

基于区间的土体参数敏感性分析方法研究^{*}

苏静波¹, 邵国建², 褚卫江²

(1. 河海大学 海岸灾害及防护教育部重点实验室, 南京 210098;

2. 河海大学 土木工程学院, 南京 210098)

(郭兴明推荐)

摘要: 将一种新的工程结构不确定性分析方法——区间分析方法融入工程参数的敏感性分析之中, 获得了一种新的工程参数敏感性分析方法, 进一步拓宽了区间分析方法理论的应用领域. 给出了土体参数敏感性因子矩阵求解的区间分析过程, 依据区间分析给出了参数区间和决策目标区间的确定方法. 基于 MARC 软件进行了二次开发, 实现了 Duncan-Chang 非线性弹性模型以及与 Fortran 程序的相互调用功能. 通过工程算例验证了该方法的合理可行性, 并与文献的结果进行了对比.

关键词: 区间分析方法; 敏感性; MARC 二次开发; Duncan-Chang 模型

中图分类号: O242.29; TU441.35 **文献标识码:** A

引 言

敏感性分析是指通过计算一个或多个不确定因素的变化所导致的决策评价指标的变化幅度, 了解各种因素的变化对实现预期目标的影响程度, 从而对外部条件发生不利变化时最终目标的承受能力或投资方案做出判断. 目前的敏感性分析方法主要基于随机理论的敏感性分析^[1-3]和基于模糊理论的敏感性分析^[4-6]. 在实际工程结构计算分析过程中, 有时很难获得较多的统计数据来描述随机模型或模糊模型中不确定性参数的概率分布或隶属函数, 这就势必需要一种通过较少数据信息就可以描述结构不确定性的计算分析方法, 由于区间分析方法^[7-8]仅需要知道不确定量的界限而不需知道其具体的分布形式或隶属函数, 这就大大降低了对原始数据的要求, 因此很快被应用于工程结构的不确定性分析中. 本文首先简要介绍了区间分析方法, 基于区间思想给出了参数敏感性因子的计算公式, 然后给出了参数区间和决策目标区间的确定方法, 最后通过具体的工程算例验证了文中方法的合理可行性, 并对后续研究提出了自己的看法.

1 区间分析方法简介

实有界闭集 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为区间. 倘如有理数 a/b 可以看成一对有序整数, 复数可以看成一对有序实数一样, 也可以把区间看成是它的端点 a 和 b 组成的一对有序

* 收稿日期: 2008-04-07; 修订日期: 2008-10-27

作者简介: 苏静波(1979-), 男, 河南邓州人, 博士(联系人: Tel: +86-25-83786638; E-mail: sxwhyh@163.com).

实数, 称为区间数. 通常用大写字母表示区间数, 例如 X^I 是一区间, \underline{x}, x 是它的两个端点, 于是 $X^I = [\underline{x}, x]$. 区间数 X^I 的变异系数定义为 $\delta = \Delta X / X^c$, 这里区间半径 $\Delta X = (x - \underline{x}) / 2$, 区间均值 $X^c = (x + \underline{x}) / 2$. 设两个区间数分别为 $X^I = [\underline{x}, x]$ 和 $Y^I = [\underline{y}, y]$, 于是其四则运算定义如下:

$$\begin{cases} X^I + Y^I = [\underline{x}, x] + [\underline{y}, y] = [\underline{x} + \underline{y}, x + y], \\ X^I - Y^I = [\underline{x}, x] - [\underline{y}, y] = [\underline{x} - y, x - \underline{y}], \\ X^I \times Y^I = [\underline{x}, x] \times [\underline{y}, y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}y, x\underline{y}, xy), \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}y, x\underline{y}, xy)], \\ X^I \div Y^I = [\underline{x}, x] \div [\underline{y}, y] = [\underline{x}, x] \times [1/\underline{y}, 1/y], \quad 0 \notin [\underline{y}, y]. \end{cases} \quad (1)$$

实数的运算法则中仅有一部分如交换律、结合律和恒等律等对于区间数仍然是成立的, 另外一些准则如分配律和抵消律等仅表现为弱的包含形式, 如 $X^I \times (Y^I \pm Z^I) \subseteq X^I \times Y^I \pm X^I \times Z^I$. 由上述运算性质可知, 区间数运算会导致区间的扩张, 区间扩张问题可用下列实值函数 f 和区间值函数 F 的关系来表达:

$$\{f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X^I_i, i = 1, 2, \dots, n\} \subseteq F(X^I_1, X^I_2, \dots, X^I_n). \quad (2)$$

针对区间扩张问题, 许多学者提出了不同的处理方法, 如组合单调性处理方法^[9]、截断处理方法^[9-10]、区间摄动处理方法^[11]等.

区间分析方法主要应用于以下几个方面: 区间静力响应问题^[9, 11-17]、区间动力响应及特征值问题^[18-24]、区间可靠性问题^[25-26]、区间反演问题^[27-29]等.

Rao 等^[9]通过区间方程组中所有区间元素上下边界的组合, 研究了区间方程组的直接组合解法, 该方法程序实施比较简便, 但当自由度较多时计算量成数量级的增长, 并且该方法也没有考虑区间数之间的非线性关系. 线性区间有限元控制方程为:

$$\mathbf{K}^I \mathbf{u}^I = \mathbf{R}^I, \quad (3)$$

式中, $\mathbf{K}^I = (K^I_{ij}) = [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = ([\mathbf{K}_{ij}, K_{ij}])$, $\mathbf{R}^I = (R^I_i) = ([\mathbf{R}, \mathbf{R}]) = ([R_i, R_i])$ 分别是区间刚度矩阵和区间荷载向量. Qiu^[11]提出了基于区间线性控制方程的区间摄动方法, 其位移响应区间为

$$\Delta \mathbf{u}^I = (\Delta u^I_i) = ([-\Delta u_i, \Delta u_i]), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

其中

$$\Delta u_{1i} = (\Delta u_{1i}) = |Q| (\Delta K | u^c | + \Delta R) = \left(\sum_{s=1}^n |q_s| \left[\sum_{t=1}^n \Delta K_{st} | u^c_t | + \Delta R_s \right] \right), \quad (5)$$

$$\Delta u_{ji} = (\Delta u_{ji}) = |Q| \Delta K \Delta u_{j-1} = \left(\sum_{s=1}^n |q_s| \left[\sum_{t=1}^n \Delta K_{st} \Delta u_{(j-1)t} \right] \right), \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (6)$$

$$|Q| = (|q_j|), \quad |u^c| = (|u^c_i|). \quad (7)$$

对于位移上下界的大小来说, 这种方法忽略了整体刚度矩阵和整体荷载向量中区间参数之间的相互作用, 导致计算精度的降低. McWilliam^[12]提出了改进的区间摄动法, 可以部分考虑这种相互作用. 郭书祥等^[13]基于区间数的运算特性提出了求解区间有限元控制方程的方法.

Chen 等^[14]、杨晓伟等^[15]基于单元的思想 and 摄动处理技术给出了基于单元的区间有限元计算方法, 该方法对含有较多不确定参数的单元时收敛性存在问题. 文献[16]提出了基于单元的子区间参数摄动有限元方法, 并在文中讨论了区间有限元计算的收敛性和计算精度, 有限元公

式表述为

$$\mathbf{K}(\alpha^l) \mathbf{U}^l = \mathbf{R}(\alpha^l), \quad (8)$$

其位移响应区间为

$$\underline{\mathbf{U}} = \min_s (\mathbf{U}_s^c - \Delta \mathbf{U}_{1s}), \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \max_s (\mathbf{U}_s^c + \Delta \mathbf{U}_{1s}), \quad (10)$$

$$\Delta \mathbf{U}_{1s} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \left| \left[-\mathbf{K}_s^{-1}(\alpha_s^c) \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{is}}{\partial a_r} \Big|_{\alpha_s^c} \mathbf{U}_s^c - \frac{\partial \mathbf{R}_{is}}{\partial a_r} \Big|_{\alpha_s^c} \right) \frac{\Delta a_r}{L_r} \right] \right|, \quad (11)$$

其中 \mathbf{K}_{is} 和 \mathbf{R}_{is} 分别是单元刚度矩阵 \mathbf{K}_{is} 和单元荷载向量 \mathbf{R}_{is} 扩充后的矩阵和向量, L_r 为子区间数目, s 为参数组的数目, $\mathbf{U}_s^c = \mathbf{K}_s^{-1}(\alpha_s^c) \cdot \mathbf{R}(\alpha_s^c)$. 余远国等^[17]提出一种具有一定普遍适用性的修正迭代算法, 只要结构不确定度范数较小, 收敛条件可以得到很好满足.

近年来, 具有区间参数结构的动力响应问题研究颇多, Qiu 等^[18]、Chen 等^[19]利用区间摄动方法分析结构的动力响应, 吴杰等^[20]、王登刚^[21]、Moers 等^[22]利用区间优化方法研究结构的动力响应. 邱志平等^[23-24]对区间分析方法与概率分析方法得出的结构动态响应及结构特征值问题进行了对比.

Ben-Haim^[25-26]基于区间分析思想首次提出了非概率可靠性的概念. 该模型以结构系统能容许的不确定性干扰的最大程度来确定的. 假定影响结构安全的不确定性量有 N 个, 记为

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}, \quad (12)$$

式中, P_i 可以是载荷、材料性质和结构尺寸等. 假定每个不确定性量偏离它的名义值 P_{i0} ($i = 1, \dots, N$) 的幅度是有界的, 则不确定性量的所有可能的取值可用集合定义为

$$C_P(\alpha) = \left\{ \left| \frac{P_1 - P_{10}}{P_{10}} \right| \leq \alpha_1, \left| \frac{P_2 - P_{20}}{P_{20}} \right| \leq \alpha_2, \dots, \left| \frac{P_N - P_{N0}}{P_{N0}} \right| \leq \alpha_N \right\}, \quad (13)$$

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\},$$

参数 α_i 称为不确定性参数, 它表征了不确定量 P_i 波动变化的程度. 该模型认为结构系统在失效前如果能承受较大数量的不确定性, 则系统是可靠的; 相反, 如果结构系统对于不确定性是脆弱的, 则认为该系统是不可靠的. 郭书祥^[27]同概率可靠性问题一样, 设向量 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 表示与结构有关的基本区间变量的集合, 其中 $x_i \in X_i^l$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 取

$$\mathbf{M} = g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (14)$$

为由结构的失效准则确定的功能函数. 当 $g(\cdot)$ 为 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的连续函数时, M 也为—区间变量, 设其均值和区间半径分别为 M^c 和 ΔM , 并令

$$\eta = M^c / (\Delta M), \quad (15)$$

无量纲量 η 的值越大, 结构的安全程度越高, 因此, 可用 η 来度量结构安全可靠程度.

Juhachi 和 Satoru 首先利用带有误差的位移来反演接触面的应力分布, 具有了一定的区间反演思想. Nakagiri 和 Suzuki^[28]比较详细地论述了区间有限元反演分析的思想, 文中在假设刚度矩阵是确定值的情况下, 通过 Lagrange 乘子方法辨识了在不定位移下方板平面结点荷载的分散程度. 区间优化反分析模型为

$$\begin{cases} \text{对} & \alpha^l, \\ \text{s. t.} & \mathbf{K}(\alpha^l) \mathbf{U}^l = \mathbf{R}(\alpha^l), \\ & \alpha^l \subseteq \alpha^l_p, \\ & \mathbf{U}_{\text{cal}}^l \subseteq \mathbf{U}_i^l, \end{cases} \quad (16)$$

其中: α^l 为待反演参数, α_p^l 为待反分析力学参数的较为宽松的上下界, U_i^l 为测点变形的区间向量, U_{cal}^l 为由式 $K(\alpha^l) U^l = R(\alpha^l)$ 计算获得的测点的位移. 王登刚等^[29] 用约束变尺度方法反演巷道围岩初始地应力和弹性模量的反演模型, 此反演模型对初值比较敏感, 实际计算时经常需采用不同的初始点进行计算, 然后取其最大最小值, 计算量比较大. 刘世军等^[30] 建立了基于参数的摄动方法的摄动反演模型, 该模型先经过一次确定性反分析获得不确定参数的均值, 然后再由摄动公式依次反求出不确定参数的离差, 并利用该模型对岩石力学参数弹模和泊松比进行了反演分析; 该方法需对参数求偏导, 计算量也比较大.

区间分析方法还应用于多目标决策问题^[31] 以及结构的安全性评估中^[32].

区间有限元分析方法引起较多研究者的注意, 并获得了较多的计算方法, 但目前绝大多数区间有限元的分析都是针对简单的杆件结构, 对于复杂工程问题, 区间有限元控制方程可表述为

$$K(\alpha^l, U^l) U^l = R(\alpha^l), \tag{17}$$

式中, K 为整体刚度矩阵, R 为整体荷载向量, α^l 为区间参数变量, U^l 为静力区间位移. 对于该区间控制方程, 作者将区间有限元控制方程形成之前的区间参数取为优化设计变量, 各区间参数的变化区间取为相应设计变量的边约束, 然后通过遗传模拟退火算法求得区间有限元控制方程解元素 U 的最大值和最小值, 从而得到问题的解^[33]. 相关模型可表述为:

$$\begin{cases} \max/\min & U, \\ \text{s. t.} & K(\alpha) U = R(\alpha), \\ & \alpha \in \alpha^l, \\ \max/\min & \sigma^e, \\ \text{s. t.} & \sigma^e = DBU^e, \\ & K(\alpha) U = R(\alpha), \\ & \alpha \in \alpha^l, \end{cases} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

这里, σ^e 为单元应力向量, D 为弹性矩阵, B 为应变转换矩阵, U^e 为单元位移向量.

2 参数敏感性的区间分析方法

2.1 敏感性因子矩阵的确定

由文献[34]可知, 对于某一结构假定具有 n 个模型参数, 这些参数构成一个模型参变量集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其中每个参数 x_j 都有其区间范围 $[x_j, x_j]$ ($j = 1, 2, \dots, n$); 另外, 由 m 个决策目标构成的决策目标集 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 且每一个决策目标 y_i 都有其可行域区间 $[y_i, y_i]$ ($i = 1, 2, \dots, m$). 由于任何一组模型参数构成的参变量集 X 均对应着一个决策目标集 Y , 则该结构仿真系统构成由模型参变量集至决策目标集的一个映射: $X \rightarrow Y$, 并且有如下关系:

$$\begin{cases} y_1 \leq \theta_{11}x_1 + \theta_{12}x_2 + \dots + \theta_{1n}x_n \leq y_1, \\ y_2 \leq \theta_{21}x_1 + \theta_{22}x_2 + \dots + \theta_{2n}x_n \leq y_2, \\ \vdots \\ y_m \leq \theta_{m1}x_1 + \theta_{m2}x_2 + \dots + \theta_{mn}x_n \leq y_m, \end{cases} \tag{20}$$

其中, θ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 为第 j 个模型参数对第 i 个决策目标的综合影响因子. 若 $X \rightarrow Y$ 为一非线性映射, 即

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_m = y_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (21)$$

由 Taylor 展开并忽略高次项, 可得

$$\begin{cases} y_1 = y_1 \Big|_{X^c} + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Big|_{X^c} (x_1 - x_1^c) + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \Big|_{X^c} (x_2 - x_2^c) + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \Big|_{X^c} (x_n - x_n^c), \\ y_2 = y_2 \Big|_{X^c} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Big|_{X^c} (x_1 - x_1^c) + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \Big|_{X^c} (x_2 - x_2^c) + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \Big|_{X^c} (x_n - x_n^c), \\ \vdots \\ y_m = y_m \Big|_{X^c} + \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \Big|_{X^c} (x_1 - x_1^c) + \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \Big|_{X^c} (x_2 - x_2^c) + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \Big|_{X^c} (x_n - x_n^c), \end{cases} \quad (22)$$

整理, 可得

$$\begin{cases} \underline{y}_1 \leq \theta_{11}x_1 + \theta_{12}x_2 + \dots + \theta_{1n}x_n + y_1 \Big|_{X^c} - (\theta_{11}x_1^c + \theta_{12}x_2^c + \dots + \theta_{1n}x_n^c) \leq y_1, \\ \underline{y}_2 \leq \theta_{21}x_1 + \theta_{22}x_2 + \dots + \theta_{2n}x_n + y_2 \Big|_{X^c} - (\theta_{21}x_1^c + \theta_{22}x_2^c + \dots + \theta_{2n}x_n^c) \leq y_2, \\ \vdots \\ \underline{y}_m \leq \theta_{m1}x_1 + \theta_{m2}x_2 + \dots + \theta_{mn}x_n + y_m \Big|_{X^c} - (\theta_{m1}x_1^c + \theta_{m2}x_2^c + \dots + \theta_{mn}x_n^c) \leq y_m, \end{cases} \quad (23)$$

式中, $\theta_{ij} = (\partial y_i / \partial x_j) \Big|_{X^c}$, $X^c = \{x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c\}$. 由于各模型参数的量纲往往不尽相同, 并且在实际计算中很难确定 θ_{ij} 的值, 决策者往往更关心的是从单模型参数来考虑对某一特定决策目标的影响程度.

设模型参数 $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 在其区间 $[x_j, x_j]$ 内对决策目标 $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的边界影响值为 $[y_{i,j}, y_{i,j}]$, 且 $[y_{i,j}, y_{i,j}]$ 是区间 $[y_i, y_i]$ 的一个子集. 令

$$\theta'_{ij} = (y_{i,j} - \underline{y}_{i,j}) / (y_i - \underline{y}_i), \quad (24)$$

则 θ'_{ij} 为模型参数 x_j 对决策目标 y_i 的独立影响因子. 由于 $[y_{i,j}, y_{i,j}]$ 是区间 $[y_i, y_i]$ 的一个子集, 有 $0 < \theta'_{ij} \leq 1$. 当 θ'_{ij} 趋近于 0 时, 表明模型参数 x_j 对决策目标 y_i 的影响程度越小, 即模型参数 x_j 对决策目标 y_i 的敏感性越小; 当 θ'_{ij} 趋近于 1 时, 表明模型参数 x_j 对决策目标 y_i 的影响程度越大, 即模型参数 x_j 对决策目标 y_i 的敏感性越大. 由此可以确定各模型参数对各个决策目标的敏感性因子矩阵 θ' , 为

$$\theta' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \theta'_{11} & \theta'_{12} & \dots & \theta'_{1n} \\ \theta'_{21} & \theta'_{22} & \dots & \theta'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta'_{m1} & \theta'_{m2} & \dots & \theta'_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{matrix}, \quad (25)$$

由于各模型参数对各个决策目标的影响程度不同, 甚至同一模型参数对不同决策目标的影响差别都很大. 从敏感性因子矩阵 θ' 中我们可以看出, 每个模型参数对应的列向量值为其对各个决策目标的独立影响因子, 该因子的数值大小直接反映该模型参数对该决策目标的影响程度; 敏感性因子矩阵 θ' 的行向量表示各个模型参数对相同决策目标的影响程度, θ'_{ij} 的值

越大,表明该模型参数对决策目标的敏感性越强,反之就越弱.该方法在一定程度上考虑了各参数之间的影响.

2.2 边界影响值和决策目标区间的确定

当 x_j 为区间数,而其他参数取其区间均值时,通过区间有限元计算公式(18)和(19)可得到参数 x_j 对决策目标 y_i 的边界影响值 $[y_{i,j}, y_{i,j}]$.

当所有参数均取为区间数时,通过区间有限元计算公式(18)和(19)可得到决策目标区间 $[y_i, y_i]$.

2.3 关于参数区间的讨论

在敏感性分析中,参数量纲的不同可能导致敏感性分析的失败.因此,要进行敏感性分析必须先进行量纲统一或对参数进行一定的转化,下面将给出一种处理的方法.

给定 $z = x^2 + 10y$, ($x \in X^1, y \in Y^1, z \in Z^1$, x 和 y 的均值均为 10, z 关于 x 是二次关系、关于 y 是一次关系,故认为 x 与 y 的量纲不同). 当 $\delta_x = \delta_y = 0.1$ 时,可以得出 $X^1 = [9, 11]$, $Y^1 = [9, 11]$, 通过区间运算可得决策目标 $Z^1 = [171, 231]$, 参数 x 对决策目标 z 的边界影响值为 $[181, 221]$, 参数 y 对决策目标 z 的边界影响值为 $[190, 210]$, 这样,参数 x, y 对决策目标 z 的敏感性因子 θ'_{x}, θ'_{y} 分别为 $2/3, 1/3$, 参数 x 对决策目标 z 的敏感性大于参数 y 对决策目标 z 的敏感性. 当 $\delta_x = 0.1, \delta_y = 0.3$ 时,同理可得参数 x, y 对决策目标 z 的敏感性因子 θ'_{x}, θ'_{y} 分别为 $4/9, 5/9$, 此时,参数 x 对决策目标 z 的敏感性小于参数 y 对决策目标 z 的敏感性. 当 $\delta_x = 0.01, \delta_y = 0.01$ 时,同理可得参数 x, y 对决策目标 z 的敏感性因子 θ'_{x}, θ'_{y} 分别为 $2/3, 1/3$, 此时,参数 x 对决策目标 z 的敏感性大于参数 y 对决策目标 z 的敏感性. 因此,可以得出:随着参数区间变异系数的不同,获得的参数对决策目标的敏感性因子是不同的,而当变异系数相同时,可以得出相同的决策目标的敏感性因子.

因此,为了获得参数敏感性因子矩阵 θ' , 参数区间可通过给定参数区间均值和相同的变导系数获得.

3 土体参数敏感性的区间分析方法

3.1 土体的 Duncan- Chang 非线性弹性模型的实现

3.1.1 Duncan- Chang 非线性弹性模型基本理论^[35]

常规三轴试验中,在 σ_3 不变条件下施加 $(\sigma_1 - \sigma_3)$, 并测出轴向应变 ε_a 和体积应变 ε_v , 点绘 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 曲线,如图 1 所示. 康纳等人发现,可以用双曲线拟合这些曲线. 对于某一 σ_3 , $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 关系可表示成

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \varepsilon_a / (a + b\varepsilon_a), \quad (26)$$

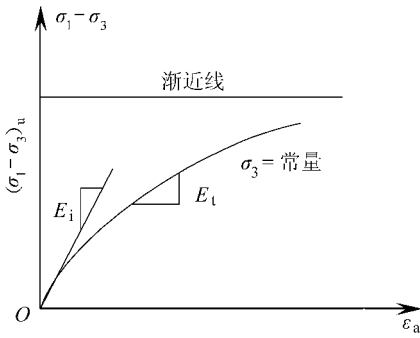
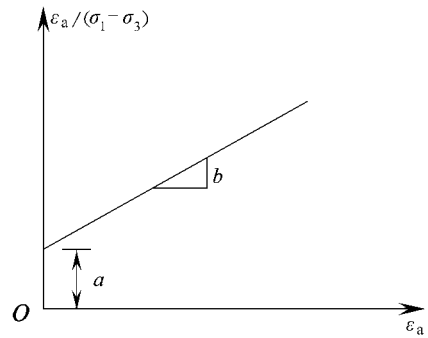
式中, a 和 b 为试验常数. 上式可写为

$$\varepsilon_a / (\sigma_1 - \sigma_3) = a + b\varepsilon_a, \quad (27)$$

以 $\varepsilon_a / (\sigma_1 - \sigma_3)$ 为纵坐标, ε_a 为横坐标,则双曲线可转换成直线,见图 2, 其斜率为 b , 截距为 a .

Duncan(邓肯)和 Zhang(张)利用上述关系推导出了切线弹性模量 E_t 和 Poisson 比 μ_t 的计算公式:

$$E_t = \left[1 - R_f \frac{(1 - \sin\phi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos\phi + 2\sigma_3 \sin\phi} \right]^2 k P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n, \quad (28)$$

图 1 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 变化曲线图 2 $\varepsilon_a / (\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_a$ 变化曲线

$$\mu_t = \frac{G - F \lg(\sigma_3 / P_a)}{(1 - A)^2}, \quad (29)$$

其中

$$A = D(\sigma_1 - \sigma_3) \left\{ k P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin \phi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi} \right] \right\};$$

式中 c 、 ϕ 、 R_f 、 k 、 n 、 G 、 F 、 D 分别为 Duncan- Chang 模型的试验参数。

由式(29)算得的 Poisson 比有时可能大于 0.5, 在试验中测得的 Poisson 比也确有可能超过 0.5, 这是由于土体存在剪胀性引起的。但在有限元计算中, Poisson 比若大于或等于 0.5, 刚度矩阵就可能出现异常。因此, 实际计算中, 当 Poisson 比大于 0.49, 取 Poisson 比等于 0.49。

3.1.2 Duncan- Chang 非线性弹性模型子程序在 MARC 中的实施

在 MARC 中, 可使用一个名为 HYPELA 的子程序来定义 Duncan- Chang 非线性弹性模型。此子程序是通过材料特性里的 HYPOELASTIC 里的子程序接口“USER SUB. HYPELA”来调用的。通过子程序的实施, MARC 可自动计算出土体的切线弹性模量和切线 Poisson 比, 并且施加给单元。

编制的子程序具体实施步骤为:

- 通过 MARC 公用块调出单元在整体坐标方向的应力, 求解出主应力分量 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ;
- 输入每层土的 Duncan- Chang 模型的 8 个参数;
- 根据公式(28)和(29)计算出单元的弹性模量和 Poisson 比;
- 计算出单元刚度矩阵, 最后返回 MARC 计算主程序;
- 依次对每个单元进行循环, 直到所有单元均计算完毕。

3.2 土体参数敏感性分析流程

基于区间分析的土体参数敏感性分析流程为:

- 确定模型参数和决策目标;
- 建立土体结构有限元模型, 确定参数的均值和变异系数;
- 通过区间有限元方法公式(18)和(19)求得模型参数对决策目标的边界影响值;
- 通过区间有限元方法公式(18)和(19)求得决策目标的可行区间;
- 通过公式(24)和(25)获得敏感性因子矩阵 θ' 。

4 数值算例

现以图 3 所示平面应变结构为例, 采用给出的敏感性区间分析方法对 Duncan- Chang $E_1 -$

v_t 模型参数的敏感性进行分析,其材料参数见表 1.

表 1 材料参数表

$\varphi/(\circ)$	c/kPa	k	n	R_f	G	F	D
30	100	500	0.40	0.70	0.22	0.09	5.80

计算时,利用对称性取右半部分进行分析,水平方向影响范围取土体深度的 3 倍,计算区域共划分 108 个平面四边形单元,133 个结点. 采用 10 个荷载增量步. 参数取为 Duncan- Chang $E_t - v_t$ 模型的 8 个参数,变异系数取为 0.1,决策目标为结点 A 的竖向位移 y_A , 结点 B 的竖向位移 y_B , 结点 C 的水平位移 x_C , 结点 A 的水平向应力 σ_x 和竖向应力 σ_y . 通过区间优化方法获得模型参数对决策目标的边界影响值见表 2,决策目标的可行域区间见表 3,模型参数对决策目标的敏感性因子矩阵见表 4.

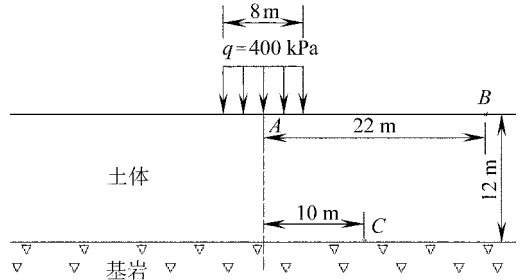


图 3 计算断面图

表 2 模型参数对决策目标的边界影响值 $[y_{i,j}, y_{i,j}]$.

	y_A/cm	y_B/cm	x_C/cm	σ_x/kPa	σ_y/kPa
$\varphi/(\circ)$ [27, 33]	[- 1.420, - 1.317]	[0.284, 0.300]	[0.578, 0.612]	[- 50.855, - 50.123]	[- 87.851, - 87.262]
c/kPa [90, 110]	[- 1.421, - 1.321]	[0.284, 0.301]	[0.578, 0.614]	[- 50.836, - 49.947]	[- 88.230, - 87.032]
k [450, 550]	[- 1.517, - 1.243]	[0.265, 0.324]	[0.540, 0.660]	[- 50.448, - 50.399]	[- 87.728, - 87.682]
n [0.36, 0.44]	[- 1.839, - 1.011]	[0.209, 0.407]	[0.435, 0.815]	[- 52.123, - 47.627]	[- 91.666, - 80.569]
R_f [0.63, 0.77]	[- 1.429, - 1.307]	[0.282, 0.302]	[0.574, 0.616]	[- 50.520, - 50.129]	[- 87.805, - 87.283]
G [0.198, 0.242]	[- 1.461, - 1.262]	[0.287, 0.296]	[0.560, 0.640]	[- 52.459, - 49.193]	[- 93.030, - 79.515]
F [0.081, 0.099]	[- 1.484, - 1.267]	[0.287, 0.299]	[0.560, 0.652]	[- 51.771, - 49.914]	[- 92.445, - 80.720]
D [5.22, 6.38]	[- 1.367, - 1.365]	[0.291, 0.291]	[0.593, 0.594]	[- 50.450, - 50.402]	[- 87.725, - 87.680]

表 3 决策目标的可行域区间

y_A/cm	y_B/cm	x_C/cm	σ_x/kPa	σ_y/kPa
[- 2.467, - 0.797]	[0.181, 0.482]	[0.353, 1.076]	[- 54.112, - 46.262]	[- 95.842, - 72.645]

表 4 模型参数对决策目标敏感性因子矩阵 θ'

	$\varphi/(\circ)$	c/kPa	k	n	R_f	G	F	D	和
y_A	0.061 4	0.059 8	0.164 0	0.495 7	0.073 1	0.119 0	0.129 6	0.001 2	1.103 8
y_B	0.051 1	0.055 0	0.195 5	0.656 9	0.064 3	0.028 4	0.040 3	0.000 5	1.092 0
x_C	0.045 8	0.049 6	0.165 4	0.526 6	0.057 9	0.110 3	0.126 7	0.000 7	1.083 0
σ_x	0.093 3	0.113 3	0.006 3	0.572 7	0.049 8	0.416 0	0.236 6	0.006 2	1.494 2
σ_y	0.025 4	0.051 7	0.002 0	0.478 4	0.022 5	0.582 6	0.505 5	0.001 9	1.670 0

从表 4 中 Duncan- Chang $E_t - v_t$ 模型的 8 个参数对决策目标的敏感性因子矩阵 θ' 的行向量、列向量可以直接进行参数对决策目标影响程度的比较,相同的模型参数对于不同的决策目标的影响程度是不同的,并且不同的模型参数对于相同的决策目标的影响程度也是不同的.

1) 进行模型参数对决策目标的影响程度大小的分析时,可进行列向量的比较;如内摩擦角 φ 对 A 点的水平向应力影响程度最大,而对 A 点的竖向应力影响最小,参数 n 对 B 点的竖向位移影响程度最大,而对 A 点的竖向应力影响最小。

2) 进行对同一决策目标影响程度大小的模型参数的分析时,可进行行向量的比较;如对 A 点竖向位移影响程度由大到小的参数排列顺序为: $n, k, F, G, R_t, \varphi, c, D$ 。

3) 从最后一列可以看出,每一行敏感性大小的和不等于 1.0,这是由于模型参数和决策目标之间的非线性关系引起的,这也正是区间分析区别于单调性组合分析^[9]的优点。

4) 由文献[36]和[37]可知, n, k 这两个参数对土体沉降比较敏感,这与本文获得的结论是一样的。

5 结 论

文中将区间分析方法融入工程参数的敏感性分析之中,获得了一种新的工程参数敏感性分析方法,进一步拓宽了区间分析方法理论的应用领域。

1) 在 Duncan- Chang $E_t - v_t$ 模型中, n, k, F, G 对土体沉降比较敏感。因此,在对土体作沉降分析时,可取 n, k, F, G 作为区间变量,而将其余变量视为定值;

2) 在 Duncan- Chang $E_t - v_t$ 模型分析时,若不仅仅分析沉降,则由于相同的模型参数对于不同的决策目标的影响程度是不同的,需要综合判断确定需作为区间的参数;

3) 敏感性分析的实用性还反映在结构设计参数的优化方面和指导勘测、试验及控制施工质量方面,因此在敏感性分析基础上的区间优化设计和区间反分析将是后续研究的重点,比较敏感的参数可以作为设计变量和待反演参数。

致谢 感谢河海大学科技创新基金(2013- 406096)的资助。

[参 考 文 献]

- [1] LIU Ning. Sensitivity analysis for 3- D elastoplastic structural reliability[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996, **9**(4): 296- 305.
- [2] Hector A J. Design and sensitivity analysis of dynamical systems subjected to stochastic loading[J]. *Computers and Structures*, 2005, **83**(14): 1062- 1075.
- [3] Singh T N, Vema A K, Shama P K. A neuro- genetic approach for prediction of time dependent deformational characteristics of rock and its sensitivity analysis[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2007, **133**(25): 395- 407.
- [4] Hanss M, Hurlbauss S, Gaul L. Fuzzy sensitivity analysis for the identification of material properties of orthotropic plates from natural frequencies[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2002, **16**(5): 769- 784.
- [5] 李守义, 高辉, 冯海波. 基于模糊有限元的堆石坝材料参数敏感度分析[J]. 西安理工大学学报, 2002, **18**(1): 35- 39.
- [6] Precup R E, Preilil S. On the stability and sensitivity analysis of fuzzy control system for servo- systems[J]. *Stud Fizic*, 2005, **181**(8): 131- 161.
- [7] Moor R E. *Methods and Applications of Interval Analysis*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.
- [8] 苏静波, 邵国建. 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望[J]. 力学进展, 2005, **35**(3): 338- 344.

- [9] Rao S S, Berke L. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis[J]. *AIAA Journal*, 1997, **35**(4): 727– 735.
- [10] 吕震宙, 冯蕴雯, 岳珠峰. 改进的区间截断法及基于区间分析的非概率可靠性分析方法[J]. *计算力学学报*, 2002, **19**(3): 260– 264.
- [11] Qiu Z P, Elishakoff I. Anti- optimization of structures with large uncertain but non- random parameters via interval analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, **152**(3/4): 361– 372.
- [12] McWilliam S. Anti- optimization of uncertain structures using interval analysis[J]. *Computers and Structures*, 2001, **79**(4): 421– 430.
- [13] 郭书祥, 吕震宙. 区间运算和区间有限元[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(12): 1249– 1254.
- [14] Chen S H, Lian H D, Yang X W. Interval static displacement analysis for structures with interval parameters[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **53**(2): 393– 407.
- [15] 杨晓伟, 陈塑寰, 滕绍勇. 基于单元的静力区间有限元法[J]. *计算力学学报*, 2002, **19**(2): 179– 183.
- [16] 邵国建, 苏静波. 区间有限元方法及其在抗滑稳定性分析中的应用[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(4): 471– 478.
- [17] 余远国, 沈成武, 黄艳. 修正的迭代算法用于结构不确定性问题的静力区间分析[J]. *武汉理工大学学报(交通科学与工程版)*, 2006, **30**(2): 275– 278.
- [18] Qiu Z P, Wang X J. Parameter perturbation method for dynamic responses of structures with uncertain- but- bounded parameters based on interval analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(18/19): 4958– 4970.
- [19] Chen S H, Lian H D, Yang X W. Interval eigenvalue analysis for structures with interval parameters[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, **39**(5): 419– 431.
- [20] 吴杰, 陈塑寰. 区间参数振动系统的动力优化[J]. *力学学报*, 2003, **35**(3): 373– 376.
- [21] 王登刚. 计算具有区间参数结构的固有频率的优化方法[J]. *力学学报*, 2004, **36**(3): 364– 372.
- [22] Moens D, Vandepitte D. Interval sensitivity theory and its application to frequency response envelope analysis of uncertain structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **196**(21/24): 2486– 2496.
- [23] Qiu Z P, Wang X J. Comparison of dynamic response of structures with uncertain- but- bounded parameters using non- probabilistic interval analysis method and probabilistic approach[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(20): 5423– 5439.
- [24] 邱志平, 王靖. 不确定参数结构特征值问题的概率统计方法和区间分析方法的比较[J]. *航空学报*, 2007, **28**(3): 590– 592.
- [25] Ben- Haim Y. A non- probabilistic concept of reliability[J]. *Structure Safety*, 1994, **14**(4): 227– 245.
- [26] Ben- Haim Y. *Robust reliability in the mechanical sciences*[M]. Berlin: Springer- Verlag, 1996.
- [27] 郭书祥. 非随机不确定结构的可靠性方法和优化设计研究[D]. 博士论文. 西安: 西北工业大学, 2002.
- [28] Nakagiri S, Suzuki K. Finite element interval analysis of external loads identified by displacement input with uncertainty[J]. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **168**(1): 63– 72.
- [29] 王登刚, 刘迎曦, 李守巨, 等. 巷道围岩初始应力场和弹性模量的区间反演方法[J]. *岩石力学与工程学报*, 2002, **21**(3): 305– 308.
- [30] 刘世君, 徐卫亚, 王红春, 等. 岩石力学参数的区间参数摄动反分析方法[J]. *岩土工程学报*, 2002, **24**(6): 760– 763.
- [31] Xu D L, Yang J B, Wang Y M. The evidential reasoning approach for multi- attribute decision analysis under

- interval uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, **174**(3): 1914–1943.
- [32] Garcia O, Veh J, Matos J C, et al. Structural assessment under uncertain parameters via interval analysis [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **218**(1): 43–52.
- [33] 苏静波, 吴中, 施泉. 地下隧洞结构区间分析的优化方法[J]. *岩土力学*, 2007, **28**(Supp): 455–459.
- [34] 钟登华, 练继亮. 大坝施工仿真计算模型参数敏感性区间分析[J]. *计算机仿真*, 2003, **20**(12): 48–50.
- [35] 朱百里, 沈珠江. 计算土力学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990.
- [36] 陈志坚, 游庆仲, 胡应德. 江阴大北锚沉井地基土邓肯参数的反演及反馈分析[J]. *固体力学学报*, 1999, **20**(计算力学专辑): 102–106.
- [37] 郭志川, 刘宁, 余登飞. 地基沉降的随机有限元法和可靠度计算[J]. *土木工程学报*, 2001, **34**(5): 62–67.

Sensitivity Analysis Method of Soil Parameters Based on Interval

SU Jing-bo¹, SHAO Guo-jian², CHU Wei-jiang²

(1. Key Laboratory of Coastal Disaster and Defence,

Ministry of Education, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;

2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China)

Abstract: Interval analysis method is a new uncertainty analysis method for engineering structures. A new sensitivity analysis method of engineering parameters was gained by introducing interval analysis method. And this will widen the application domain of interval analysis method. The interval analysis process of sensitivity factor matrix of soil parameters was given. The choosing method of the parameter intervals and decision-making target intervals was given according to interval analysis method. During the process of FEM, the secondary developments were done for Marc and the Duncan-Chang nonlinear elastic model and the mutual transfer between FORTRAN and MARC were implemented. By the engineering example, the rationality and feasibility were validated. And the conclusion was compared with that of the literatures.

Key words: interval analysis method; sensitivity; secondary development of MARC; Duncan-Chang model