

非饱和土层一维固结问题的解析解*

秦爱芳¹, 陈光敬², 谈永卫¹, 孙德安¹

(1. 上海大学 土木工程系, 上海 200072;

2. 西班牙加泰罗尼亚理工大学, 巴塞罗那 08034, 西班牙)

(叶志明推荐)

摘要: 对一有限厚度, 处于一维受荷状态, 表面为透水透气面, 底面为不透水不透气面的非饱和土层, 依据 Fredlund 的非饱和土一维固结理论, 由液相及气相的控制方程、Darcy 定律及 Fick 定律, 经 Laplace 变换及 Cayley-Hamilton 数学方法构造了顶面状态向量与任意深度处状态向量间的传递关系; 通过引入初始及边界条件, 得到了 Laplace 变换域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力以及土层沉降的解; 实现 Laplace 逆变换, 得到了时间域内的解析解; 用一典型算例, 与差分法结果进行对比, 验证了其正确性.

关键词: 非饱和土; 一维固结; 沉降; 解析解; 超孔隙气压力; 超孔隙水压力

中图分类号: TU44 **文献标识码:** A

引 言

几十年来, 岩土力学学术界已经对非饱和土固结理论开展了大量的研究工作, 积累了大量资料, 也取得了很大进展, 国外从 20 世纪 60 年代开始研究非饱和土固结问题, 典型的有 Blight^[1]、Scott^[2]、Barden^[3]、Fredlund^[4,5] 提出的固结方程, 其中最为流行的是 Fredlund 固结理论^[4]; 20 世纪 90 年代非饱和土固结问题是国内非饱和土力学研究的热点, 杨代泉^[6]、陈正汉^[7,8]、沈珠江^[9]、殷宗泽^[10] 曾先后研究过非饱和土的固结理论, 并提出了各自的见解.

非饱和土有 3 种不同的形态: 固态、液态、以及气态, 对于液态有 3 种不同类型: 对于较高饱和度的土, 液相是连续的而气相是不连续的; 对于稍低级别饱和度的土, 液相和气相都可以认为是连续的; 对于更低级别饱和度的土, 气相是连续的而液相不连续. 分析非饱和土固结时需要 3 种类别分别分析. Fredlund 和 Hanson^[4] 及 Lloret 和 Alonso^[11] 提出了对于一维情况固结的通用方程, 其中空气和液体的流动都认为是连续的, 并采用数学技巧来求解. Ausilio 和 Conte^[12] 提出对于一维固结的解可以通过液体与气体的沉降率和平均固结率来表述, Conte^[13] 进一步考虑非饱和土耦合固结进行分析, 但以上一维固结非饱和土的解均为数值解. 陈正汉^[7,8] 以混合物理论为基础, 把有效应力原理和 Curio 对称原理作为非饱和土的两个重要本构原理, 建立了非饱和土固结的数学模型, 并求解了其解析解.

本文依据 Fredlund 等的非饱和土一维固结理论、Fredlund 液相及气相的控制方程、Darcy 定

* 收稿日期: 2007-10-15; 修订日期: 2008-08-28

作者简介: 秦爱芳(1966—), 女, 山西人. 副教授, 博士生(联系人. Tel: + 86-21-56331519;

E-mail: qinaifang@21cn.com).

律及 Fick 定律, 采用 Laplace 变换、Cayley-Hamilton 原理、Laplace 逆变换等数学方法, 得到了时间域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力及土层沉降的解析解, 目前国内外还没有这方面的研究报告. 给出了一典型算例, 分析了不同气、水渗透系数比情况下土体超孔隙水压力、超孔隙气压力及土层沉降随时间的变化规律, 该研究结果将对校核有关非饱和土固结问题的数值分析结果以及深入研究非饱和土一维固结机理有参考价值.

基本假定:

- 1) 固体颗粒和液体状态是不可压缩的;
- 2) 气体服从 Boyle 定律;
- 3) 气体和液体的流动遵从 Darcy 定律;
- 4) 忽略温度的变化、空气的溶解、空气以及水蒸气的扩散等;
- 5) 荷载和变形只发生在一维垂直方向.

1 基本控制方程

如图 1 所示的非饱和土层, 土层厚度为 H , 地表作用有均匀荷载 q , 坐标原点设在地表, 深度方向 z 坐标以向下为正, 取底面积为 1、高度为 dz 的单元体 $V_0 = 1 \times 1 \times dz$ 为研究对象.

1.1 液相的控制方程

由于 Darcy 流动引起的单元体内液相的体积变化为液体流入单元体以及流出单元体的体积差, 即

$$\frac{\partial(V_w/V_0)}{\partial t} = \frac{k_w}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}, \quad (1)$$

式中, V_w 为液体的体积(m^3); k_w 为非饱和土中的液体渗透率(m/s), 假定为常数; u_w 为超孔隙水压力(kPa); γ_w 为液相的重度(kN/m^3).

在文献[4-5]中, 液相的体积变化可以由这两个应力状态量按如下的本构方程得到:

$$\frac{\partial(V_w/V_0)}{\partial t} = m_{1k}^w \frac{\partial(\sigma - u_a)}{\partial t} + m_2^w \frac{\partial(u_a - u_w)}{\partial t}, \quad (2)$$

式中, m_{1k}^w 是液体体积变化系数, 它随着净法向压力 $\sigma - u_a$ 的变化而变化(kPa), 其下标“ k ”代表侧限的 K_0 条件; m_2^w 是随着吸力 $u_a - u_w$ 改变的液体体积系数(kPa).

由方程(1)和方程(2), 可导出如下液相连续性方程:

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = -C_w \frac{\partial u_a}{\partial t} - C_v^w \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\text{式中} \quad C_w = \frac{1 - m_2^w/m_{1k}^w}{m_2^w/m_{1k}^w}, \quad C_v^w = \frac{k_w}{\gamma_w m_2^w}.$$

1.2 气相的控制方程

由于 Darcy 流动引起的单元体内气相的质量变化为气体流入单元体以及流出单元体的质量差, 即

$$\frac{\partial(\rho_a V_a/V_0)}{\partial t} = \frac{k_a}{g} \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2}, \quad (4)$$

式中, ρ_a 为气体的密度(kg/m^3); V_a 为气体的体积(m^3); k_a 为非饱和土中的气体渗透率(m/s),

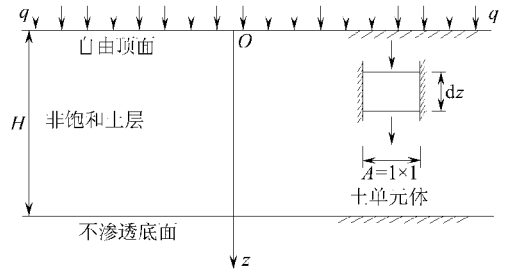


图 1 顶面为自由面、底面为不透透面的非饱和土层固结的计算模型

假定为常数; g 为重力加速度(m/s^2).

对式(4)的左边求全微分, 再利用理想气体原理、气体 Boyle 定律可得出

$$\frac{\partial(V_a/V_0)}{\partial t} = \frac{k_a RT}{g u_a^0 M} \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} - \frac{u_{atm} n_0 (1 - S_{r0})}{(u_a^0)^2} \frac{\partial u_a}{\partial t}, \quad (5)$$

式中, R 为通用气体常数($8.314 J/(mol \cdot K)$); T 为绝对温度(K); M 为气体的平均摩尔质量(kg/mol); n_0 、 S_{r0} 分别为受荷前的初始孔隙率和饱和度; u_a 为绝对气体压力($u_a = u_a + u_{atm}$, u_{atm} 是大气压), 当孔隙气压远小于大气压, 或者像在快速的固化散气中, 绝对气压 u_a 可被近似看作常数(例如, 在这里用 u_a^0 来取代 u_a)(kPa); u_a^0 、 u_a^0 分别为固结前受荷后的初始超孔隙气体压力和初始的绝对气体压力($u_a^0 = u_a^0 + u_{atm}$).

文献[45]中液相的体积变化可以由这两个应力状态量按如下的本构方程得到:

$$\frac{\partial(V_a/V_0)}{\partial t} = m_{1k}^a \frac{\partial(\sigma - u_a)}{\partial t} + m_2^a \frac{\partial(u_a - u_w)}{\partial t}, \quad (6)$$

式中, m_{1k}^a 为 K_0 侧向约束条件下由 $\sigma - u_a$ 净正压力的变化引起的气体体积变化系数(kPa^{-1}); m_2^a 为由吸力 $u_a - u_w$ 变化引起的气体体积变化系数(kPa^{-1}).

根据气相的质量守恒, 由式(5)和(6)得到如下的气相的质量守恒方程:

$$\left(m_2^a - m_{1k}^a + \frac{u_{atm} n_0 (1 - S_{r0})}{(u_a^0)^2} \right) \frac{\partial u_a}{\partial t} = m_2^a \frac{\partial u_w}{\partial t} + \frac{k_a RT}{g u_a^0 M} \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2}, \quad (7)$$

若定义

$$C_a = m_2^a \left[m_{1k}^a - m_2^a - \frac{u_{atm} n_0 (1 - S_{r0})}{(u_a^0)^2} \right],$$

$$C_v^a = k_a RT \left[g u_a^0 M \left(m_{1k}^a - m_2^a - \frac{u_{atm} n_0 (1 - S_{r0})}{(u_a^0)^2} \right) \right],$$

可以得到

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = - C_a \frac{\partial u_w}{\partial t} - C_v^a \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2}. \quad (8)$$

1.3 边界和初始条件

图1中, 土层厚度为 H , 水平向无限大, 位于一刚性不透水不透气的岩层上, 其表面瞬时施加均布荷载 q , 土体侧向不发生变形, 水和气体只能从上表面排出, 则边界、初始条件为

$$\begin{cases} u_a(0, t) = u_w(0, t) = 0, & \frac{\partial u_a(H, t)}{\partial z} = \frac{\partial u_w(H, t)}{\partial z} = 0, \\ u_a(z, 0) = u_a^0, & u_w(z, 0) = u_w^0, \end{cases} \quad (9)$$

其中, u_a^0 和 u_w^0 为 $t = 0$ 时刻由荷载引起的初始超孔隙气和水的压力.

2 解析解的推导

2.1 超孔隙气压 u_a 、超孔隙水压 u_w

对式(3)、(8)左右两边均用 Laplace 转换, 整理后

$$s u_w = - s C_w u_a + \frac{C_v^w \gamma_w}{k_w} \frac{\partial v_w}{\partial z} + u_w^0 + C_w u_a^0, \quad (10)$$

$$s u_a = - s C_a u_w + \frac{C_v^a g}{k_a} \frac{\partial J_a}{\partial z} + u_a^0 + C_a u_w^0. \quad (11)$$

式(10)和(11)重新组合形成

$$\frac{\partial v_w}{\partial z} = s \frac{k_w}{C_v^w \gamma_w} C_w u_a + s \frac{k_w}{C_v^w \gamma_w} u_w - \frac{k_w}{C_v^w \gamma_w} (u_w^0 + C_w u_a^0), \quad (12)$$

$$\frac{\partial J_a}{\partial z} = s \frac{k_a}{C_v^a g} u_a + s \frac{k_a}{C_v^a g} C_a u_w - \frac{k_a}{C_v^a g} (u_a^0 + C_a u_w^0). \quad (13)$$

另由 Darcy 渗透定律可以推得

$$\frac{\partial u_a}{\partial z} = -\frac{g}{k_a} J_a, \quad \frac{\partial u_w}{\partial z} = -\frac{\gamma_w}{k_w} v_w. \quad (14)$$

对上面两式, 同样采用 Laplace 转换, 得

$$\frac{\partial u_a}{\partial z} = \partial \left\{ \int_0^\infty e^{-st} u_a dt \right\} \Big|_{\partial z} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u_a}{\partial z} dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[-\frac{g}{k_a} J_a \right] dt = -\frac{g}{k_a} J_a, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_w}{\partial z} = \partial \left\{ \int_0^\infty e^{-st} u_w dt \right\} \Big|_{\partial z} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u_w}{\partial z} dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[-\frac{\gamma_w}{k_w} v_w \right] dt = -\frac{\gamma_w}{k_w} v_w. \quad (16)$$

由式(12)、(13)、(15)、(16)得到下列矩阵形式的微分方程:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B}, \quad (17)$$

其中, $\mathbf{X}(z, s) = [u_a(z, s), u_w(z, s), J_a(z, s), v_w(z, s)]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{g}{k_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_w}{k_w} \\ s \frac{k_a}{C_v^a g} & s \frac{k_a C_a}{C_v^a g} & 0 & 0 \\ s \frac{k_w C_w}{C_v^w \gamma_w} & s \frac{k_w}{C_v^w \gamma_w} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_a}{C_v^a g} (u_a^0 + C_a u_w^0) \\ -\frac{k_w}{C_v^w \gamma_w} (u_w^0 + C_w u_a^0) \end{pmatrix}.$$

矩阵常微分方程(17)的拉氏变换的一般解为

$$\mathbf{X}(z, s) = \mathbf{T}(z, s) \mathbf{X}(0, s) + \mathbf{S}(z, s), \quad (18)$$

其中 $\mathbf{T}(z, s) = \exp[z \mathbf{A}(s)]$, $\mathbf{S}(z, s) = \int_0^z \mathbf{T}(z - \xi) \mathbf{B} d\xi$.

根据 Cayley-Hamilton 理论^[14], 矩阵 $\mathbf{T}(z, s)$ 可以写成

$$\mathbf{T} = \exp[z \mathbf{A}(s)] = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{A}^2 + a_3 \mathbf{A}^3, \quad (19)$$

其中, \mathbf{I} 是四阶单位矩阵. 矩阵方程 $\mathbf{A}(s)$ 的特征方程是

$$\lambda^4 + \lambda^2 \left\{ \frac{s}{C_v^w} + \frac{s}{C_v^a} \right\} + s^2 \left\{ \frac{1 - C_a C_w}{C_v^a C_v^w} \right\} = 0. \quad (20)$$

解出的特征值 $\lambda = \pm \xi$, $\lambda = \pm \eta$ 代替式(19)中的矩阵 \mathbf{A} , 所得到的方程同样成立, 即有如下形式:

$$\exp[\xi z] = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3, \quad (21)$$

$$\exp[-\xi z] = a_0 - a_1 \xi + a_2 \xi^2 - a_3 \xi^3, \quad (22)$$

$$\exp[\eta z] = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3, \quad (23)$$

$$\exp[-\eta z] = a_0 - a_1 \eta + a_2 \eta^2 - a_3 \eta^3, \quad (24)$$

$a_0 \sim a_3$ 可以从式(21) ~ (24) 计算求得, 再将其与矩阵 \mathbf{A} 同时代入式(19), 便可获得矩阵 $\mathbf{T}(z, s)$,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

矩阵 $\mathbf{S}(z, s) = \int_0^z \mathbf{T}(z - \zeta) \mathbf{B} d\zeta$, 将 T_{ij} 代入该公式, 得

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = - \int_0^z \begin{pmatrix} T_{13} \frac{k_a}{C_v g} (u_a^0 + C_a u_w^0) + T_{14} \frac{k_w}{C_v \gamma_w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \\ T_{23} \frac{k_a}{C_v g} (u_a^0 + C_a u_w^0) + T_{24} \frac{k_w}{C_v \gamma_w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \\ T_{33} \frac{k_a}{C_v g} (u_a^0 + C_a u_w^0) + T_{34} \frac{k_w}{C_v \gamma_w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \\ T_{43} \frac{k_a}{C_v g} (u_a^0 + C_a u_w^0) + T_{44} \frac{k_w}{C_v \gamma_w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \end{pmatrix} d\zeta. \quad (26)$$

由于篇幅, $T_{11} \sim T_{44}$ 及 $S_1 \sim S_4$ 此处不详细表达.

由公式(18), 当 $z = H$ 时, $\mathbf{X}(z, s)$ 可表达成

$$\begin{pmatrix} u_a(H, s) \\ u_w(H, s) \\ J_a(H, s) \\ v_w(H, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}_{z=H} \begin{pmatrix} u_a(0, s) \\ u_w(0, s) \\ J_a(0, s) \\ v_w(0, s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}_{z=H}. \quad (27)$$

引入边界条件, 得到如下矩阵:

$$\begin{pmatrix} u_a(H, s) \\ u_w(H, s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}_{z=H} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_a(0, s) \\ v_w(0, s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}_{z=H}. \quad (28)$$

从式(28)解得 $J_a(0, s), v_w(0, s)$, 代入式(18), 可解得

$$u_a(z, s) = T_{13} J_a(0, s) + T_{14} v_w(0, s) + S_1 = \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2) C_v^a} \left\{ \left[\left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^a} \right) (u_a^0 + C_a u_w^0) + \frac{s C_a}{C_v^w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right] \frac{\text{ch} \xi(H-z)}{\xi^2 \text{ch}(\xi H)} + \left[(u_a^0 + C_a u_w^0) \left(\xi^2 + \frac{s}{C_v^a} \right) + \frac{s C_a}{C_v^w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right] \frac{\text{ch} \eta(H-z)}{\eta^2 \text{ch}(\eta H)} \right\} + \frac{u_a^0}{s}, \quad (29)$$

$$u_w(z, s) = T_{23} J_a(0, s) + T_{24} v_w(0, s) + S_2 = \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2) C_v^w} \left\{ \left[\frac{s C_w}{C_v^a} (u_a^0 + C_a u_w^0) + \left(\eta^2 + \frac{s}{C_v^w} \right) (C_w u_a^0 + u_w^0) \right] \frac{\text{ch} \xi(H-z)}{\xi^2 \text{ch}(\xi H)} + \left[\frac{s C_w}{C_v^a} (u_a^0 + C_a u_w^0) + (C_w u_a^0 + u_w^0) \left(\xi^2 + \frac{s}{C_v^w} \right) \right] \frac{\text{ch} \eta(H-z)}{\eta^2 \text{ch}(\eta H)} \right\} + \frac{u_w^0}{s}. \quad (30)$$

2.2 土层压缩量计算

土层压缩量的计算按以下推导得到:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = m_1^s \frac{\partial(\sigma - u_a)}{\partial t} + m_2^s \frac{\partial(u_a - u_w)}{\partial t}, \quad (31)$$

式中 $m_{1k}^s = m_{1k}^w + m_{1k}^a$, $m_2^s = m_2^w + m_2^a$.

对上式经过 Laplace 变换得到

$$s \varepsilon_v = -m_{1k}^s (su_a - u_a^0) + m_2^s (su_a - u_a^0 + su_w + u_w^0). \quad (32)$$

土层的压缩量可以表示为

$$w(t) = \int_0^H \varepsilon_v(z, t) dz. \quad (33)$$

因此可以得出 Laplace 变换下的土层压缩

$$w(s) = -\frac{1}{(\xi^2 - \eta^2) \xi^3 \operatorname{ch}(\frac{\xi H}{\eta})} \frac{\operatorname{sh} \xi H}{\xi^3 \operatorname{ch}(\frac{\xi H}{\eta})} \frac{1}{C_v^a} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \left[\eta^2 + \frac{s}{C_v^a} \right] - m_2^s \frac{s C_w^w}{C_v^w} \right\} (u_a^0 + C_a u_w^0) -$$

$$\frac{1}{(\xi^2 - \eta^2) \xi^3 \operatorname{ch}(\frac{\xi H}{\eta})} \frac{\operatorname{sh} \xi H}{\xi^3 \operatorname{ch}(\frac{\xi H}{\eta})} \frac{1}{C_v^w} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \frac{s C_a}{C_v^a} - m_2^s \left[\eta^2 + \frac{s}{C_v^w} \right] \right\} (C_w u_a^0 + u_w^0) +$$

$$\frac{1}{(\xi^2 - \eta^2) \eta^3 \operatorname{ch}(\frac{\eta H}{\xi})} \frac{\operatorname{sh} \eta H}{\eta^3 \operatorname{ch}(\frac{\eta H}{\xi})} \frac{1}{C_v^a} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \left[\xi^2 + \frac{s}{C_v^a} \right] - m_2^s \frac{s C_w^w}{C_v^w} \right\} (u_a^0 + C_a u_w^0) +$$

$$\frac{1}{(\xi^2 - \eta^2) \eta^3 \operatorname{ch}(\frac{\eta H}{\xi})} \frac{\operatorname{sh} \eta H}{\eta^3 \operatorname{ch}(\frac{\eta H}{\xi})} \frac{1}{C_v^w} \left\{ (-m_{1k}^s + m_2^s) \frac{s C_a}{C_v^a} - m_2^s \left[\xi^2 + \frac{s}{C_v^w} \right] \right\} (C_w u_a^0 + u_w^0). \quad (34)$$

通过对式(29)、(30)、(34)进行 Laplace 逆变换,可以得到时间域内土层内任意深度、任意时间的超孔隙气压力、超孔隙水压力及任意时刻地表沉降量,详见附录 A.

3 固结方程差分解法的基本思路

本文采用 Fredlund 和 Hasan^[4]提出的差分方法编制程序,针对本文研究的边界及初始条件进行求解,得到非饱和土一维固结的数值解,并用得出的数值解与解析解对比,以验证解析解的正确性.其基本思想是将气相和液相的连续性方程线性化,如图 2、图 3.

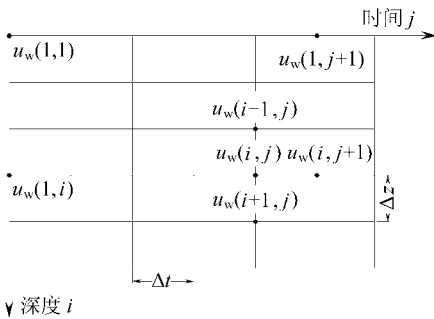


图 2 液相差分网格

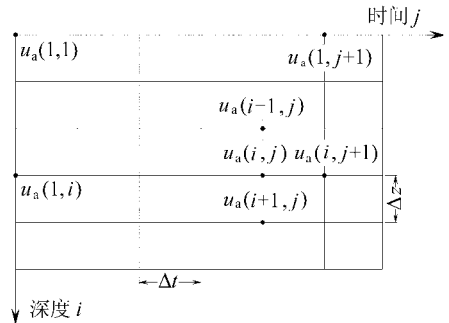


图 3 气相差分网格

液体的连续性方程可以写成如下有限差分形式:

$$\frac{u_w(i, j+1) - u_w(i, j)}{\Delta t} = -C_w \frac{u_a(i, j+1) - u_a(i, j)}{\Delta t} -$$

$$C_v^w \frac{u_w(i+1, j) - 2u_w(i, j) + u_w(i-1, j)}{\Delta z^2}. \quad (35)$$

气体的连续性方程可以写成如下有限差分形式:

$$\frac{u_a(i, j+1) - u_a(i, j)}{\Delta t} = -C_a \frac{u_w(i, j+1) - u_w(i, j)}{\Delta t} -$$

$$C_v^a \frac{u_a(i+1, j) - 2u_a(i, j) + u_a(i-1, j)}{\Delta z^2}. \quad (36)$$

将式(35)、(36)重新整理后可得

$$u_w(i, j+1) = u_w(i, j) + \frac{\beta_w g_1^w}{(1 - C_a C_w)} - \left\{ \frac{C_w}{1 - C_a C_w} \right\} \beta_a f_1^a, \quad (37)$$

$$u_a(i, j+1) = u_a(i, j) + \frac{\beta_a f_1^a}{(1 - C_a C_w)} - \left\{ \frac{C_a}{1 - C_a C_w} \right\} \beta_w g_1^w, \quad (38)$$

式中, i 为深度方向上的距离增量, j 为时间增量, $\beta_w = C_w^v (\Delta t / \Delta z^2)$, $\beta_a = C_a^v (\Delta t / \Delta z^2)$, $g_1^w = u_w(i+1, j) - 2u_w(i, j) + u_w(i-1, j)$, $f_1^a = u_a(i+1, j) - 2u_a(i, j) + u_a(i-1, j)$.

初始值:

$$u_w(i, 1) = u_w^0, \quad u_a(i, 1) = u_a^0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, z_n + 1;$$

边界条件:

$$1) \text{ 排水排气面 } u_w(1, j) = 0, \quad u_a(1, j) = 0, \quad j = 2, 3, 4, \dots, t_n + 1;$$

$$2) \text{ 不排水不排气面 } u_a(z_n + 1, j) = u_a(z_n + 2, j), \quad u_w(z_n + 1, j) = u_w(z_n + 2, j).$$

代入式(37)、(38)后消去虚结点, 得

$$u_a(z_n + 1, j+1) = u_a(z_n + 1, j) + \left\{ - \left[\frac{C_a}{1 - C_a C_w} \right] \beta_w [-u_w(z_n + 1, j) + u_w(z_n, j)] + \left[\frac{1}{1 - C_a C_w} \right] \beta_a [-u_a(z_n + 1, j) + u_a(z_n, j)] \right\}, \quad (39)$$

$$u_w(z_n + 1, j+1) = u_w(z_n + 1, j) + \left\{ - \left[\frac{C_w}{1 - C_a C_w} \right] \beta_a [-u_a(z_n + 1, j) + u_a(z_n, j)] + \left[\frac{1}{1 - C_a C_w} \right] \beta_w [-u_w(z_n + 1, j) + u_w(z_n, j)] \right\}, \quad (40)$$

其中, z_n 为沿深度的网格划分总块数, $z_n + 1$ 为不渗透底面, $z_n + 2$ 为虚结点.

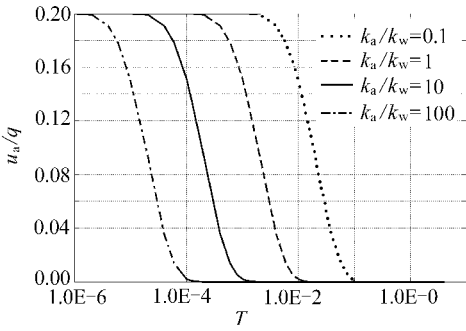
可利用式(39)、(40), 从前一时刻的已知值求出后一时刻的超孔隙气压力和超孔隙水压力, 从上而下, 完成所有深度的超孔隙压力的计算, 再向后推进到下一个时刻, 如此反复, 直至平衡. 另外, 在求解上述差分方程时, 为了满足稳定条件还需保证 β_w 和 β_a 小于 0.5, 即在网格划分时要控制好时间间隔和深度间隔的选取, 否则计算结果不可取.

4 算例及验证

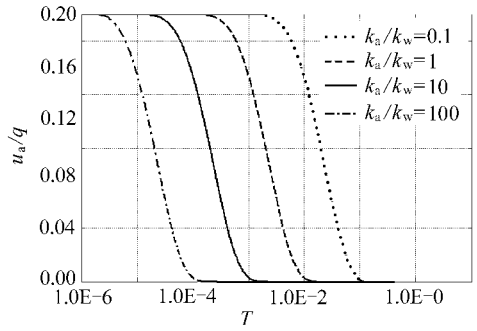
为了验证所推导的非饱和土一维固结解析解的正确性, 本文采用一典型算例对非饱和土进行了分析, 并将解析解结果与文献[4]提出的有限差分方法结果进行了对比. 计算问题如下: 设一水平向无限的土层, 层底刚性不透水不透气, 层表面透水透气. 主要土层参数为 $n_0 = 50\%$, $S_{r0} = 80\%$, $m_{ik}^s = -2.5 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$, $m_2^s / m_{ik}^s = 0.4$, $m_{ik}^w / m_{ik}^s = 0.2$ 和 $m_2^w / m_{ik}^w = 4$. 表面瞬时施加一均匀无限荷载 $q = 100 \text{ kPa}$, 初始超孔隙气压力和超孔隙水压力为 $u_a^0 = 20.0 \text{ kPa}$, 超孔隙水压力为 $u_w^0 = 40 \text{ kPa}$ (荷载作用下的土中初始超孔隙气压力、超孔隙水压力按文献[5] 224-226 页的方法计算所得). 计算参数的设定参考了文献[13]. 图 4~ 图 6 中(a)为本文解析解的计算结果, (b)为有限差分法结果. 图中时间因素 $T = k_w t / (v_w m_{ik}^s H^2)$.

比较图 4~ 图 6 中(a)和(b)可知, 本文解析解结果几乎与有限差分法结果一致. 证明本文的方法是正确的. 另外, Fredlund 和 Hasan^[4]已指出, 将非饱和土的有限差分法结果退化为饱

和土时几乎与 Terzaghi 的结果一致. 因此, 退化为饱和土时本文解析解结果与 Terzaghi 的结果是一致的.

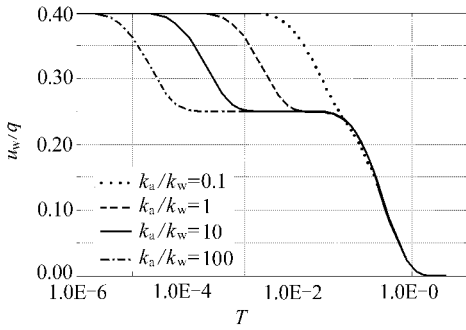


(a) 解析解答

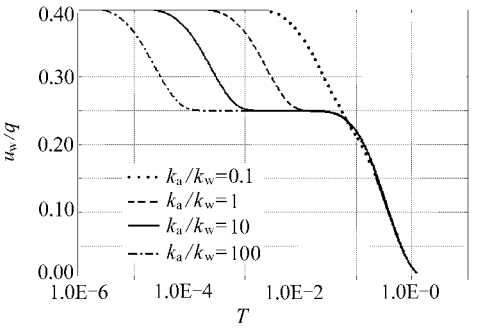


(b) 数值解

图 4 不同条件 k_a/k_w 下土中超孔隙气压力 u_a/q 随时间因素 T 的变化规律

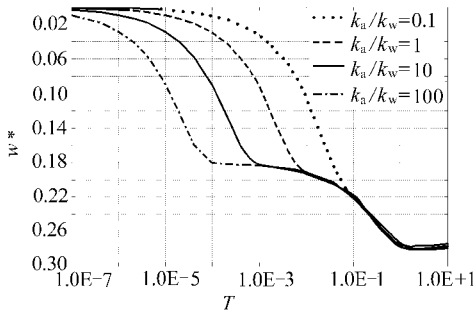


(a) 解析解答

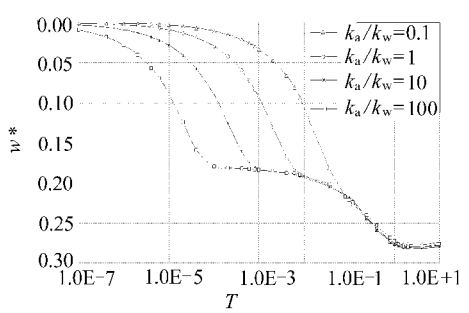


(b) 数值解答

图 5 不同条件 k_a/k_w 下土中超孔隙水压力 u_w/q 随时间因素 T 的变化规律



(a) 解析解答



(b) 数值解

图 6 不同 k_a/k_w 下土层沉降 $w^*/w (m_{ik}^s/qH)$ 随时间因素 T 的变化规律

从图 4 可以看出 k_a/k_w 比值的大小对超孔隙气压力的消散速度影响非常明显, k_a/k_w 越大, 超孔隙气压力的消散速度就越快; k_a/k_w 越小, 在初期孔隙气压力的消散就越缓慢; 从图 5 可以看出, k_a/k_w 越小, 在初期孔隙水压力的消散越缓慢, 这与图 4 的规律(k_a/k_w 越小, 初期孔隙气压力的消散就越缓慢) 是类似的; 而在后期, 无论 k_a/k_w 取值如何, 孔隙水压力的消散曲线都趋于一致, 这主要是由于孔隙气压力在后期已基本全部消散所造成的; 图 6 可以看出不同 k_a/k_w 比值情况下土层沉降随时间的变化规律, 其中沉降用无量纲形式 $w^*/w (m_{ik}^s/qH)$ 表示. 从图中可以看出, 当 $k_a < k_w$ (即 $k_a/k_w = 0.1$) 时, 初期沉降较缓慢, 沉降随时间变化曲线呈反

S型,类似于饱和土固结沉降曲线. 而当 $k_a > k_w$ (一般情况下都是这一关系) 时, 沉降随时间变化曲线呈双S型.

5 结 论

- 1) 本文得到了一有限厚度, 处于一维受荷状态, 表面为透水透气面, 底面为不透水不透气面的非饱和土层时间域内的超孔隙水压力、超孔隙气压力及土层沉降的解析解;
- 2) 本文采用 Fredlund 提出的差分法编制程序, 得到非饱和土一维固结的数值解, 并用得出的数值解与解析解对比, 两者的结果几乎一致, 验证了本文的解析解;
- 3) 对不同 k_a/k_w 下土固结时土中超孔隙气压力、超孔隙水压力及土层沉降随时间因素的变化进行了简单的分析.

附录 A

时间域内的解采用了实数形式的 Taylor 级数展开, 文中运用了 erf 与 erfc 函数, 这两者都有着各自的值域, $-1 \leq \text{erf}(x) \leq 1, 0 \leq \text{erfc}(x) \leq 2$.

1) 超孔隙气压力

$$\begin{aligned}
 u_a = & C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_1 + b_1 - a_1)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + \\
 & C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_1 + b_1 + a_1)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + \\
 & C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_2 + b_2 - a_2)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + \\
 & C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_2 + b_2 + a_2)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + u_a^0.
 \end{aligned} \tag{A1}$$

2) 超孔隙水压力

$$\begin{aligned}
 u_w = & C_3 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_1 + b_1 - a_1)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + \\
 & C_3 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_1 + b_1 + a_1)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + \\
 & C_4 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_2 + b_2 - a_2)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + \\
 & C_4 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ib_2 + b_2 + a_2)^{2k+1}}{(2k+1)k!(2\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right\} (-1)^i + u_w^0.
 \end{aligned} \tag{A2}$$

3) 土层压缩量

$$\begin{aligned}
 w(t) = & C_5 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left\{ 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(2b_1 i)^2/4t} - 2b_1 i \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_1 i)^{2k+1}}{(2k+1)k!(\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right] \right\} - \\
 & C_5 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left\{ 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(2b_1 i + 2b_1)^2/4t} - 2b_1(i+1) \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_1 i + b_1)^{2k+1}}{(2k+1)k!(\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right] \right\} + \\
 & C_6 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left\{ 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(2b_2 i)^2/4t} - 2b_2 i \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_2 i)^{2k+1}}{(2k+1)k!(\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right] \right\} - \\
 & C_6 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left\{ 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(2b_2 i + 2b_2)^2/4t} - 2b_2(i+1) \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_2 i + b_2)^{2k+1}}{(2k+1)k!(\sqrt{t})^{2k+1}} (-1)^k \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{A3}$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_0(H-z), \quad a_2 = b_0(H-z), \quad b_1 = a_0H, \quad b_2 = b_0H, \\
 a_0 &= \left[\frac{\sqrt{(C_v^w - C_v^a)^2 + 4C_v^w C_v^a C_a C_w} - (C_v^w - C_v^a)}{2C_v^w C_v^a} \right]^{1/2}, \\
 b_0 &= \left[\frac{-\sqrt{(C_v^w - C_v^a)^2 + 4C_v^w C_v^a C_a C_w} - (C_v^w + C_v^a)}{2C_v^w C_v^a} \right]^{1/2}, \\
 C_1 &= \frac{-1}{C_v^a (a_0^2 - b_0^2) a_0^2} \left[\left(b_0^2 + \frac{1}{C_v^a} \right) (u_a^0 + C_a u_w^0) + \frac{C_a}{C_v^w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right], \\
 C_2 &= \frac{1}{C_v^a (a_0^2 - b_0^2) b_0^2} \left[\left(a_0^2 + \frac{1}{C_v^a} \right) (u_a^0 + C_a u_w^0) + \frac{C_a}{C_v^w} (C_w u_a^0 + u_w^0) \right], \\
 C_3 &= \frac{-1}{C_v^w (a_0^2 - b_0^2) a_0^2} \left[\left(b_0^2 + \frac{1}{C_v^w} \right) (u_w^0 + C_a u_a^0) + \frac{C_w}{C_v^a} (C_a u_w^0 + u_a^0) \right], \\
 C_4 &= \frac{1}{C_v^w (a_0^2 - b_0^2) b_0^2} \left[\left(a_0^2 + \frac{1}{C_v^w} \right) (u_w^0 + C_w u_a^0) + \frac{C_w}{C_v^a} (C_a u_w^0 + u_a^0) \right], \\
 C_5 &= -\frac{1}{(a_0^2 - b_0^2)} \left\{ \frac{1}{C_v^a} \left[(-m_{1k} + m_2) \left(b_0^2 + \frac{1}{C_v^a} \right) - m_2 \frac{C_w}{C_v^w} \right] (u_a^0 + C_a u_w^0) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{C_v^w} \left[(-m_{1k} + m_2) \frac{C_a}{C_v^a} - m_2 \left(b_0^2 + \frac{1}{C_v^w} \right) \right] (C_w u_a^0 + u_w^0) \right\} \frac{1}{a_0^3}, \\
 C_6 &= \frac{1}{(a_0^2 - b_0^2)} \left\{ \frac{1}{C_v^a} \left[(-m_{1k} + m_2) \left(a_0^2 + \frac{1}{C_v^a} \right) - m_2 \frac{C_w}{C_v^w} \right] (u_a^0 + C_a u_w^0) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{C_v^w} \left[(-m_{1k} + m_2) \frac{C_a}{C_v^a} - m_2 \left(a_0^2 + \frac{1}{C_v^w} \right) \right] (C_w u_a^0 + u_w^0) \right\} \frac{1}{b_0^3}.
 \end{aligned}$$

[参 考 文 献]

- [1] Blight G E. Strength and consolidation characteristics of compacted soils[D]. Ph D dissertation. England: University of London, 1961.
- [2] Scott R F. Principles of Soil Mechanics[M]. USA: Addison Wesley Publishing Company, 1963.
- [3] Barden L. Consolidation of compacted and unsaturated clays[J]. Geotechnique, 1965, 15(3): 267-286.
- [4] Fredlund D G, Hasan J U. One-dimensional consolidation theory: unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1979, 17(3): 521-531.
- [5] Fredlund D G, Rahardjo H. Soil Mechanics for Unsaturated Soil[M]. New York: John Wiley and Sons, 1993; 非饱和土土力学[M]. 陈仲颐, 张在明, 陈愈炯, 等译. 北京: 中国建工出版社, 1997.
- [6] 杨代泉. 非饱和土广义固结理论及其数值模拟与试验研究[D]. 博士学位论文. 南京: 南京水利学院, 1990.
- [7] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论(I)[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(2): 127-137.
- [8] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论(II)[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(8): 687-698.
- [9] 沈珠江. 非饱和土简化固结理论及其应用[J]. 水利水运工程学报, 2003, 4: 1-6.
- [10] 殷宗泽, 王保田, 余湘娟, 等. 土工原理[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007, 350-364.
- [11] Lloret A, Alonso E E. Consolidation of unsaturated soils, including swelling and collapse behavior[J]. Geotechnique, 1980, 30(4): 449-477.
- [12] Ausilio E, Conte E. Settlement rate of foundations on unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(5): 940-946.
- [13] Conte E. Consolidation analysis for unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, 41(4): 599-612.

- [14] Korn G A, Korn T M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineering [M]. New York: McGraw-Hill Inc, 1968.

Analytical Solution to One-Dimensional Consolidation in Unsaturated Soils

QIN Ai-fang¹, CHEN Guang-jin², TAN Yong-wei¹, SUN De-an¹

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Technical University of Catalunya, Barcelona 08034, Spain)

Abstract: An analytical solution of Fredlund's one-dimensional consolidation equation in unsaturated soil with a finite thickness under vertical loading and confinements in the lateral directions was presented. The boundary contains the top surface permeable to water and air and the bottom impermeable to water and air. The transfer relations between the state vectors at top surface and any depth was gained by using the Laplace transform and Cayley-Hamilton mathematical methods to the governing equations of water and air, Darcy's law and Fick's law. The excess pore-air and pore-water pressures and settlement in the Laplace-transformed domain were obtained by using the Laplace transform with the initial and boundary conditions; by performing the inverse Laplace transforms the analytical solutions were obtained in the time domain. Finally, comparisons between the analytical solutions and the results of the finite difference method indicate that the analytical solution was correct.

Key words: unsaturated soil; one-dimensional consolidation; settlement; analytical solution; excess pore-air pressure; excess pore-water pressure