

功能梯度空心及实心圆柱体旋转时的 弹性及粘弹性解*

A·M·任库尔¹, K·A·伊莉莎白², D·S·玛沙特¹

(1. 阿卜杜勒阿齐兹国王大学 理学院 数学系, 80203 邮箱, 吉达 21589, 沙特阿拉伯;
2. 曼苏拉大学 理学院 数学系, 曼苏拉 35516, 埃及)

(郭兴明推荐)

摘要: 逐步分析了旋转的功能梯度空心及实心长圆柱体问题的解. 假设圆柱体的弹性模量和材料密度沿径向呈指数变化, Poisson 比为常数. 由平衡方程、相容方程、弹性变形理论及应力-应变关系, 导出了统一的控制方程. 根据超几何函数, 求解该二阶微分控制方程, 得到旋转功能梯度圆柱体的弹性变形. 检验并讨论了圆柱体中的应力与非均质参数、几何、边界条件之间的相互关系. 将旋转功能梯度空心及实心圆柱体的分析结果, 与旋转均质各向同性圆柱体的结果进行了对比分析. 同时, 提出了旋转粘弹性圆柱体的粘弹性解, 并验证了空心及实心圆柱体中应力与时间参数间的依赖关系.

关键词: 旋转; 空心圆柱体; 实心轴; 功能梯度材料

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

引 言

近年来出现的功能梯度材料(FGMs), 在材料科学和应用力学界引起了日益广泛的研究兴趣. FGM 的力学特性, 例如材料密度和弹性系数, 在适当位置是非均质并连续可变. FGM 可以广泛地应用于工程结构及其部件. FGM 概念中许多内在可能性的应用, 材料性能得到了预期的改善, 新的功能得到创新.

1984 年日本的许多科学家首先介绍了这种新材料^[1], 多个研究 FG 结构性能^[2-7]的分析得以完成. 由于在机械工程中有着很大的实用价值, 对旋转环状圆盘或圆柱体的理论和实验研究引起了广泛的注意. 旋转环状圆盘或圆柱体的问题在各种各样有趣的假定下得到了解决, 该话题在大多数标准的弹性力学教材中很容易找到^[8-9]. 文献中很少见到旋转 FG 空心及实心圆柱体问题. 大多数的研究工作都集中在旋转的各向同性圆柱体, 或者横截面几何简单(相同厚度或者特定的变厚度)的圆盘上. 很多研究者得到具有常/变厚度(以及/密度)的旋转实心盘和环状圆盘的解析解^[10-14]. 在 Zenkour 和 Allam^[15] 新近的一篇文章中, 对厚度连续

* 收稿日期: 2008-05-14; 修订日期: 2008-07-15

作者简介: A·M·Zenkour, 教授, 博士(联系人, 永久通讯址: 卡夫西克大学 教育学院数学系, 曼苏拉 33516, 埃及; E-mail: zenkour@gmail.com; zenkour@kau.edu.sa).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

变化、截面形状任意的旋转粘弹性实心及环状盘, 逐步分析了其变形和应力的解析解. 对在各种边界条件下不同的旋转圆盘问题, 一些研究者得到了若干有价值的结果^[16-18]. Zenkour^[19]研究了各种边界条件下, 梯度呈指数变化的旋转圆盘问题. 为了更好地利用这种材料, 在圆柱体的一个方向上, 允许这种高效材料的特性和密度变化是必要的. 这样的功能梯度圆柱体的旋转分析, 在文献资料中很少报道. 大多数研究者致力于变厚度/密度的实心盘和环状盘的研究. 在少数关于盘和圆柱体的研究中, 已经注意到了功能梯度材料的行为特性. Horgan 和 Chan^[20-21]研究了受压 FGM 空心圆柱体和圆盘的问题, 以及 FGM 各向同性线弹性旋转圆盘的应力响应. Tam^[22]得到了在恒定热及机械荷载作用下, FG 各向异性圆柱体问题的精确解. Rooney 和 Ferrar^[23]研究了具有 FG 横截面的圆柱体的拉伸、弯曲和屈曲问题.

本研究的目的是, 获得旋转 FG 空心及实心圆柱体完全弹性变形和粘弹性变形的相容解. 文章主要讨论了空心轴或长圆柱体和长实心轴这样两类问题, 获得了封闭解, 并介绍了其数值结果, 包括均质和 FG 组合圆柱体的径向、周向和轴向应力, 获得了沿径向的应力分布, 还获得了在同样角速度下均质材料和 FG 材料间的比较结果.

1 基本方程

复合薄圆盘旋转问题是一个忽略轴向应力 $\sigma_z = 0$ 的平面应力问题, 它也可以看作一个平面应变问题来处理. 一个沿圆轴均匀旋转或者一个圆柱体常常被看作平面应变问题. 让我们来考虑一个复合空心或者实心圆柱体, 就其圆心以常角速度 ω 旋转的轴对称问题, 复合圆柱体边界自由. 我们将只关心轴对称的变形, 因此唯一的位移分量是 u_r , z 是旋转轴. 用惯性项代替体力项, 平衡方程归结为单个方程

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0, \quad (1)$$

其中, r 是极坐标, σ_r 和 σ_θ 分别是径向应力和周向应力, h 是厚度, ρ 是旋转复合圆柱体的材料密度. 由复合材料组成的圆柱体, 跨过不连续层界面的材料性能将发生突然改变, 结果产生巨大的层间应力并导致分层. 解决这些不利影响的一个方法是应用 FGMs, 即不同种类的材料却具有连续变化的材料特性. 本文研究的复合圆柱体是具有同一厚度的单独一层 FGM. 假设圆柱体的材料特性沿着径向变化, 圆柱体的弹性模量和密度按简单的指数规律分布如下:

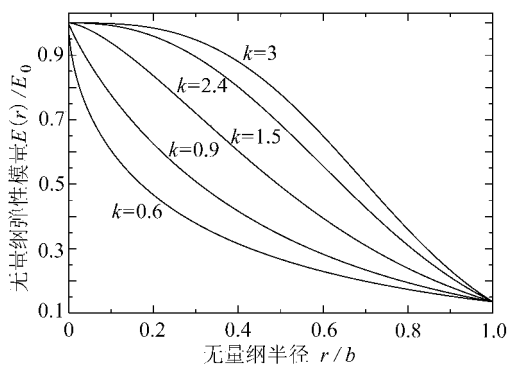
$$\{E(r), \rho(r)\} = \{E_0, \rho_0\} e^{-n(r/b)^k}, \quad (2)$$

其中, E_0 和 ρ_0 分别是匀质旋转圆柱体的弹性模量和密度, n 和 k 是几何参数, b 是 FGM 圆柱体的外径, n 值等于 0 代表完全均质的圆柱体. 上述的指数分布假设, 仅仅反映了沿径向混合应用的一个简单规律. 幂指数 k 可以变化, 以得到圆柱体沿径向材料成分的不同分布. 例如, 图 1 给出了 n 和 k 对沿径向的无量纲弹性模量 $E(r)/E_0$ 的影响. 对无量纲密度 $\rho(r)/\rho_0$ 它同样适用. 图 1 表明, 在相同的位置上 ($0 < r < b$), 无量纲弹性模量(或密度), 当 n 不变时它随着 k 的增大而增大, 当 k 不变时它随着 n 的减小而增大.

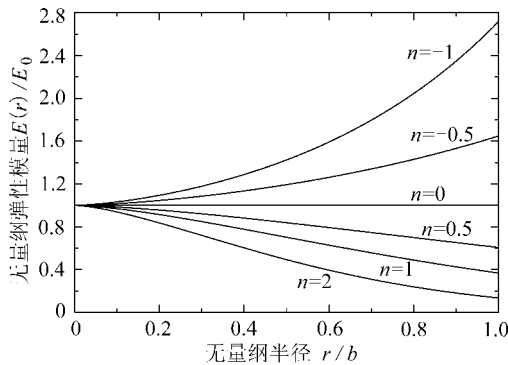
径向位移 u_r 和应变之间的关系与旋转 FGM 圆柱体的厚度和密度无关, 它们可以写成

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

其中, ε_r 、 ε_θ 、 ε_z 分别为径向、周向和轴向的应变. 上述几何关系满足下列变形协调条件, 即相容方程



(a) $n = 2$ 时随 k 值的变化



(b) $k = 1.5$ 时随 n 值的变化

图 1 旋转 FG 圆柱体无量纲弹性模量 $E(r)/E_0$ 径向变化情况

$$\frac{d}{dr}(r \Theta) - \varepsilon = 0. \tag{4}$$

对于弹性变形, FGM 圆柱体的应力应变关系(本构方程), 根据 Hooke 定理可以写为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \Theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E(r)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \Theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

对于平面应变问题 ($\varepsilon_z = 0$), 有

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \Theta), \tag{6}$$

因此, 方程(5)变为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \Theta \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E(r)} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \Theta \end{Bmatrix}. \tag{7}$$

2 弹性解

将上述 ε 和 Θ 表达式代入相容方程(4), 得到

$$\left[1 - \nu + \nu kn \left(\frac{r}{b}\right)^k\right] \sigma_r - \left[\nu + kn(1 - \nu) \left(\frac{r}{b}\right)^k\right] \Theta = \frac{d}{dr} \left[(1 - \nu) r \Theta - \nu \sigma_r \right]. \tag{8}$$

将 $\sigma_r = y(r)/r$ 代入方程(1), 得到 Θ 为

$$\Theta = \frac{dy}{dr} + \rho \omega^2 r^2. \tag{9}$$

将 σ_r 和 Θ 代入方程(8)得到

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \left[1 + kn \left(\frac{r}{b}\right)^k\right] \frac{dy}{dr} - \left[1 + \frac{\nu kn}{1 - \nu} \left(\frac{r}{b}\right)^k\right] y + \frac{(3 - 2\nu)\rho \omega^2 r^3}{(1 - \nu)e^{n(r/b)^k}} = 0. \tag{10}$$

引进下列无量纲量:

$$\begin{cases} r = \frac{r}{b}, \quad \Omega = \omega^2 b^2 \rho_0 \\ Y(r) = \frac{1}{b\Omega} y(r), \quad (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\Omega} (\sigma_r, \Theta, \sigma_z). \end{cases} \tag{11}$$

那么, 方程(10)可以写成下式:

$$r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} + r \left[1 + knr^k\right] \frac{dY}{dr} - \left[1 + \frac{\nu kn}{1 - \nu} r^k\right] Y + \frac{(3 - 2\nu)r^3}{(1 - \nu)e^{nr^k}} = 0. \tag{12}$$

上述方程的通解可以写成

$$Y(r) = AY_1(r) + BY_2(r) + Y_p(r), \quad (13)$$

其中, A 和 B 为任意常数, 且

$$\begin{cases} Y_1(r) = r e^{-nr^k} H([\alpha], [\beta], nr^k), \\ Y_2(r) = \frac{e^{-nr^k}}{r} H([\alpha - \beta + 1], [2 - \beta], nr^k), \end{cases} \quad (14)$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{k(1-\nu)}, \quad \beta = 1 + \frac{2}{k}.$$

函数 $H([\alpha], [\beta], z)$ 是广义的超几何函数,

$$H([\alpha], [\beta], z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_q}{(\beta)_q} \frac{z^q}{q!}, \quad (15)$$

其中, $(\nu)_q$ 是 Pochhammer 符号, 写成

$$(\nu)_q = \nu(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+q-1) = \frac{\Gamma(\nu+q)}{\Gamma(\nu)}, \quad (16)$$

其中, Γ 表示 Gamma 函数.

方程(13)中的特解 Y_p 可以通过参量变异得到

$$Y_p(r) = Y_1(r)P_1(r) + Y_2(r)P_2(r), \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} P_1(r) = - \int_0^r \frac{Y_2(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi \\ P_2(r) = \int_0^r \frac{Y_1(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi \end{cases} \quad (18)$$

这里

$$f(r) = - \frac{(3-2\nu)r}{(1-\nu)e^{nr^k}}, \quad (19)$$

且 $\Delta(r)$ 为 Wronskian 矩阵, 给出如下:

$$\Delta(r) = Y_1(r) \frac{dY_2(r)}{dr} - Y_2(r) \frac{dY_1(r)}{dr}. \quad (20)$$

因此

$$Y_p(r) = \frac{3-2\nu}{(1-\nu)e^{nr^k}} \left[rH_1(r) \int_0^r \frac{\xi H_2(\xi)}{F(\xi)} d\xi - \frac{H_2(r)}{r} \int_0^r \frac{\xi^3 H_1(\xi)}{F(\xi)} d\xi \right], \quad (21)$$

其中

$$F(r) = r \left[H_1(r) \frac{dH_2(r)}{dr} - H_2(r) \frac{dH_1(r)}{dr} \right] - 2H_1(r)H_2(r), \quad (22)$$

这里

$$H_1(r) = H([\alpha], [\beta], nr^k), \quad H_2(r) = H([\alpha - \beta + 1], [2 - \beta], nr^k). \quad (23)$$

最后, 方程(12)的精确通解为

$$Y(r) = Y_1(r)[A + F_1(r)] + Y_2(r)[B - F_2(r)], \quad (24)$$

其中

$$F_1(r) = \frac{3-2\nu}{1-\nu} \int_0^r \frac{\xi H_2(\xi)}{F(\xi)} d\xi, \quad F_2(r) = \frac{3-2\nu}{1-\nu} \int_0^r \frac{\xi^3 H_1(\xi)}{F(\xi)} d\xi. \quad (25)$$

显然, 使用下列表达式:

$$\sigma_1 = \frac{Y(r)}{r}, \quad \sigma_2 = \frac{dY}{dr} + r^2 e^{-nr^k}, \quad \sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (26)$$

可以很容易获得无量纲应力, 因此,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{e^{nr^k}} \left\{ H_1(A + F_1) + \frac{H_2}{r^2}(B - F_2) \right\}, \\ \sigma_2 = \frac{1}{e^{nr^k}} \left\{ H_1 \left[(1 - nkr^k)(A + F_1) + r \frac{dF_1}{dr} \right] + r \frac{dH_1}{dr}(A + F_1) - \right. \\ \left. \frac{H_2}{r^2} \left[(1 + nkr^k)(B - F_2) + r \frac{dF_2}{dr} \right] + \frac{1}{r} \frac{dH_2}{dr}(B - F_2) + r^2 \right\}, \\ \sigma_3 = \frac{\nu}{e^{nr^k}} \left\{ H_1 \left[(2 - nkr^k)(A + F_1) + r \frac{dF_1}{dr} \right] + r \frac{dH_1}{dr}(A + F_1) - \right. \\ \left. \frac{H_2}{r^2} \left[nkr^k(B - F_2) + r \frac{dF_2}{dr} \right] + \frac{1}{r} \frac{dH_2}{dr}(B - F_2) + r^2 \right\}. \end{cases} \quad (27)$$

另外, 令 $n = 0$ 可以得到完全匀质圆柱体的解, 这时有 $H_1 = H_2 = 1, F = -2$, 且

$$F_1(r) = -\frac{(3 - 2\nu)r^2}{4(1 - \nu)}, \quad F_2(r) = -\frac{(3 - 2\nu)r^4}{8(1 - \nu)}, \quad (28)$$

那么

$$Y(r) = Ar + \frac{B}{r} - \frac{(3 - 2\nu)r^3}{8(1 - \nu)}, \quad (29)$$

及

$$\begin{cases} \sigma_1(r) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{(3 - 2\nu)r^2}{8(1 - \nu)}, \\ \sigma_2(r) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{(1 + 2\nu)r^2}{8(1 - \nu)}, \\ \sigma_3(r) = \nu \left[2A - \frac{r^2}{2(1 - \nu)} \right]. \end{cases} \quad (30)$$

上述解就是熟知的旋转均匀各向同性圆柱体的解.

2.1 旋转空心圆柱体的弹性解

FG 空心圆柱体的弹性解可应用边界条件求得. 在 FG 空心圆柱体的内径和外径处, 即 $r = a$ 和 $r = b$ 时, $\sigma_r = 0$ (或 $r = a$ 和 $r = 1$ 时, $\sigma_1 = 0$), 其中 a 为圆柱体内径, $a = a/b$, 因此有

$$\begin{cases} A = [a^2 H_1(a) H_2(1) F_1(a) - \\ H_2(a) \{ H_1(1) F_1(1) + H_2(1) [F_2(a) - F_2(1)] \}] / [a^2 H_1(a) H_2(1) - \\ H_1(1) H_2(a)], \\ B = [a^2 H_1(a) \{ H_2(1) F_2(1) + H_1(1) [F_1(a) - F_1(1)] \} - \\ H_1(1) H_2(a) F_2(a)] / [a^2 H_1(a) H_2(1) - H_1(1) H_2(a)]. \end{cases} \quad (31)$$

将这些常数代入方程(27), 便得到旋转 FG 的空心轴或圆柱体的应力.

对于均匀各向同性空心圆柱体, 有

$$A = \frac{(3 - 2\nu)(a^2 + 1)}{8(1 - \nu)}, \quad B = -\frac{(3 - 2\nu)a^2}{8(1 - \nu)}. \quad (32)$$

因此, 方程(30)变为

$$\begin{cases} \sigma_1(r) = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \left[1 + a^2 \left\{ 1 - \frac{1}{r^2} \right\} - r^2 \right], \\ \sigma_2(r) = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \left[1 + a^2 \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} \right\} - \frac{(1+2\nu)r^2}{3-2\nu} \right], \\ \sigma_3(r) = \frac{\nu(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \left[1 + a^2 - \frac{2r^2}{3-2\nu} \right]. \end{cases} \quad (33)$$

需要说明的是, 周向应力 σ_2 在圆柱内径($r = a$) 有最大值, 其值为

$$(\sigma_2)_{\max} = \frac{\nu(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \left[2 + a^2 \left\{ 1 - \frac{1+2\nu}{3-2\nu} \right\} \right]. \quad (34)$$

2.2 旋转实心圆柱体的弹性解

对于一个长实心轴或圆柱体来说, 常数 B 必须等于 0, 否则当 $r = 0$ 时应力为无穷大, 另一个边界条件, 利用旋转 FG 空心圆柱体外径, 即圆柱体外缘 $r = b$ (或 $r = 1$) 的径向应力为 0, 有

$$A = \frac{H_2(1)F_2(1) - H_1(1)F_1(1)}{H_1(1)}. \quad (35)$$

将上述常数代入方程(27), 得到

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{e^{nr^k}} \left\{ H_1(r) \left[\frac{H_2(1)F_2(1) - H_1(1)F_1(1)}{H_1(1)} + F_1(r) \right] - \frac{H_2(r)F_2(r)}{r^2} \right\}, \\ \sigma_2 = \frac{1}{e^{nr^k}} \left\{ H_1(r) \left[(1 - nkr^k) \left(\frac{H_2(1)F_2(1) - H_1(1)F_1(1)}{H_1(1)} + F_1(r) \right) + r \frac{dF_1}{dr} \right] + \right. \\ \left. r \frac{dH_1}{dr} \left[\frac{H_2(1)F_2(1) - H_1(1)F_1(1)}{H_1(1)} + F_1(r) \right] - \frac{1}{r} \frac{dH_2}{dr} F_2(r) + r^2 + \right. \\ \left. \frac{H_2(r)}{r^2} \left[(1 + nkr^k) F_2(r) - r \frac{dF_2}{dr} \right] \right\}, \\ \sigma_3 = \frac{\nu}{e^{nr^k}} \left\{ H_1(r) \left[(2 - nkr^k) \left(\frac{H_2(1)F_2(1) - H_1(1)F_1(1)}{H_1(1)} + F_1(r) \right) + r \frac{dF_1}{dr} \right] + \right. \\ \left. r \frac{dH_1}{dr} \left[\frac{H_2(1)F_2(1) - H_1(1)F_1(1)}{H_1(1)} + F_1(r) \right] - \frac{1}{r} \frac{dH_2}{dr} F_2(r) + r^2 + \right. \\ \left. \frac{H_2(r)}{r^2} \left[nkr^k F_2(r) - r \frac{dF_2}{dr} \right] \right\}, \end{cases} \quad (36)$$

对于均匀各向同性实心圆柱体, 有

$$A = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}. \quad (37)$$

因此, 方程(30)

$$\begin{cases} \sigma_1(r) = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} (1 - r^2), \\ \sigma_2(r) = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \left[1 - \frac{(1+2\nu)r^2}{3-2\nu} \right], \\ \sigma_3(r) = \frac{\nu(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \left[1 - \frac{2r^2}{3-2\nu} \right]. \end{cases} \quad (38)$$

在 $r = 0$ 时, 径向和周向的应力相同, 为

$$(\sigma_1)_{\max} = (\sigma_2)_{\max} = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}. \quad (39)$$

3 算例及讨论

在大多数关于实心及环形圆盘的文献中, 获得的数值结果用图形显示了沿径向的应力和位移分布, 没有任何列表结果, 以便作进一步的比较. 本节将给出旋转 FG 实心的和空心的圆柱体的算例, 有些用于进一步的比较, 另一些用图形绘出. 作者的研究结果在表 1~ 6 中给出, 并以图 2~ 7 显示. Poisson 比取值 $\nu = 0.3$, 对于空心圆柱体, $\alpha = 0.2$.

表 1 旋转 FG 空心圆柱体随参数 n 变化时的无量纲径向应力 $\sigma_1(k = 1.5)$

r	n								
	- 2.0	- 1.5	- 1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.3	0.542 952	0.434 305	0.345 445	0.273 786	0.216 667	0.171 548	0.136 134	0.108 442	0.086 818
0.4	0.744 916	0.582 598	0.452 672	0.350 083	0.270 000	0.208 046	0.160 431	0.123 988	0.096 151
0.5	0.828 464	0.631 872	0.478 381	0.360 111	0.270 000	0.201 966	0.150 956	0.112 892	0.084 570
0.6	0.841 991	0.624 216	0.459 071	0.335 403	0.243 810	0.176 591	0.127 618	0.092 134	0.066 519
0.7	0.790 541	0.567 519	0.404 046	0.285 621	0.200 729	0.140 421	0.097 899	0.068 093	0.047 296
0.8	0.658 826	0.456 068	0.313 159	0.213 488	0.144 643	0.097 495	0.065 442	0.043 784	0.029 222
0.9	0.413 827	0.274 983	0.181 385	0.118 846	0.077 407	0.050 158	0.032 360	0.020 802	0.013 332
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表 2 旋转 FG 实心圆柱体随参数 n 变化时的无量纲径向应力 $\sigma_1(k = 1.5)$

r	n								
	- 2.0	- 1.5	- 1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.0	1.078 692	0.857 255	0.679 479	0.538 768	0.428 571	0.342 880	0.276 495	0.225 104	0.185 244
0.1	1.085 521	0.859 547	0.678 640	0.535 836	0.424 286	0.337 754	0.270 873	0.219 215	0.179 233
0.2	1.092 243	0.857 937	0.671 470	0.525 116	0.411 429	0.323 721	0.256 303	0.204 515	0.164 657
0.3	1.093 371	0.848 614	0.655 631	0.505 538	0.390 000	0.301 682	0.234 433	0.183 284	0.144 329
0.4	1.083 673	0.827 827	0.628 788	0.476 028	0.360 000	0.272 516	0.206 848	0.157 649	0.120 777
0.5	1.055 886	0.790 642	0.588 030	0.435 319	0.321 429	0.237 149	0.175 106	0.129 567	0.096 171
0.6	0.999 245	0.730 268	0.529 627	0.381 902	0.274 286	0.196 529	0.140 680	0.100 726	0.072 205
0.7	0.897 484	0.637 238	0.448 776	0.313 982	0.218 571	0.151 602	0.104 900	0.072 487	0.050 065
0.8	0.725 806	0.498 273	0.339 281	0.229 436	0.154 286	0.103 292	0.068 918	0.045 870	0.030 477
0.9	0.446 187	0.294 673	0.193 139	0.125 758	0.077 407	0.050 158	0.032 360	0.020 802	0.013 332
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

旋转 FG 空心及实心圆柱体的无量纲径向应力 σ_1 分别在表 1、表 2 中给出, 表 3~ 6 分别给出了环向应力 σ_2 和轴向应力 σ_3 相似的结果, 这些结果都是在 $k = 1.5$, 参数 n 取不同值时得到的. 对于 FG 空心及实心圆柱体, 无论 r 值如何变化, 径向应力 σ_1 随着 n 的减小而增大, 当然边界处除外. 对于 FG 空心圆柱体的周向应力 σ_2 , 当 $r < 0.7$ 时它随着 n 的减小而增大, 当 $r > 0.7$ 时它随着 n 的增大而增大, 当 $r = 0.7$ 时, σ_2 不再随 n 值单调减小, 当 $n = 0$ 即匀质实心圆柱体时, 有一个最小值. 对于 FG 实心圆柱体的周向应力 σ_2 , 当 $r < 0.6$ 时它随着 n 的减小而增大, 当 $r > 0.6$ 时它随着 n 的增大而增大. 轴向应力 σ_3 的结果具有与 σ_2 相同的特性.

表 3 旋转 FG 空心圆柱体随参数 n 变化时的无量纲周向应力 $\sigma_2(k = 1.5)$

r	n								
	- 2.0	- 1.5	- 1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.2	1.926 291	1.580 636	1.292 315	1.055 320	0.862 857	0.708 012	0.584 240	0.485 681	0.407 295
0.3	1.544 114	1.225 152	0.969 695	0.767 946	0.610 476	0.488 711	0.395 199	0.323 710	0.269 186
0.4	1.418 312	1.088 947	0.837 280	0.647 841	0.507 143	0.403 870	0.328 840	0.274 818	0.236 240
0.5	1.305 805	0.971 057	0.730 341	0.560 472	0.442 857	0.363 011	0.309 958	0.275 583	0.254 014
0.6	1.094 897	0.791 703	0.592 986	0.467 031	0.390 476	0.346 570	0.323 616	0.313 658	0.311 420
0.7	0.667 186	0.481 297	0.386 861	0.347 900	0.340 700	0.350 190	0.367 194	0.386 414	0.405 010
0.8	- 0.151 006	- 0.048 389	0.071 782	0.187 818	0.289 643	0.373 958	0.441 100	0.493 093	0.532 530
0.9	- 1.636 855	- 0.923 055	- 0.402 068	- 0.028 441	0.235 450	0.419 415	0.546 249	0.632 886	0.691 611
1.0	- 4.242 848	- 2.327 992	- 1.100 050	- 0.317 863	0.177 143	0.488 503	0.683 275	0.804 525	0.879 692

表 4 旋转 FG 实心圆柱体随参数 n 变化时的无量纲周向应力 $\sigma_2(k = 1.5)$

r	n								
	- 2.0	- 1.5	- 1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.0	1.078 692	0.857 255	0.679 479	0.538 768	0.428 571	0.342 880	0.276 495	0.225 104	0.185 244
0.1	1.103 499	0.870 683	0.685 103	0.539 217	0.425 714	0.338 008	0.270 476	0.218 507	0.178 432
0.2	1.141 637	0.888 127	0.689 171	0.535 151	0.417 143	0.327 364	0.259 338	0.207 860	0.168 867
0.3	1.173 503	0.895 553	0.682 894	0.522 484	0.402 857	0.314 421	0.249 459	0.201 953	0.167 317
0.4	1.174 495	0.875 696	0.655 770	0.496 511	0.382 857	0.302 822	0.247 175	0.208 987	0.183 166
0.5	1.105 681	0.803 362	0.593 637	0.451 375	0.357 143	0.296 388	0.258 513	0.235 982	0.223 542
0.6	0.903 833	0.641 164	0.477 294	0.379 840	0.325 714	0.298 949	0.288 814	0.288 297	0.292 943
0.7	0.465 757	0.333 465	0.280 738	0.273 037	0.288 571	0.314 215	0.342 498	0.369 499	0.393 421
0.8	- 0.377 373	- 0.202 628	- 0.031 197	0.120 158	0.245 714	0.345 665	0.422 959	0.481 480	0.525 091
0.9	- 1.902 130	- 1.090 781	- 0.506 050	- 0.091 915	0.197 143	0.396 470	0.532 563	0.624 733	0.686 749
1.0	- 4.562 981	- 2.515 807	- 1.208 100	- 0.379 073	0.142 857	0.469 442	0.672 720	0.798 688	0.876 461

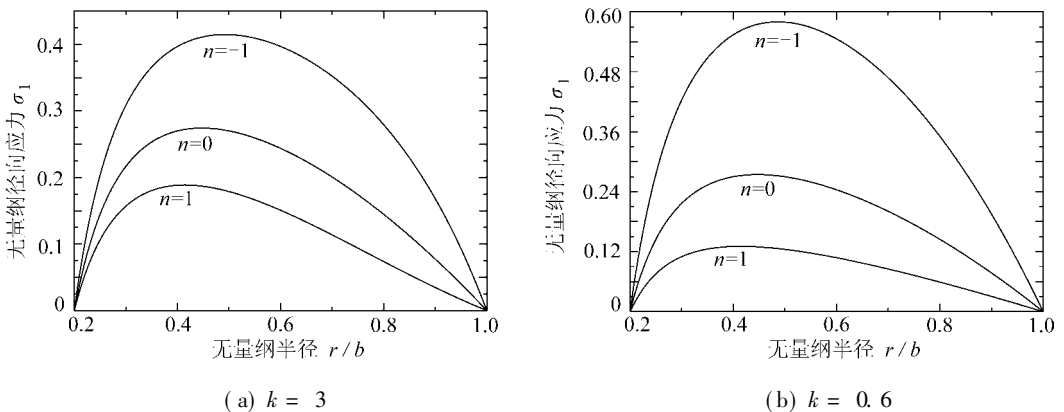
表 5 旋转 FG 空心圆柱体随参数 n 变化时的无量纲轴向应力 $\sigma_3(k = 1.5)$

r	n								
	- 2.0	- 1.5	- 1.0	- 0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.2	0.577 887	0.474 191	0.387 695	0.316 596	0.258 857	0.212 404	0.175 272	0.145 704	0.122 189
0.3	0.626 120	0.497 837	0.394 542	0.312 519	0.248 143	0.198 078	0.159 400	0.129 645	0.106 801
0.4	0.648 969	0.501 463	0.386 986	0.299 377	0.233 143	0.183 575	0.146 781	0.119 642	0.099 717
0.5	0.640 281	0.480 879	0.362 617	0.276 175	0.213 857	0.169 493	0.138 274	0.116 542	0.101 575
0.6	0.581 066	0.424 776	0.315 617	0.240 730	0.190 286	0.156 984	0.135 370	0.121 738	0.113 382
0.7	0.437 318	0.314 645	0.237 272	0.190 056	0.162 429	0.147 183	0.139 528	0.136 352	0.135 692
0.8	0.152 346	0.122 304	0.115 482	0.120 392	0.130 286	0.141 436	0.151 963	0.161 063	0.168 526
0.9	- 0.366 908	- 0.194 422	- 0.066 205	0.027 121	0.093 857	0.140 872	0.173 583	0.196 106	0.211 483
1.0	- 1.272 854	- 0.698 398	- 0.330 015	- 0.095 359	0.053 143	0.146 551	0.204 982	0.241 357	0.263 908

表 6 旋转 FG 实心圆柱体随参数 n 变化时的无量纲轴向应力 $\sigma_3(k = 1.5)$

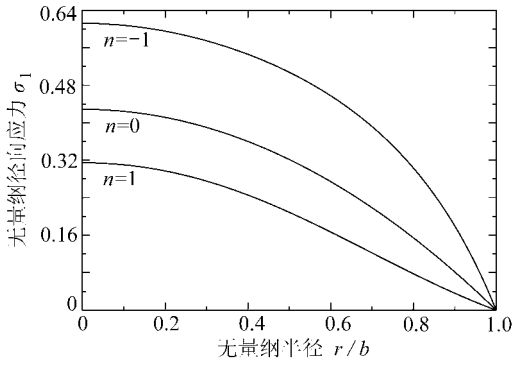
r	n								
	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.0	0.647 215	0.514 353	0.407 687	0.323 261	0.257 143	0.205 728	0.165 897	0.135 062	0.111 146
0.1	0.656 706	0.519 089	0.409 123	0.322 516	0.255 000	0.202 728	0.162 405	0.131 317	0.107 300
0.2	0.670 164	0.523 819	0.408 192	0.318 080	0.248 571	0.195 326	0.154 692	0.123 713	0.100 057
0.3	0.680 062	0.523 250	0.401 557	0.308 407	0.237 857	0.184 831	0.145 168	0.115 571	0.093 494
0.4	0.677 450	0.511 057	0.385 367	0.291 762	0.222 857	0.172 602	0.136 207	0.109 991	0.091 183
0.5	0.648 470	0.478 201	0.354 500	0.266 008	0.203 571	0.160 061	0.130 086	0.109 664	0.095 914
0.6	0.570 924	0.411 430	0.302 076	0.228 523	0.180 000	0.148 643	0.128 848	0.116 707	0.109 544
0.7	0.408 969	0.291 211	0.218 854	0.176 106	0.152 143	0.139 745	0.134 219	0.132 596	0.133 046
0.8	0.104 530	0.088 694	0.092 425	0.104 878	0.120 000	0.134 687	0.147 563	0.158 205	0.166 671
0.9	-0.436 783	-0.238 832	-0.093 873	0.010 153	0.083 571	0.134 685	0.169 878	0.193 891	0.210 157
1.0	-1.368 894	-0.754 742	-0.362 430	-0.113 722	0.042 857	0.140 833	0.201 816	0.239 606	0.262 938

在图 2~7 中, 绘出了旋转 FG 空心及实心圆柱体在 $k = 0.6, 3$ 和 $n = -1, 0, 1$ 时无量纲应力与 r 的关系曲线. 当 $n = -1$ 时, 图 2、图 3 显示了 $k = 0.6$ 时的径向应力 σ_1 比 $k = 3$ 时的大; 而当 $n = 1$ 时, $k = 3$ 时的 σ_1 比 $k = 0.6$ 时的大. 对于 FG 实心圆柱体, σ_1 随着 r 单调减小, 并在 $r = 0$ 时出现最大值; 而当 $k = 0.6, n = -1$ 时, σ_1 不再随 r 而单调增大, 并在 $r = 0.2$ 时有一个的最大值(见图 3b).

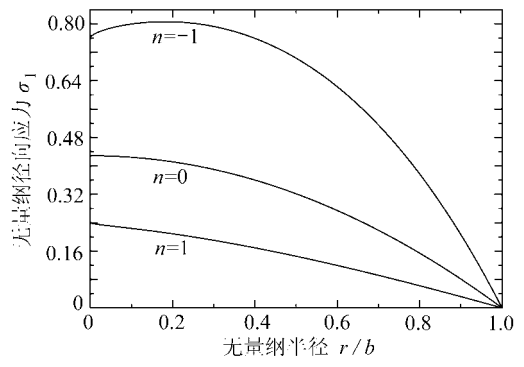
图 2 旋转 FG 空心圆柱体无量纲径向应力 σ_1 随参数 n 变化时的径向分布情况

如式(34)、式(39)所述, 实心的和空心的均匀圆柱体的周向应力 σ_2 的最大值, 分别在 $r = 0$ 和 $r = 0.2$ 时出现(见图 4、图 5). 当 $n = -1$ 时, 和 $n = 0$ 时一样, σ_2 随着 r 的变化而减小, 并在相同位置出现最大值. 对于 FG 实心圆柱体来说有一个例外, 当 $k = 0.6$ 时, σ_2 在 $r = 0.2$ 处时出现最大值(见图 5(b)). 此外, 当 $n = 1$ 时, 周向应力 σ_2 不再随 r 单调减小, 并有一个最小值. 可以发现, 最大周向应力 σ_2 出现在 FGM 圆柱体的外表面上.

最后, 由图 6、图 7 可见, 旋转 FGM 圆柱体的轴向应力有着与周向应力相同的特性, 当 $k = 0.6, n = -1$ 时, 轴向应力 σ_3 并不随 r 而单调增大, $r = 0.3$ 时 FG 空心圆柱体有一个最大值(见图 6(b)), $r = 0.2$ 时 FG 实心圆柱体有一个最大值(见图 7(b)). 当 $k = 3, n = -1$ 时, 正如图 6(a)、图 7(a) 所示, σ_3 随 r 变化而减小, $r = 0$ 时 FG 实心圆柱体有最大值, 对于 FG 空心圆柱体

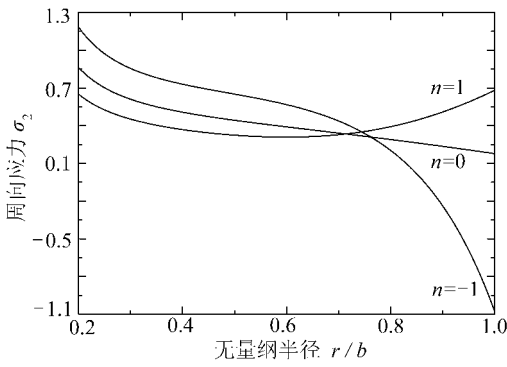


(a) $k = 3$

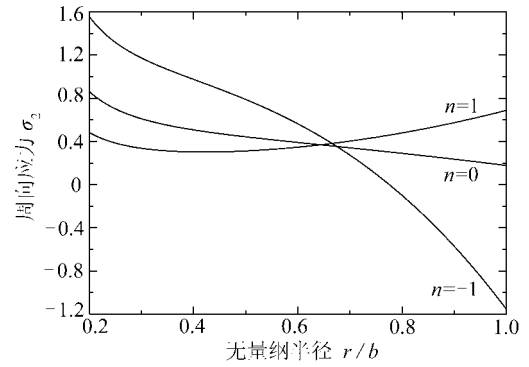


(b) $k = 0.6$

图 3 旋转 FG 实心圆柱体无量纲径向应力 σ_1 随参数 n 变化时的径向分布情况

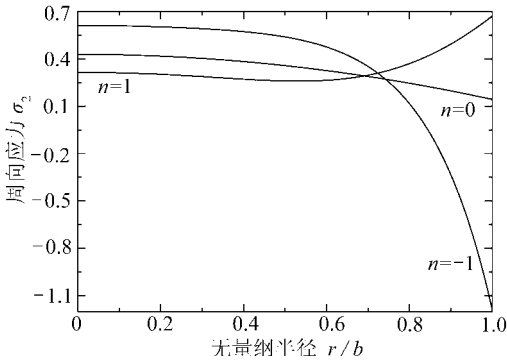


(a) $k = 3$

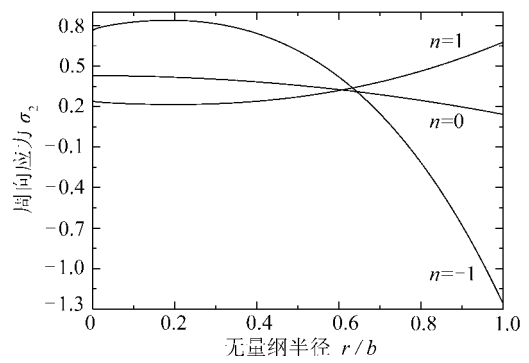


(b) $k = 0.6$

图 4 旋转 FG 空心圆柱体无量纲周向应力 σ_2 随参数 n 变化时的径向分布情况



(a) $k = 3$



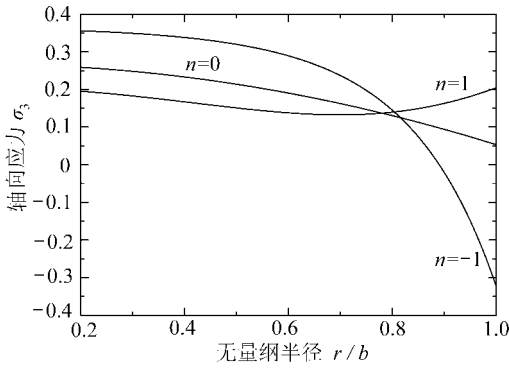
(b) $k = 0.6$

图 5 旋转 FG 实心圆柱体无量纲周向应力 σ_2 随参数 n 变化时的径向分布情况

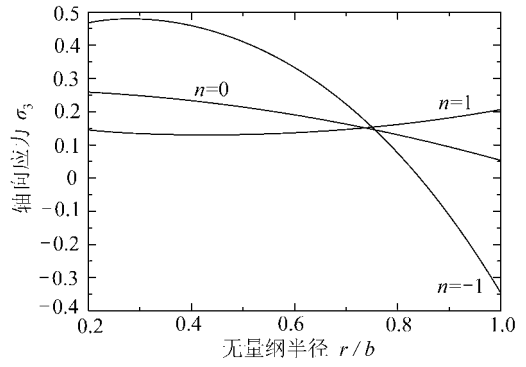
来说, 在内表面处有最大值. 可以发现, 当 $n = -1, k$ 为任意值时, 最小的周向应力和轴向应力出现在 FGM 圆柱体的外表面.

4 粘弹性解

这里, 考虑用粘弹性材料做成圆柱体的第一组分, 用单向弹性纤维作为第二组分(r 方向) 进行增强. 第一组分担当填充物的角色, 具有线性各向同性粘弹性材料的特性, 并以模量 E_v

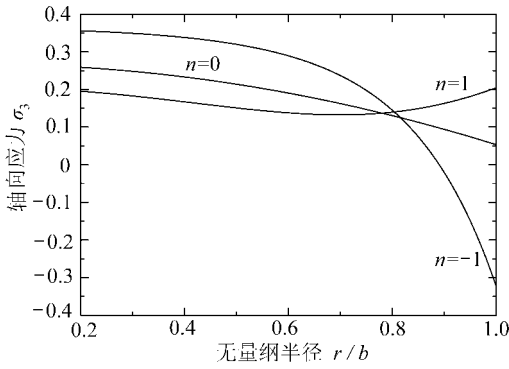


(a) $k = 3$

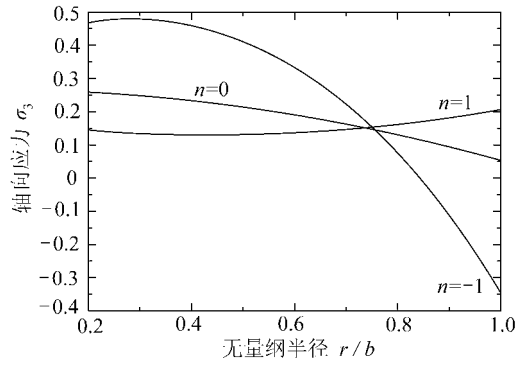


(b) $k = 0.6$

图 6 旋转 FG 空心圆柱体无量纲轴向应力 σ_3 随参数 n 变化时的径向分布情况



(a) $k = 3$



(b) $k = 0.6$

图 7 旋转 FG 实心圆柱体无量纲轴向应力 σ_3 随参数 n 变化时的径向分布情况

和 Poisson 比 ν_v 表示. 另一部分作为增强材料, 用弹性模量 E_e 和 Poisson 比 ν_e 的弹性材料. 因此, 粘弹性模量给出如下:

$$E_v = \frac{9K \omega}{2 + \omega} \tag{40}$$

其中, K 为体积压缩系数(体积模量), 假定不产生松弛, 即 K 为常数; ω 为无量纲松弛函数核, 其与相应的 Poisson 比的关系如下式所示:

$$\omega = \frac{1 - 2\nu_v}{1 + \nu_v} \tag{41}$$

运用有效模量方法^[24], 该问题变为均匀各向同性材料, 其弹性系数为

$$\begin{cases} E_0 = K E_e + (1 + K) E_v = E_e \left\{ K + \frac{9(1 - K) \zeta \omega}{2 + \omega} \right\}, \\ \nu = K \nu_e + (1 + K) \nu_v = K \nu_e + \frac{(1 - K)(1 - \omega)}{2 + \omega}, \end{cases} \tag{42}$$

其中, $\zeta = K/E_e$ 为本构参数, K 为增强纤维的体积分, 利用式(11)、式(42), 粘弹性圆柱体的应力给出如下:

$$\{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*\} = \{\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_z\} = \Omega \left\{ \sigma_1(r, \omega), \sigma_2(r, \omega), \sigma_3(r, \omega) \right\}. \tag{43}$$

在弹性复合材料中, $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ 是 ω 和 r 的函数, 而在粘弹性复合材料中, 它们是时间 t 和 r 的算子函数.

根据 Il'yushin 逼近方法^[24], 函数 σ_i 可以表示为如下形式:

$$\sigma_i(r, \omega) = \sum_{j=1}^4 A_j^{(i)} \Phi_j(\omega), \quad i = 1, 2, 3, \quad (44)$$

其中, $\Phi_j(\omega)$ 是一些已知的核, 以核 ω 为基础构成, 可以选择如下形式:

$$\Phi_1 = 1, \quad \Phi_2 = \omega, \quad \Phi_3 = \Pi = \frac{1}{\omega}, \quad \Phi_4 = g_{1/2} = \frac{1}{1 + \omega/2}. \quad (45)$$

系数 $A_j^{(i)}(r)$ 组成代数方程组

$$\sum_{k=1}^4 L_{jk} A_k^{(i)}(r) = B_j^{(i)}(r), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (46)$$

其中

$$L_{jk} = \int_0^1 \Phi_j \Phi_k d\omega, \quad B_j^{(i)} = \int_0^1 \Phi_j \sigma_i(r, \omega) d\omega. \quad (47)$$

现在可以得到作为坐标 r 和时间 t 的函数的粘弹性解 σ_i^* , 则

$$\begin{aligned} \sigma_i^*(r, t) = & A_1^{(i)} \Omega(t) + A_2^{(i)} \int_0^t \omega(t - \tau) d\Omega(\tau) + \\ & A_3^{(i)} \int_0^t \Pi(t - \tau) d\Omega(\tau) + A_4^{(i)} \int_0^t g_{1/2}(t - \tau) d\Omega(\tau). \end{aligned} \quad (48)$$

令, $\Omega(t) = \Omega_0 H(t)$, 其中 Ω_0 是常数, $H(t)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数,

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (49)$$

那么, 方程(48)变为

$$\sigma_i^*(r, t) = \Omega_0 \left\{ A_1^{(i)} H(t) + A_2^{(i)} \omega(t) + A_3^{(i)} \Pi(t) + A_4^{(i)} g_{1/2}(t) \right\}. \quad (50)$$

假定一个指数松弛函数为

$$\omega^*(t) = c_1 + c_2 e^{-t/t_s}, \quad (51)$$

其中, c_1, c_2 为待定常数, t_s 是松弛时间, 可以用 Laplace-Carson 变换来确定函数 $\Pi(t)$ 和 $g_{1/2}(t)$. 因为, $\omega(t)$ 的变换为

$$\omega(s) = c_1 + c_2 \frac{s}{s + 1/t_s}, \quad (52)$$

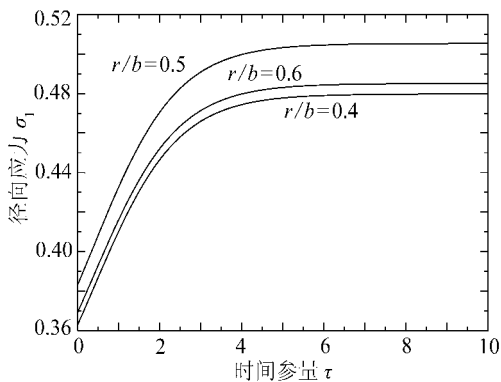
那么, 可以得到(详见文献[25])

$$\begin{cases} \Pi(t) = \frac{1}{c_1} \left[1 - \frac{c_2}{c_1 + c_2} e^{-c_1 \tau / (c_1 + c_2)} \right], & \tau = \frac{t}{t_s}, \\ g_{1/2}(t) = \frac{2}{2 + c_1} \left[1 - \frac{c_2}{2 + c_1 + c_2} e^{-((2 + c_1)\tau) / (2 + c_1 + c_2)} \right]. \end{cases} \quad (53)$$

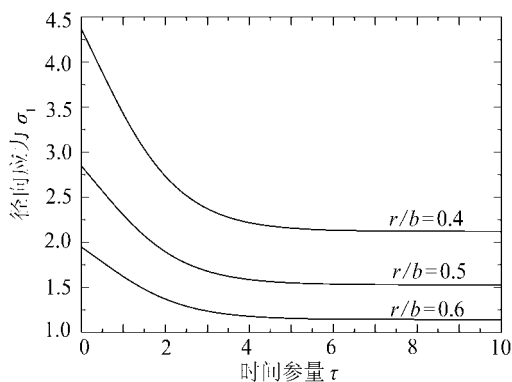
现在列举几个当几何参数 $n = -1, k = 2$ 时, 旋转增强纤维粘弹性空心 and 实心圆柱体的例子.

数值应用中应力带无量纲量 $\sigma_i = \sigma_i^* / \Omega_0$, 计算在下列参数值: $c_1 = 0.1, c_2 = 0.9, \nu_e = 0.3, \zeta = 0.1$ 和 $\kappa = 0.2$ 下进行, 松弛时间 t_s 尚未知道, 并以时间参数 $\tau (= t/t_s)$ 给出.

在不同的 r 值下, 时间参数对径向应力的影响如图 8 所示. 周向应力图和轴向应力图相似, 如图 9、图 10 所示. 对于空心圆柱体来说, 径向应力快速增大, 并在 $\tau \geq 7$ 时达到最大值(见图 8(a)). 但是, 对于实心圆柱体来说, 径向应力随 τ 减小, 并在 $\tau = 0$ 时有最大值(见图 8(b)), 当 $\tau \geq 8$ 时, σ_1 达到最小值. 还需要说明的是, 空心的和实心的圆柱体的周向应力和轴向应力, 都随着时间参数的增大而增大, 并取得它们的最大值(见图 9 和图 10).

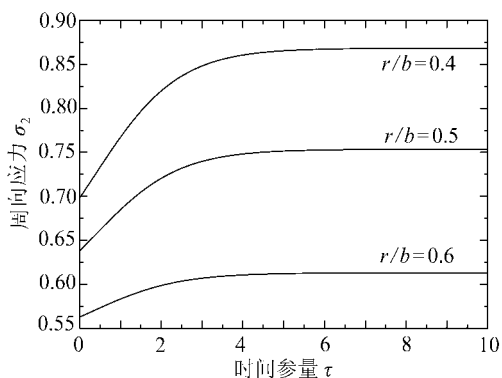


(a) 空心

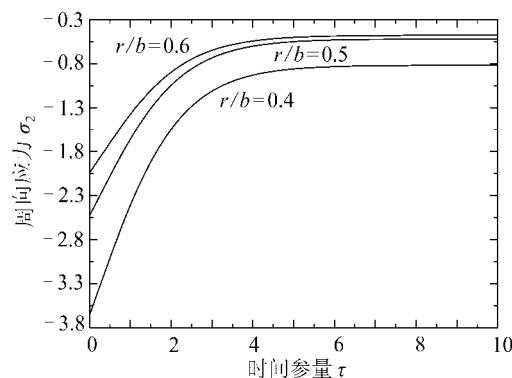


(b) 实心

图 8 旋转 FG 圆柱体无量纲径向应力 σ_1 随时间参量 τ 的变化情况

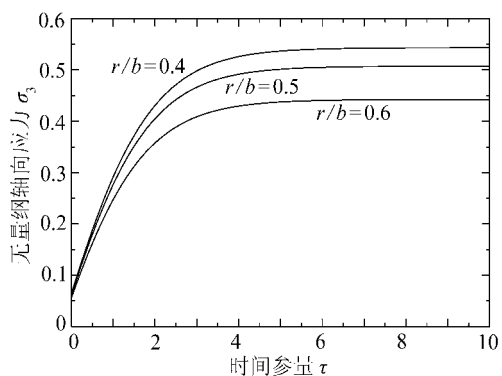


(a) 空心

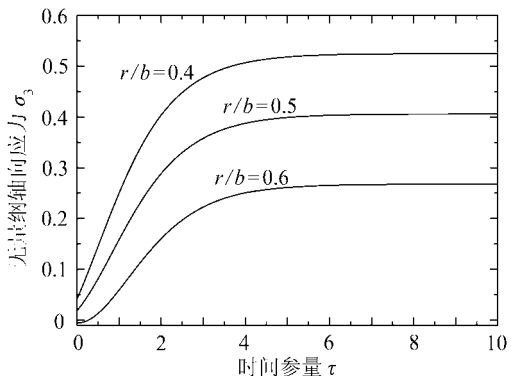


(b) 实心

图 9 旋转 FG 圆柱体无量纲周向应力 σ_2 随时间参量 τ 的变化情况



(a) 空心



(b) 实心

图 10 旋转 FG 圆柱体无量纲轴向应力 σ_3 随时间参量 τ 的变化情况

5 结 论

本文详细地研究了旋转的 FG 空心及实心圆柱体问题. 在分析过程中, 首先从旋转的 FG 圆柱体的平衡方程、相容方程和应力应变关系推导出其控制方程, 接着, 应用超几何函数, 准确地求解了该二阶微分控制方程. 然后, 利用所求出的解来表示其径向、周向和轴向应力. 同

时,应用圆柱体边缘的边界条件,可以完全确定旋转的 FG 空心及实心圆柱体的上述应力. 分析研究了 FG 圆柱体应力的数值结果,并和匀质圆柱体作了某些比较. 为了将来进一步的对比分析,还列表给出了不同参数下的结果. 最后,介绍了旋转粘弹性 FG 空心及实心圆柱体的粘弹性解,研究了时间参数对应力的影响.

[参 考 文 献]

- [1] Koizumi M. The concept of FGM[J]. *Ceramic Trans Funct Grad Mater*, 1993, **34**: 3– 10.
- [2] Praveen G N, Reddy J N. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic– metal plates[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, **35**(33): 4457– 4476.
- [3] Reddy J N, Chin C D. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1998, **21**(6): 593– 626.
- [4] Loy C T, Lam K Y, Reddy J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[J]. *International Journal of Mechanical Science*, 1999, **41**(3): 309– 324.
- [5] Reddy J N. Analysis of functionally graded plates[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **47**(1/3): 663– 684.
- [6] Zenkour A M. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2006, **30**(1): 67– 84.
- [7] Zenkour A M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates—Part 1: Deflection and stresses[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(18/19): 5224– 5242.
- [8] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd Ed. New York: McGraw– Hill, 1970.
- [9] Lekhnitskii S G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*[M]. Moscow: Mir Publishers, 1981.
- [10] Kalam M A, Tauchert T R. Stresses in an orthotropic elastic cylinder due to a plane temperature distribution [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1978, **1**(1): 13– 24.
- [11] Gamer U. Stress distribution in the rotating elastic– plastic disk[J]. *ZAMM*, 1985, **65**(3): T136– T137.
- [12] G ven U. Elastic– plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1992, **34**(11): 133– 138.
- [13] You L H, Zhang J J. Elastic– plastic stresses in a rotating solid disk[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, **41**(3): 269– 282.
- [14] Eraslan A N, Orcan Y. On the rotating elastic– plastic solid disk of variable thickness having concave profiles [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, **44**(7): 1445– 1466.
- [15] Zenkour A M, Allam M N M. On the rotating fiber– reinforced viscoelastic composite solid and annular disks of variable thickness[J]. *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2006, **7**(1): 21– 31.
- [16] Farshad M. Stresses in rotating disks of materials with different compressive and tensile moduli[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1974, **16**(8): 559– 564.
- [17] Tutuncu N. Effect of anisotropy on stresses in rotating disks[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1995, **37**(8): 873– 879.
- [18] G ven U, Pamaksizoglu C, Altay O. Elastic– plastic rotating annular disk with rigid casing[J]. *ZAMM*, 1999, **79**(7): 499– 503.
- [19] Zenkour A M. Analytical solutions for rotating exponentially – graded annular disks with various boundary conditions[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2005, **5**(4):

557– 577.

- [20] Horgan C O, Chan A M. The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials[J]. *Journal of Elasticity*, 1999, **55**(1): 43– 59.
- [21] Horgan C O, Chan A M. The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks[J]. *Journal of Elasticity*, 1999, **55**(3): 219– 230.
- [22] Tarn J Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(46/47): 8189– 8206.
- [23] Rooney F, Ferrari M. Tension, bending, and flexure of functionally graded cylinders[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(3): 413– 421.
- [24] Pobodria B E. Structural anisotropy in viscoelasticity[J]. *Polym Mech*, 1976, **12**: 557– 561.
- [25] Zenkour A M. Buckling of fiber– reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2004, **50**(1): 75– 93.

Elastic and Viscoelastic Solutions for Rotating Functionally Graded Hollow and Solid Cylinders

A. M. Zenkour¹, K. A. Elsiba², D. S. Mashat¹

(1. Department of Mathematics, Faculty of Science, King Abdulaziz University,
P. O. Box 80203, Jeddah 21859, Saudi Arabia;

Permanent address: Department of Mathematics, Faculty of Education,
Kafr El– sheikh University, Kafr El– Sheikh 33516, Egypt;

2. Department of Mathematics, Faculty of Science, Mansoura University, Mansoura 35516, Egypt)

Abstract: Analytical solutions for rotating functionally graded hollow and solid long cylinders are developed. Young's modulus and material density of the cylinder are assumed to vary exponentially through the radial direction and Poisson's ratio was assumed to be constant. A unified governing equation was derived from the equilibrium equations, compatibility equation, deformation theory of elasticity and the stress– strain relationships. The governing second– order differential equation was solved in terms of a hypergeometric function for the elastic deformation of rotating functionally graded cylinders. Dependence of stresses in the cylinder on the inhomogeneous parameters, geometry and boundary conditions was examined and discussed. Proposed solution was validated by comparing the results for rotating functionally graded hollow and solid cylinders to the results for rotating homogeneous isotropic cylinders. In addition, a viscoelastic solution for the rotating viscoelastic cylinder was presented. Moreover, the dependence of stresses in hollow and solid cylinders on the time parameter was examined.

Key words: rotating; hollow cylinder; solid shaft; functionally graded materials