, 弹性模量  $E(z) = E_0 e^{\alpha z/b}$ , Poisson 比  $\mu(z) = \mu_0 e^{\alpha z/b}$ , 其中  $E_0 = 100 \text{ GPa}$ ,  $\mu_0 = 0.3$ ,  $\alpha = 5$ , 上表面作用均布荷载  $q = 10 \text{ N/m}^2$ , 全板分成 13 个单元; 但又分别具有下列形状及尺寸:

- (a) 平行四边形板: 底边 0.5 m, 高 1 m, 底角  $80^\circ$ ;
- (b) 直角三角形板: 底边 0.5 m, 高 1 m;
- (c) 八角形板: 边长 0.5 m;
- (d) 圆板: 半径 0.5 m;
- (e) 半圆板: 半径 0.5 m;
- (f) 椭圆板: 短半径 0.25 m, 长半径 0.5 m.

表 1 给出了上述 6 种不同形状功能梯度板的无量纲位移  $w(a/2, b/2)E_0/(qb)$ ,  $v(a/2, 0)E_0/(qb)$  及无量纲应力  $\alpha_x(a/2, b/2)/q$  沿厚度  $z$  分布数值.

表 1 不同形状功能梯度板力学量沿厚度方向分布值

| 无量纲力学量   | 板类  | $-h/2$ | $-h/4$ | 0       | $h/4$  | $h/2$  |
|--|-----|--------|--------|---------|--------|--------|
| $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) E_0 \backslash (qb)$ | (a) | 265.9  | 266.1  | 266.2   | 266.1  | 265.9  |
|  | (b) | 151.0  | 151.2  | 151.3   | 151.2  | 150.9  |
|  | (c) | 612.9  | 613.2  | 613.3   | 613.2  | 612.9  |
|  | (d) | 504.4  | 504.3  | 504.2   | 504.3  | 504.4  |
|  | (e) | 208.8  | 208.8  | 208.8   | 208.8  | 208.7  |
|  | (f) | 498.0  | 498.4  | 498.5   | 498.4  | 498.9  |
| $v\left(\frac{a}{2}, 0\right) E_0 \backslash (qb)$           | (a) | 9.515  | 5.352  | 1.197   | -2.959 | -7.122 |
|  | (b) | 9.309  | 4.579  | -0.1381 | -4.858 | -9.591 |
|  | (c) | 14.60  | 6.485  | -1.569  | -9.583 | -17.53 |
|  | (d) | 18.16  | 10.23  | 2.265   | -5.737 | -13.68 |
|  | (e) | 12.73  | 6.141  | -0.4373 | -7.007 | -13.56 |
|  | (f) | 16.42  | 8.562  | 0.7078  | -7.149 | -14.99 |
| $\alpha_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \backslash q$ | (a) | -138.7 | -72.35 | -2.084  | 72.75  | 152.9  |
|  | (b) | -76.37 | -41.43 | -32.95  | 39.39  | 83.74  |
|  | (c) | -60.82 | -7.624 | 29.78   | 61.32  | 102.5  |
|  | (d) | 115.2  | 65.91  | 16.29   | -36.32 | -95.24 |
|  | (e) | 16.45  | 12.66  | 4.346   | -4.839 | -10.22 |
|  | (f) | -224.5 | -116.7 | -2.621  | 118.4  | 249.5  |

从表 1 数据可以分析得出下列结论:

1) 力学量分布特点:  $w$  沿厚度均布;  $v, \alpha_x$  基本上是以中面反对称. 上述结果与二维平板理论力学量分布规律基本一致, 说明该方法应用正确、可靠(因本方法基于三维理论, 对力学量沿厚度分布未作任何人为约束).

2) 力学量分布又有所偏离二维平板理论分布规律:  $w$  在中间稍大,  $v, \alpha_x$  偏离线性分布. 这表明功能梯度构件力学量由于其材料参数随坐标变化导致偏离经典薄板理论的三维特性<sup>[9]</sup>.

### 3 各种开孔功能梯度板三维分析

半解析梯度有限元法可适用于各种开孔的功能梯度构件三维分析. 现列出 6 种不同开孔筒支矩形板件的计算与分析结果.

6种开孔板均有: 跨度  $a = 0.5\text{ m}$ , 板长  $b = 1\text{ m}$ , 板厚  $h = 0.02\text{ m}$ , 弹性模量、Poisson 比同上节, 上表面作用均布荷载  $q = 10\text{ N/m}^2$ , 全板分成 10 个单元; 但又分别具有孔洞位置及尺寸如下:

- (a) 中心方孔: 孔尺度为  $0.1\text{ m} \times 0.1\text{ m}$ ;
- (b) 中心矩形孔: 孔尺度为  $0.1\text{ m} \times 0.2\text{ m}$ ;
- (c) 中心圆孔: 孔半径为  $r = 0.125\text{ m}$ ;
- (d) 中心椭圆孔: 孔之长轴 ( $x$  向)  $0.125\text{ m}$ , 短轴 ( $y$  向)  $0.0625\text{ m}$ ;
- (e) ( $x$  向) 双方孔: 孔尺度为  $0.05\text{ m} \times 0.05\text{ m}$ , 位于 4、7 单元,  $y$  向中心;
- (f) ( $x$  向) 三方孔: 孔尺度为  $0.05\text{ m} \times 0.05\text{ m}$ , 位于 4、6、8 单元,  $y$  向中心.

表 2 给出了上述 6 种不同开孔功能梯度板的无量纲位移  $w(a/4, b/2)E_0/(qb)$ ,  $v(a/2, 0)E_0/(qb)$  及无量纲应力  $\alpha_x(a/4, b/2)/q$  沿厚度  $z$  分布数值.

表 2 各种开孔功能梯度板力学量沿厚度方向分布值

| 无量纲力学量   | 板类  | $-h/2$ | $-h/4$  | 0      | $h/4$  | $h/2$  |
|--|-----|--------|---------|--------|--------|--------|
| $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) E_0 \backslash (qb)$ | (a) | 411.3  | 411.6   | 411.7  | 411.6  | 411.3  |
|  | (b) | 495.4  | 495.8   | 495.9  | 495.8  | 495.4  |
|  | (c) | 246.2  | 246.2   | 246.1  | 245.9  | 245.7  |
|  | (d) | 252.6  | 252.5   | 252.3  | 252.1  | 251.9  |
|  | (e) | 399.3  | 399.5   | 399.6  | 399.5  | 399.2  |
|  | (f) | 468.4  | 468.7   | 468.8  | 468.7  | 468.4  |
| $v\left(\frac{a}{2}, 0\right) E_0 \backslash (qb)$           | (a) | 18.59  | 9.460   | 0.3478 | -4.858 | -17.89 |
|  | (b) | 23.03  | 11.91   | 0.8255 | -10.25 | -21.36 |
|  | (c) | 4.856  | -0.7148 | -6.172 | -11.63 | -17.16 |
|  | (d) | 5.498  | -0.1510 | -5.759 | -11.35 | -17.00 |
|  | (e) | 18.01  | 9.082   | 0.1524 | -8.781 | -17.72 |
|  | (f) | 22.40  | 12.03   | 1.666  | -8.706 | -19.09 |
| $\alpha_x\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{2}\right) \backslash q$ | (a) | -169.4 | -86.17  | 3.111  | 98.24  | 198.4  |
|  | (b) | -249.1 | -131.9  | -8.679 | 120.6  | 256.3  |
|  | (c) | 8.218  | 31.29   | 62.74  | 92.76  | 120.4  |
|  | (d) | 44.64  | 49.22   | 65.18  | 83.94  | 92.51  |
|  | (e) | -124.3 | -64.72  | 0.6270 | 71.06  | 145.1  |
|  | (f) | -153.4 | -81.75  | -5.510 | 76.31  | 167.9  |

表 2 同样表明, 开孔功能梯度板力学量沿厚度分布规律与薄板理论基本一致, 说明本方法的正确、可靠; 但又有所偏离, 偏离规律与功能梯度板解析解<sup>[9]</sup>一致, 反映了功能梯度板由于材料参数沿厚度变异引起的三维特性.

## 4 结 论

本文发展了适用于功能梯度构件力学分析的一种半解析梯度有限元法, 针对各种形状及不同开孔功能梯度板进行了分析, 得出了基本力学量的三维分布形态. 这是一种功能梯度材料构件分析的有效数值方法, 具有下列一些特点和优点:

- 1) 能适用于各种形状及不同开孔功能梯度板件的力学分析.
- 2) 采用一维数值计算, 给出力学量三维分布形态, 单元、自由度数及计算工作量均较一般有限元法低.
- 3) 能较好地体现功能梯度板件力学量的分布规律及与经典平板理论的差别, 为进一步建立有效的功能梯度材料板壳专门理论提供重要依据.

### [参 考 文 献]

- [1] Koizumi M. The concept of FGM[J]. *Ceramic Trans., Functionally Graded Materials*, 1993, **34**(1): 3-10.
- [2] 黄旭涛, 严密. 功能梯度材料: 回顾与展望[J]. *材料科学与工程*, 1997, **15**(4): 35-38.
- [3] Hirai T, Chen L. Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan[J]. *Mater Sci Forum*, 1999, **308/311**(3): 509-514.
- [4] Lim C W, He L H. Exact solution of a compositionally graded piezoelectric layer under uniform stretch, bending and twisting[J]. *I J of Mechanical Science*, 2001, **43**(11): 2479-2492.
- [5] Yang J, Shen H S. Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates[J]. *Composite Structure*, 2001, **54**(4): 497-508.
- [6] 沈惠申. 功能梯度复合材料板壳结构的弯曲、屈曲和振动[J]. *力学进展*, 2004, **34**(1): 53-60.
- [7] 曹志远, 张佑. 半解析数值方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992.
- [8] Zienkiewicz O C, FRS, Taylor R L. *The Finite Element Method* [M]. 4th Ed. London: McGraw-Hill, Inc, 1987.
- [9] Zhong Z, Sheng E T. 3D exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate[J]. *I J of Solids and Structures*, 2003, **40**(20): 5335-5352.

## 3D Analysis of the Functionally Graded Material Plates With Complex Shapes and Various Holes

CAO Zhi-yuan, TANG Shou-gao, CHENG Guo-hua

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** Basic formulas for Semi-analytical Graded FEM on FGM members were derived. Since FGM parameters vary along three space coordinates, the parameters can be integrated in mechanical equations. Therefore with parameters of a given FGM plate, the FGM plate problems under various conditions can be solved. The approach uses 1D discretization to obtain 3D solutions, and proves to be an effective numerical method for mechanical analyses of FGM structures. Last, several FGM plate examples with complex shapes and various holes were provided.

**Key words:** functionally graded material; semi-analytical method; complex shape; hole; 3D analysis