

# 半无限介质瞬态热传导的同伦分析法

A 利扎尼亚, A 戈巴利, G 多麦利, H 巴拉尼亚

(巴博尔工业大学 机械工程系, 巴博尔, 伊朗)

(周哲玮推荐)

摘要: 应用同伦分析法(HAM)求解半无限介质瞬态热传导问题, 该问题在不同的热场中有着广泛的应用 将得到的分析结果与精确解和积分法结果进行比较 比较表明, 和其它近似方法相比, HAM 能够提供更好的近似值 得到了铜、铁和铝在不同时间热流量的变化和温度的分布

关键词: 同伦分析法; 半无限介质; 传导; 瞬态热传递; 积分法; 温度分布

中图分类号: TG113.22<sup>+</sup>3; O154.2 文献标识码: A

## 符 号

$c$	介质的比热	$L$	线性算子
$k$	热传导率	$N$	非线性算子
$q$	热流量	$( )$	无量纲温度函数
$T$	有量纲温度		热扩散系数
$T_i$	初始温度		独立的无量纲参数
$T_0$	壁面温度		介质密度
$t$	时间	$h$	辅助参数
$x$	有量纲正交系坐标		

## 引 言

半无限介质是指仅在一个方向上无限延伸的介质, 有一个可辨别的表面是其特征 如果表面条件发生突然变化, 固体内部将产生一维瞬态热传导 对半无限固体介质的研究, 为许多实际问题提供理想化的参照 还能用于确定地表附近瞬态热传导的影响, 或者对一个有限固体如厚板<sup>[1]</sup>的瞬间响应进行近似分析

通过对半无限体的研究, 可得到最小的埋置深度, 以免寒冷季节水的冻结 工人的身体与高温机器接触时, 会发生皮肤灼伤,  $T = 48$ , 持续时间超过 10 s, 任何活性组织细胞将会死亡 使用半无限介质假设, 将不可恢复的组织损伤(以其离皮肤表面的距离度量)看作机器温度和皮肤与机器接触时间的函数进行研究 要确定一个固体材料的导热性, 可以在该固体厚

收稿日期: 2007-03-07; 修订日期: 2008-11-15

作者简介: A. Rezaia, 硕士(联系人, Tel: + 98- 911- 9115371; E-mail: alireza\_rezaia@yahoo.com).

本文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

板(半无限介质)中嵌入一个热电偶,并在其表面测量它对指定温度变化的响应

Khaleel<sup>[2]</sup>结合周期性热流和对流边界条件对热传导的影响,分析研究了通过半无限和有限介质时熵的传递 Fang<sup>[3]</sup>对一个具有任意温度的半无限介质,使用相似变换技术研究一维热传导问题 Antaki<sup>[4]</sup>运用双相滞后模型(DPL, dual phase lag),导出具有常温表面的半无限板瞬时温度解 该问题的另一个解,用作推导表面恒定热流的期望解的起点 Hussain 等<sup>[5]</sup>针对半无限介质中非 Fourier 热传导过程中熵的改变,使用扩展的不可逆热动力学法(EIT),温度将产生一个阶跃的变化 Hussain 等还致力于预测温度分布和热流

同伦分析法(HAM)首先由 Liao<sup>[6]</sup>引入,主要用于解析解分析 该方法成功地应用于许多工程和科学领域的非线性计算问题 例如,流过不透水预拉伸板的边界层流动<sup>[7]</sup>、流过拉伸平板的不稳定边界层流动<sup>[8]</sup>等 所有这些成功的案例说明了 HAM 具有正确性、有效性和灵活性 其他作者<sup>[9-19]</sup>也曾使用 HAM 解决了许多非线性问题

本文将应用同伦分析法,这一最有效的计算方法之一,研究没有能量产生时的半无限介质中的瞬态热传导 得到了铜、铁和铝,不同时间的热流量和温度分布,并对结果进行相互比较,这些材料都在工业上得到了广泛的应用

## 1 建立公式

下面考虑在一个半无限介质中的一维热传导问题 假设介质的密度、热容量和导热率均为常数,不受介质温度的影响 无热源项时热传导的控制方程表示为

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{t} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}; \quad (1)$$

方程的初始条件为

$$T(x, 0) = T_i; \quad (2)$$

方程的边界条件为

$$T(0, t) = T_0, T(\infty, t) = 0 \quad (3)$$

下面用 HAM 求解并将结果与积分法和精确解相比较

## 2 同伦分析法

定义相似变量  $\eta = x/(2\sqrt{t})$  和无量纲温度  $\theta(\eta) = (T - T_i)/(T_0 - T_i)$ , 则有

$$\frac{T}{x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{(4t)^{1/2}} \frac{d\theta}{d\eta}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4t} \frac{d^2\theta}{d\eta^2}, \quad (5)$$

$$\frac{T}{t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{-x}{2t(4t)^{1/2}} \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{-\eta}{2t} \frac{d\theta}{d\eta} \quad (6)$$

方程(1)将变为

$$\eta^2 \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0, \quad (7)$$

又,上面的初始条件和边界条件变为方程(5)的边界条件:

$$\theta(\eta = 0) = 0, \quad \theta(\eta = \infty) = 1, \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \theta = 0, \quad \theta(\eta = \infty) = 0 \quad (9)$$

这里和前面有关  $T_0(\cdot)$  的表示不一样 为了用 HAM 求解, 我们选择

$$o(\cdot) = e^{-\cdot} \quad (10)$$

作为  $(\cdot)$  的初始近似值, 且令

$$L(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2} \quad (11)$$

为具有如下属性的辅助线性算子:

$$L(c_1 e^{\cdot} + c_2 e^{-\cdot}) = 0, \quad (12)$$

其中,  $c_1$  和  $c_2$  为任意常数 于是得到如下形式的零阶问题:

$$(1-p)L[\cdot(\cdot; p) - o(\cdot)] = phN[\cdot(\cdot; p)], \quad (13)$$

$$(0, p) = 1, \quad (\cdot, p) = 0, \quad (14)$$

其中带有变系数的微分算子  $N$  由下式给出:

$$N(\cdot(\cdot; p)) = \frac{d^2(\cdot(\cdot; p))}{dx^2} + 2 \quad (15)$$

上述方程中,  $P \in [0, 1]$  为嵌入参数,  $h$  为辅助的非零参数 显然, 对于  $p = 0$  和  $p = 1$ , 我们有

$$(\cdot, 0) = o(\cdot), \quad (\cdot, 1) = \cdot \quad (16)$$

随着  $p$  从 0 增加到 1,  $(\cdot, p)$  从初始的猜测值  $o(\cdot)$  变化到精确解  $(\cdot)$  根据 Taylor 公式和方程(16),  $(\cdot, p)$  可表示为

$$(\cdot, p) = o(\cdot) + \sum_{m=1}^{\infty} m(\cdot) p^m, \quad (17)$$

$$m(\cdot) = \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m(\cdot(\cdot, p))}{dp^m} \right|_{p=0} \quad (18)$$

值得注意的是, 级数(17)的收敛性依赖于  $h$ , 假设这样来选择  $h$ , 使式(17)在  $p = 1$  处收敛, 则由于式(16), 就有

$$(\cdot) = o(\cdot) + \sum_{m=1}^{\infty} m(\cdot) \quad (19)$$

将零阶形变方程(13)对  $p$  取  $m$  次微分, 然后, 除以  $m!$ , 最后取  $p = 0$ , 得到下面第  $m$  阶形变方程

$$L[m(\cdot) - m_{m-1}(\cdot)] = hR_m(\cdot), \quad (20)$$

$$m(0) = m(\cdot) = 0, \quad (21)$$

$$R_m(\cdot) = m_{m-1}(\cdot) + 2 m_{m-1}(\cdot), \quad (22)$$

其中

$$m = \begin{cases} 0, & m = 1, \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (23)$$

通过 Maple 软件计算方程的解为

$$o(\cdot) = e^{-\cdot}, \quad (24)$$

$$1(\cdot) = 0.5h^{-2}e^{-\cdot} \quad (25)$$

解  $2(\cdot)$  及其其他各解, 由于太长而无法列出, 因此通过图形来表示 需要注意的是, 辅助参数  $h$  影响解的收敛性 确定  $(t)$  和  $T(x, t)$  后, 由下式定义  $x = 0$  处的热流量  $q(0, t)$  (热流量图见图 3):

$$q(0, t) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (26)$$

### 3 积分法

将方程(1)对空间变量从  $x = 0$  到  $x = (t)$  积分

$$\frac{T}{x} \Big|_{x=(t)} - \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{x=0} \frac{(t)}{t} T dx \quad (27)$$

根据微分法则, 等式右边的积分式可变换为

$$\frac{T}{x} \Big|_{x=(t)} - \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{x=0} \left[ \frac{d}{dt} \left( \int_{x=0} T dx \right) - T \Big|_{x=0} \frac{d}{dt} \right] \quad (28)$$

根据热边界层定义

$$\frac{T}{x} \Big|_{x=(t)} = 0, \quad T \Big|_{x=0} = T_i \quad (29)$$

在对流分析中, 我们定义

$$= \int_{x=0}^{(t)} T(x, t) dx \quad (30)$$

将方程(29)、(30)代入方程(28), 得到

$$- \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = \frac{d}{dt} ( - T_i ) \quad (31)$$

上式称为该问题的能量积分方程, 选择 1 个三次多项式代替方程中的  $T(x, t)$ :

$$T(x, t) = a + bx + cx^2 + dx^3, \quad 0 \leq x \leq (t) \quad (32)$$

根据  $(t)$ , 这里的 4 个系数, 需用以下 4 个边界条件来确定:

$$T \Big|_{x=0} = T_0, \quad T \Big|_{x=0} = T_i, \quad \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{2T}{x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (33)$$

温度分布为

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_0 - T_i} = \left[ 1 - \frac{x}{(t)} \right]^3, \quad (34)$$

其中

$$= \sqrt{24 t} \quad (35)$$

如果用 1 个四次多项式来表示  $T(x, t)$ , 则得到如下的温度分布:

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_0 - T_i} = 1 - 2 \left[ \frac{x}{(t)} \right] + 2 \left[ \frac{x}{(t)} \right]^3 - \left[ \frac{x}{(t)} \right]^4, \quad (36)$$

其中

$$= \sqrt{\frac{40}{3} t} \quad (37)$$

### 4 收敛性和有效性

Liao<sup>[6]</sup>指出,  $h$  值决定了 HAM 解的收敛区域和近似程度。图 1 给出的  $h$  曲线清楚地显示了,  $h$  值的可容许范围为  $-0.19 < h < -0.14$ 。计算表明当  $h = -0.17$  时, 方程(19) 给出的级数在 的整个区域内收敛。

图 2 给出了 HAM、三次曲线积分法、四次曲线积分法及精确解的无量纲温度随 变化的曲线。值得注意的是, HAM 的结果十分接近精确解, 比三次曲线积分法的结果要好。尽管在  $< 1$  时, 三次曲线积分法的结果与精确解很接近, 但是当 增大后, 它就偏离 HAM 和精确解曲线。

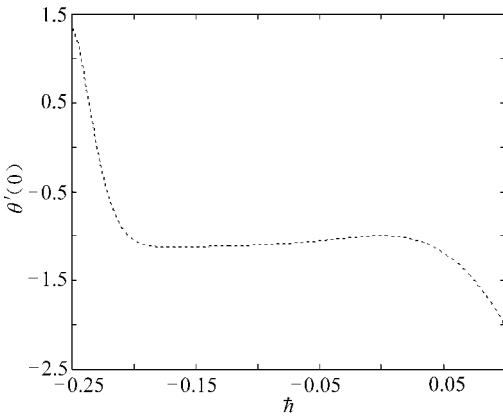
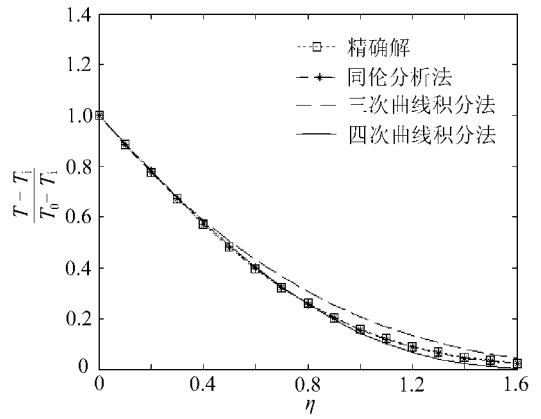
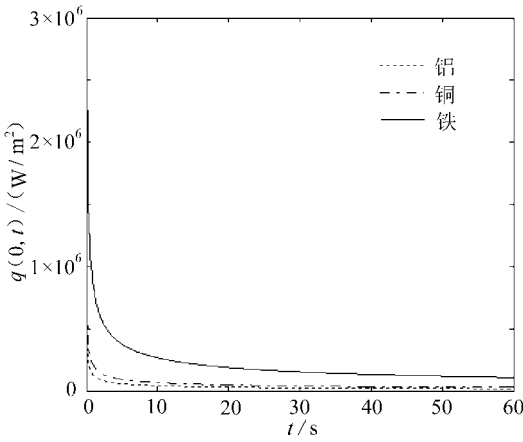
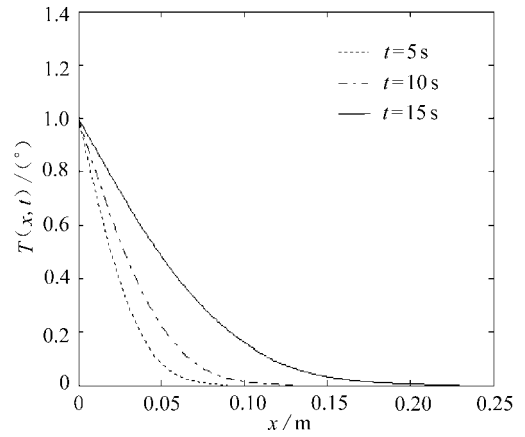
图1 第20阶近似时的 $h_1$ 曲线图2 HAM、三次曲线和四次曲线积分法及精确解中无量纲温度随  $\eta$  的变化图3 铝、铜和铁在  $x = 0$  处的热流量

图4 铝在不同时间的温度分布

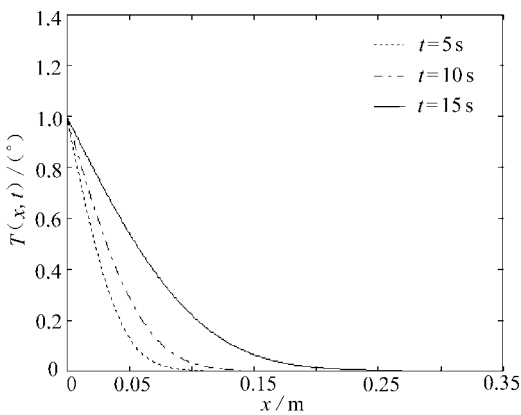


图5 铜在不同时间的温度分布

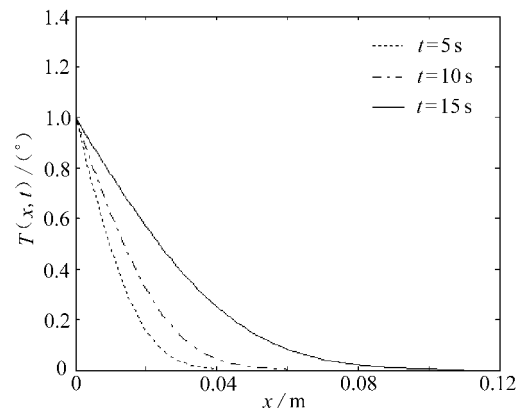


图6 铁在不同时间的温度分布

图3给出了半无限介质  $x = 0$  处热流量随时间的变化。在  $x = 0$  处, 所有时间内铁的热流量均比铝和铜的热流量大。10 s 后, 热流量率以一个斜率连续变化。

图4~6表示铁、铝和铜的温度分布曲线, 通过金属介质, 温度随着降低, 这正是期待的。铁的温度下降速度比铝和铜快得多。仅仅 15 s, 热量就抵达  $x = 0.1$  m 处。因而, 在半无限介

质中, 在相同的时间内, 铁的  $(t)$  值比铝和铜小得多

## 5 结果和讨论

本文通过同伦分析法(HAM) 求解半无限介质(热传导) 方程并与积分法相比较 研究结果表明, HAM 可用于求解各种不同的工程问题 由于使用辅助参数  $h$ , HAM 还具有自适应能力 HAM 求解具有无限边界条件的瞬态热传导问题, 能够得到比积分法更好的近似解 和三次曲线积分法或四次曲线积分法相比, HAM 得到的近似值收敛于精确解 任何时候,  $x = 0$  处铁的热流量大于铝和铜 在同一时间内, 在半无限介质中, 铁的  $(t)$  值小于铝和铜

致谢 作者感谢 Hameh Khanpour 先生对本文的研究工作所提供的大量帮助1

### [参 考 文 献]

- [1] Incropera F P, Dewitt D P. *Introduction to Heat Transfer* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [2] Khaled A- R A. Conduction heat and entropy transfer in a semi- infinite medium and wall with a combined periodic heat flux and convective boundary condition[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2008, 47 (1): 76- 83.
- [3] FANG Tie- gang. Similarity solution for heat conduction in a semi- infinite medium with power law thermal conductivity[J]. *Internat Commun Heat Mass Transfer*, 2004, 31(4): 477- 485.
- [4] Antaki P J. Solution for non- Fourier dual phase lag heat conduction in a semi- infinite slab with surface heat flux[J]. *Internat Commun Heat Mass Transfer*, 1998, 14(41): 2253- 2258.
- [5] Hussain A K, Hussain T A, Shahad Haroun A K. A thermodynamic analysis of non- equilibrium heat conduction in a semi- infinite medium subjected to a step change in temperature[J]. *Energy Conversion and Management*, 2003, 44(8): 1373- 1386.
- [6] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
- [7] Liao S. A new branch of solutions of boundary- layer flows over an impemeable stretched plate[J]. *Internat J Heat Mass Transfer*, 2005, 48(12): 2529- 2539.
- [8] Liao S. Series solutions of unsteady boundary- layer flows over a stretching flat plate[J]. *Stud Appl Math*, 2006, 117: 239- 264.
- [9] Hayat T, Khan M, Ayub M. On the explicit analytic solutions of an old royd 6- constant fluid[J]. *Internat J Eng Sci*, 2004, 42(2): 123- 135.
- [10] Hayat T, Khan M, Ayub M. Couett and Poiseuille flows of an old royd 6- constant fluid with magnetic field [J]. *J Math Anal Appl*, 2004, 298(1): 225- 244.
- [11] Khan T- Hayat M, Asghar S. Homotopy analysis MHD flows of an old royd 8- constant fluid[J]. *Acta Mech*, 2004, 168(1): 213- 232.
- [12] Khan T- Hayat M. Homotopy solutions for generalized second- grade fluid past porous plate[J]. *Nonlinear Dyn*, 2005, 42: 395- 405.
- [13] Mehmood Ahmer, Ali Asif. Analytic solution of generalized three- dimensional flow and heat transfer over a stretching plane wall[J]. *Internat Commun Heat Mass Transfer*, 2006, 33(10): 1243- 1252.
- [14] Abbasbandy S. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer[J]. *Phys, Lett A*, 2006, 360(1): 109- 113.
- [15] Fakhari A, Domairry G. Ebrahimpour, approximate explicit solutions of nonlinear BBMB equations by homotopy

- analysis method and comparison with the exact solution[J]. *Phys Lett A*, 2007, 368(1/2): 64– 68.
- [16] Domairry G, Nadin N. Assessment of homotopy analysis method and homotopy perturbation method in non-linear heat transfer equation[J]. *Internat Commun Heat Mass Transfer*, 2008, 35(1): 93– 102.
- [17] Domairry G, Mohsenzadeh A, Famouri M. The application of homotopy analysis method to solve nonlinear differential equation governing Jeffery– Hamel flow[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(1): 85– 95.
- [18] Ghotbi Abdoul R, Bararnia H, Domairry G, et al. Investigation of a powerful analytical method into natural convection boundary layer flow[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* (in press). Available online 17 August 2008. DOI: 10. 1016/ j. cnsns. 2008. 08. 006
- [19] Rashidi M M, Domairry G, Dinarvand S. Approximate solutions for the Burger and regularized long wave equations by means of the homotopy analysis method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Available online 179 October 2007; 2009, 14(3): 708– 717.
- [20] Domairry G, Fazeli M. Homotopy analysis method to determine the fin efficiency of convective straight fins with temperature– dependent thermal conductivity[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Available online 29 September 2007; 2009, 14(2): 489– 499.

## C O N S I D E R A T I O N O F T R A N S I E N T H E A T C O N D U C T I O N I N A S E M I – I N F I N I T E M E D I U M U S I N G H O M O T O P Y A N A L Y S I S M E T H O D

A. Rezaia, A. Ghorbali, G. Domairry, H. Bararnia

(Department of Mechanical Engineering, Babol Industrial University,  
P. O. Box 484, Babol, Iran)

Abstract: Transient heat conduction in a semi– infinite medium was considered for its many applications in various heat fields. Here, homotopy analysis method (HAM) was applied to solve this problem and analytical results were compared with those of exact and integral methods results. The results show that HAM can give much better approximations than the other approximate methods. Change of heat fluxes and profiles of temperature are obtained in different times and positions for copper, iron and aluminum.

Key words: homotopy analysis method; semi– infinite medium; conduction; transient heat transfer; integral methods; temperature profile