

# 周期载荷下超弹性圆柱壳的动力响应<sup>\*</sup>

任九生

(上海大学 力学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200444)

(程昌钧推荐)

**摘要:** 研究了不可压超弹性圆柱壳在内表面周期载荷及突加常值载荷作用下的运动与破坏等动力响应问题. 通过对所得描述圆柱壳内表面运动的非线性常微分方程解的数值计算和动力学定性分析, 发现存在一个临界载荷; 当突加常值载荷或周期载荷的平均载荷值小于这一临界值时, 圆柱壳的运动随时间的演化是周期性的或拟周期性的非线性振动, 而当其大于这一临界值时, 圆柱壳将被破坏. 另外, 准静态问题的解可作为突加常值载荷作用下系统动力响应解的不动点, 且不动点的性质与动力响应解及圆柱壳运动的性质有关. 讨论了圆柱壳的厚度和载荷等参数对临界载荷值和圆柱壳运动特性的影响.

**关键词:** 超弹性圆柱壳; 非线性常微分方程; 周期性振动; 拟周期性振动; 临界载荷  
**中图分类号:** O343      **文献标识码:** A

## 引 言

近年来以橡胶、合成弹性体、高分子聚合物为代表的超弹性材料因其独特且不可替代的特性, 在国民经济各个领域均有日益广泛的重要应用. 由于事关材料的破坏机理, 超弹性材料和结构的稳定性问题受到极大的关注<sup>[1-3]</sup>. 代表性的例子是受内压超弹性薄膜的膨胀<sup>[4,5]</sup>和超弹性球壳或柱壳的大变形问题<sup>[6-8]</sup>. 目前大多数文献仅分析准静态问题, 这方面的研究成果很多, 如对受内压的超弹性圆柱壳, 在压力较小时柱壳保持均匀变形; 但当内压大于某一确定的极大值时, 柱壳可以产生非均匀变形, 柱壳的一部分会剧烈变形而其余部分只是轻微变形, 可使柱壳形如“灯泡”状. 但实际许多物理问题本质上是动态问题, 因此对问题的动力响应进行分析就很重要了. 一个代表性的例子是人体血管或动脉瘤要受到周期性或近似周期性内压的作用<sup>[9]</sup>. 因其大变形、高弹性特性及超弹性本构理论, 超弹性材料的动力学问题的数学模型, 一般是具有强非线性的微分方程的初边值问题, 动力响应问题的研究要比静态问题的研究困难一些; 因在突加常值载荷作用下, 系统为一自治系统, 这类问题的分析技巧已为人们所熟悉, 目前动力响应问题的分析结果大多仅限于突加常值载荷的作用<sup>[10-11]</sup>. 如对受到突加常值载荷作用的超弹性圆柱壳, 其运动为非线性的周期性振动. 但对随时间变化的周期性载荷作用的结构动力响应的分析尚少见报道. Haslach 和 Humphrey<sup>[12]</sup>曾分析了周期性载荷作用下处

\* 收稿日期: 2008-06-23; 修订日期: 2008-08-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772104; 10402018); 上海市重点学科建设资助项目(Y0103)

作者简介: 任九生(1970—), 男, 河南济源人, 副教授, 博士(Tel: + 86-21-66136910; E-mail: jsren@shu.edu.cn).

于粘性液体中的生物软组织材料和橡胶薄膜的动力响应,发现相图中在对应于静态解的不动点的周围存在封闭性的周期性轨线,且对橡胶模型存在从一个轨线到另一个轨线的跳跃.

本文的目的是根据有限变形动力学理论,进一步分析超弹性圆柱壳在周期性载荷或突加常值载荷作用下的变形和破坏等大变形动力响应问题.文中首先根据有限变形弹性理论,分析了在内表面均布载荷作用下,不可压超弹性圆柱壳的大变形准静态问题.准静态问题的解是突加常值载荷作用下,圆柱壳动力响应问题的解的不动点,不动点的性质与动力响应解或圆柱壳的运动性质有关.然后根据有限变形动力学理论,分析了突加常值载荷作用下和周期性载荷作用下,不可压超弹性圆柱壳的动力响应及破坏问题.首先从基本方程得到了问题的控制方程组,即描述圆柱壳内表面运动的二阶非线性常微分方程,通过对变换后的一阶方程组进行 Runge-Kutta 积分法数值模拟,得到了方程的解及振动的时程曲线、相图、Poincaré 截面图等结果.根据通常的动力学定性分析理论,讨论了圆柱壳的动力响应和各种条件下的破坏情况.发现对周期性载荷或突加常值载荷均存在一个确定的临界值,当它们小于这个临界值时,圆柱壳内表面随时间的演化是周期性的或拟周期性的非线性振动,而当它们大于这个临界值时,圆柱壳将被破坏.

## 1 问题的数学描述

考察一个内半径为  $A$ , 外半径为  $B$  的无限长不可压超弹性圆柱壳,在初始时刻  $t = 0$  于内表面受到突加内压  $p(t) = p_0 + p_1 \sin \omega t$  作用下的大变形运动和破坏问题.分别取物质坐标系和空间坐标系为  $(R, \Theta, Z)$  和  $(r, \theta, z)$ , 设圆柱壳的变形模式为

$$r = r(R, t), \quad \theta = \Theta, \quad z = Z \quad (A \leq R \leq B). \quad (1)$$

由材料的不可压条件,可得

$$r = r(R, t) = [(R^2 - A^2) + a^2]^{1/2}, \quad (2)$$

式中,  $a = r(A, t)$  为变形后圆柱壳的内半径,相应的圆柱壳的主伸长为

$$\lambda_1 = \frac{\partial r(R, t)}{\partial R} = \frac{R}{r}, \quad \lambda_2 = \frac{r(R, t)}{R} = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (3)$$

本文对圆柱壳的材料采用不可压 neo-Hookean 材料,其应变能函数为

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3), \quad (4)$$

式中,  $I_1 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$  为应变张量的第一不变量,  $\mu$  为材料小变形状态下的剪切模量.相应的非零应力分量为

$$\begin{cases} \tau_r(r, t) = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p(r, t) = \mu \lambda_1^2 - p(r, t), \\ \tau_{\theta\theta}(r, t) = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p(r, t) = \mu \lambda_2^2 - p(r, t). \end{cases} \quad (5)$$

圆柱壳的运动方程为

$$\frac{d\tau_r}{dr} + \frac{1}{r}(\tau_r - \tau_{\theta\theta}) = \rho \ddot{r} \quad (t \geq 0). \quad (6)$$

圆柱壳的边界条件为

$$\begin{cases} \tau_r(a, t) = -p(t), \\ \tau_r(b, t) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $b = r(B, t)$  为变形后圆柱壳的外半径. 满足无约束自然状态的初始条件为

$$r(R, 0) = R, \dot{r}(R, 0) = 0. \tag{8}$$

## 2 问题的求解

由不可压条件(2)可得

$$\dot{r}(t) = \frac{1}{r} \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) a\dot{r}^2 + a\ddot{a} \right]. \tag{9}$$

将应力分量(5)代入运动方程(6), 并利用(9)式可得

$$\frac{d}{dr} [\mu \lambda_1^2 - p(r, t)] + \frac{1}{r} [\mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] = \frac{\rho}{r} \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) a\dot{r}^2 + a\ddot{a} \right]. \tag{10}$$

上式对  $r$  积分, 可得

$$\begin{aligned} \mu \lambda_1^2 - p(r, t) + p(a, t) + \int_a^r \mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{ds}{s} = \\ \rho a^2 \frac{a^2 - r^2 + 2r^2 \ln r - 2r^2 \ln a}{2r^2} + \rho a \ddot{a} (\ln r - \ln a). \end{aligned} \tag{11}$$

将上式代入(5)式中第1式, 有

$$\begin{aligned} \tau_{rr}(r, t) = \rho a^2 \frac{a^2 - r^2 + 2r^2 \ln r - 2r^2 \ln a}{2r^2} + \rho a \ddot{a} (\ln r - \ln a) - \\ \int_a^r \mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{ds}{s} - p(a, t), \end{aligned} \tag{12}$$

代入(7)式可得  $p(a, t) = p(t)$  及

$$\begin{aligned} p(t) = \rho a^2 \frac{a^2 - b^2 + 2b^2 \ln b - 2b^2 \ln a}{2b^2} + \rho a \ddot{a} (\ln b - \ln a) - \\ \int_a^b \mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{ds}{s}. \end{aligned} \tag{13}$$

引入变换

$$\frac{a}{A} = x(t), \frac{B^2}{A^2} - 1 = \delta,$$

则有

$$\frac{b^2}{A^2} = x^2(t) + \delta, \frac{b^2}{B^2} = \frac{x^2 + \delta}{\delta + 1}, \frac{b}{a} = \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}}.$$

令  $\xi = r/R$ , 则有

$$\xi = \left( 1 - \frac{a^2 - A^2}{r^2} \right)^{-1/2}, \frac{dr}{r} = \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{d\xi}{\xi}.$$

于是, (13)式可改写为

$$\begin{aligned} p(t) = \rho A^2 x^2 \left[ \frac{-\delta}{2(x^2 + \delta)} + \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}} \right] + \rho A^2 x \ddot{x} \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}} - \\ \int_x^{\sqrt{(x^2 + \delta)/(\delta + 1)}} \left[ \frac{\mu(\xi^2 - \xi^2)}{\xi(1 - \xi^2)} \right] d\xi = \\ \rho A^2 x^2 \left[ \frac{-\delta}{2(x^2 + \delta)} + \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}} \right] + \rho A^2 x \ddot{x} \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}} + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1+\delta}{\delta+x^2} - \frac{1}{2x^2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln \frac{\delta+x^2}{1+\delta}, \quad (14)$$

其中  $a = xA$ ,  $b = \sqrt{x^2 + \delta}A$ .

相应的初始条件为

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \quad (15)$$

现引入变换  $x_1 = x, x_2 = x'$ , 则二阶微分方程(14)可改写为

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \frac{1}{x_1 \ln \sqrt{1+\delta/x_1^2}} \left[ \frac{1}{\rho A^2} \left( -\frac{1}{2} \frac{1+\delta}{\delta+x_1^2} + \frac{1}{2x_1^2} + \ln x_1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\delta+x_1^2}{1+\delta} \right) \right] + \\ \frac{1}{x_1 \ln \sqrt{1+\delta/x_1^2}} \left[ \frac{p(t)}{\rho A^2} - x_2^2 \left( \frac{-\delta}{2(x_1^2+\delta)} + \ln \sqrt{1+\frac{\delta}{x_1^2}} \right) \right]. \end{cases} \quad (16)$$

对应的初始条件为

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0. \quad (17)$$

### 3 准静态问题的解

在内表面均匀载荷作用下, 不可压超弹性圆柱壳的大变形准静态问题的解, 是突加常值载荷作用下, 圆柱壳动力响应问题解的不动点, 而不动点的性质与这个自治系统动力响应解或圆柱壳的运动性质有关. 变形载荷关系曲线是准静态问题的核心, 为此在运动方程(6)中, 令方程右端的惯性项等于0, 即得到圆柱壳在径向均布内压  $p_0$  作用下的准静态问题的平衡方程, 由类似的推导过程可得

$$p_0 = \int_{v(B)}^{v(A)} \frac{\mu(v^{-3} - v)}{v^2 - 1} dv, \quad (18)$$

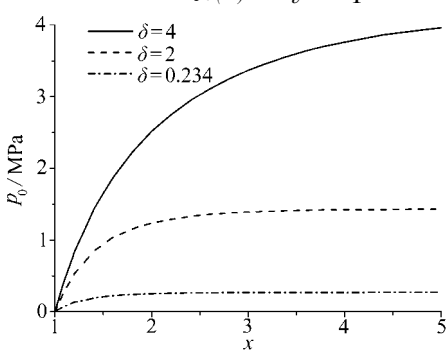


图 1 圆柱壳的变形曲线

式中,  $v = v(R) = r(R)/R = \left(1 + (a^2 - A^2)/R^2\right)^{1/2}$ ,  $v(B) = \left(1 + (a^2 - A^2)/B^2\right)^{1/2}$ ,  $v(A) = a/A = x$  表示圆柱壳内半径的变形程度.

由(18)式可得到不同厚度比下圆柱壳的变形载荷关系曲线, 如图 1 所示, 其中材料参数给定:  $\mu = 2.63 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$ . 由图可见, 圆柱壳的变形随内压的增加而增加, 但存在一水平的渐近线, 当内压接近于这一渐近线对应的载荷值时, 圆柱壳的变形可快速增加, 这意味着圆柱壳的破坏, 因此这一载荷值可作为圆柱壳被破坏的临界载荷值. 如对厚度比分别为  $\delta = 0.234, 2.0, 4.0$  的圆柱壳, 其对应的临界载荷值分别为  $0.28 \text{ MPa}, 1.45 \text{ MPa}$  和  $4.12 \text{ MPa}$ . 即厚度比大的圆柱壳的破坏更困难.

### 4 突加常值载荷作用下的动力响应

对突加常值载荷  $p(t) = p_0$  的特殊情况, 动力系统是自治的, 将(14)式对  $x$  积分, 可得

$$x^2 \ln \sqrt{1 + \frac{\delta}{x^2}} - \frac{2}{\rho A^2} \int_1^x \left[ \frac{1}{2} \frac{1+\delta}{\delta+x^2} - \frac{1}{2x^2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln \frac{\delta+x^2}{1+\delta} \right] dx -$$

$$\frac{p_0}{\Omega^2}(x^2 - 1) = 0. \tag{19}$$

根据通常的振动理论,当且仅当相图中的  $x \sim \dot{x} = V$  曲线是一条有有限周期  $T = \oint \frac{dx}{V}$  的封闭曲线时,运动  $x(t)$  才是周期的. 对给定的载荷  $p_0$ , 如果当  $V = 0$  时, (19) 式存在  $x > 0$  的根, 则周期性的运动就会产生. 在(19) 式中令  $V = \dot{x} = 0$ , 有

$$2 \int_1^x x \left[ \frac{1}{2} \frac{1+\delta}{\delta+x^2} - \frac{1}{2x^2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln \frac{\delta+x^2}{1+\delta} \right] dx - \frac{p_0}{\Omega^2}(x^2 - 1) = 0. \tag{20}$$

由(20) 式求得不同参数下对应于给定载荷  $p_0$  的  $x$  的值, 此即振动过程中圆柱壳内表面的最大值, 记为  $x_{\max}$ ,  $x_{\max}$  与  $p_0$  的关系曲线如图 2 所示; 而后对应不同的  $x_{\max}$ , 可由(19) 式求得速度  $V = \dot{x}$  与  $x$  的关系曲线, 即运动的相图, 不同参数下的相图如图 3 所示.

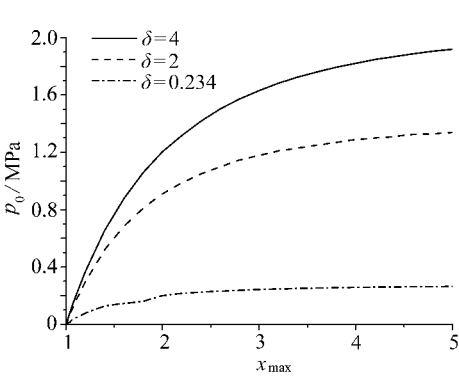


图 2  $x_{\max} \sim p_0$  关系曲线

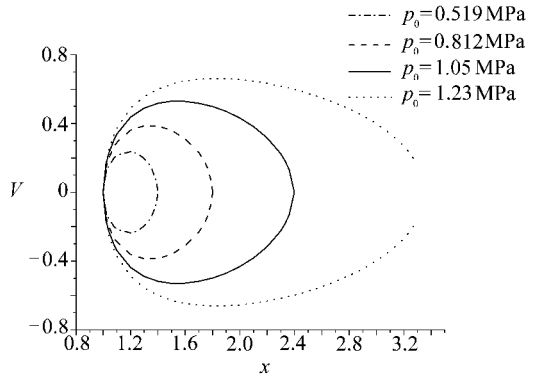


图 3 相图 ( $\delta = 2$ )

由图 3 可见, 对某一圆柱壳, 对突加常值内压总是存在一个临界载荷值  $p_{cr}$  (如当  $\delta = 2$  时,  $p_{cr} = 1.204$  MPa),  $p_0 < p_{cr}$  时的相图是一条封闭的曲线, 相应的圆柱壳的运动是周期振动. 但  $p_0 \geq p_{cr}$  时的相图不是封闭的曲线, 相应的圆柱壳的运动不再是周期振动, 此时方程的解随着时间的增大无限制的增大, 表明圆柱壳随着时间的增加最终必将被破坏. 另外, 随圆柱壳厚度比的减小, 临界载荷  $p_{cr}$  变小, 表明圆柱壳越薄, 越容易被破坏.

突加常值载荷作用下, 动力系统为一自治系统, 系统的不动点为  $(x_1, x_2) = (x_s, 0)$ , 这里  $x_s$  为相应准静态问题的解, 即在同一载荷作用下的变形. 而不动点的性质与自治系统动力响应解或圆柱壳运动的性质有关, 根据通常的振动理论需由微分方程组在不动点处的 Jacobi 矩阵讨论不动点的性质. 由方程(16) 给出的不动点处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}_{(x_s, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ J_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

式中

$$J_{21} = \frac{1}{x_s \ln(1 + \delta/x_s^2)} \left\{ \frac{2\mu}{\Omega^2} \left[ -\frac{1}{x_s^3} - \frac{2x_s}{\delta + x_s^2} + \frac{1}{x_s} + \frac{(1 + \delta)x_s}{(\delta + x_s^2)^2} \right] + \frac{2\delta}{x_s^4 (1 + \delta/x_s^2) \ln(1 + \delta/x_s^2)} \left[ \frac{p_0}{\Omega^2} + \frac{\mu}{\Omega^2} \left[ \frac{1}{2x_s^2} - \frac{1 + \delta}{2(\delta + x_s^2)} + \ln x_s - \ln \frac{\delta + x_s^2}{1 + \delta} \right] \right] + \frac{1}{x_s^2 \ln(1 + \delta/x_s^2)} \left[ \frac{2p_0}{\Omega^2} + \frac{2\mu}{\Omega^2} \left[ \frac{1}{2x_s^2} - \frac{1 + \delta}{2(\delta + x_s^2)} + \ln x_s - \ln \frac{\delta + x_s^2}{1 + \delta} \right] \right] \right\}. \tag{22}$$

可见 Jacobi 矩阵的迹总是  $\text{tr}J = J_{11} + J_{22} = 0$ , 而 Jacobi 矩阵的行列式  $D = \det |J| = -J_{21}$ . 由(22)式所得对应于  $\delta = 2$  的圆柱壳的 Jacobi 矩阵的行列式的数值结果如表 1 所示.

表 1 Jacobi 矩阵行列式的数值结果 ( $\delta = 2$ )

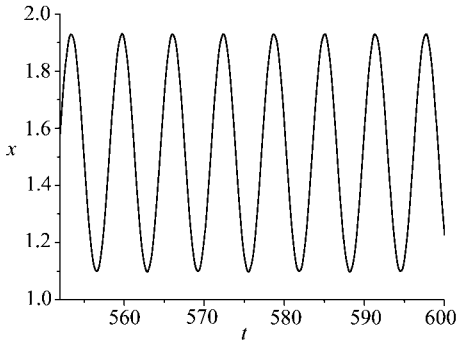
$x_s$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$D$	$6.6 \times 10^6$	$3.46 \times 10^6$	$1.51 \times 10^6$	$0.78 \times 10^6$	$0.66 \times 10^6$	$0.48 \times 10^6$	$0.42 \times 10^6$	$0.19 \times 10^6$	$-0.16 \times 10^6$

根据通常的振动理论, 如果  $D < 0$ , 则不动点是一个不稳定的鞍点; 如果  $\text{tr}J = 0, D > 0$ , 则不动点是一个稳定的中心. 表 1 的结果表明, 对  $\delta = 2$  的圆柱壳, 当  $p_0 < p_{cr} = 1.204 \text{ MPa}$ , 即  $x_s < 1.9$  时, 不动点是一个中心点, 而当  $p_0 \geq p_{cr} = 1.204 \text{ MPa}$  时, 不动点是一个鞍点. 通常, 中心点周围总有同宿或异宿轨线环绕, 如对  $\delta = 2$  的圆柱壳, 在常值载荷  $p_0 = 1.04 \text{ MPa}$  作用下,  $(x_s, 0) = (1.6, 0)$  就是如相图图 3 中实线所示拥有如下两点  $(x(0), 0) = (1.0, 0)$  和  $(x_{max}, 0) = (2.4, 0)$  的封闭的同宿轨线的中心点.

## 5 周期载荷作用下的动力响应

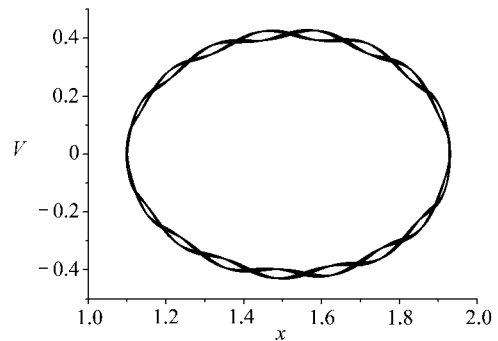
实际上, 如橡胶胶管和血管要受到周期性载荷或近似周期性载荷的作用, 为了分析结构的稳定性及结构的破坏, 需要讨论此类结构对周期载荷的动力响应, 因此这里讨论圆柱壳在形如  $p(t) = p_1 + p_2 \sin \Omega t$  的周期载荷作用下的动力响应与破坏.

在  $p(t) = p_1 + p_2 \sin 3\pi t$  的周期载荷作用下, 对一阶微分方程组(16)进行 Runge-Kutta 法数值积分, 可得到结构的时程曲线、相图及 Poincaré 截面图等结果. 代表性的一条时程曲线示于图 4, 5 个相图示于图 5~ 图 9, 两个 Poincaré 截面图示于图 10~ 图 11.



$\delta = 2, p_1 = 0.3 \text{ MPa}, p_2 = 0.1 \text{ MPa}$

图 4 时程曲线

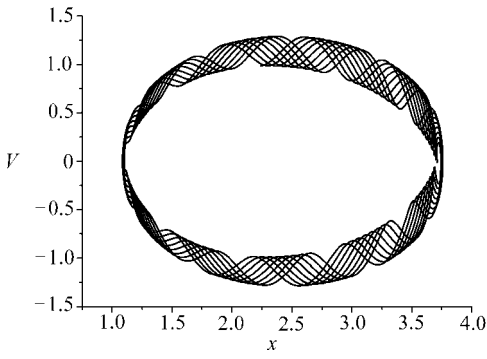


$\delta = 2, p_1 = 0.3 \text{ MPa}, p_2 = 0.1 \text{ MPa}$

图 5 相图

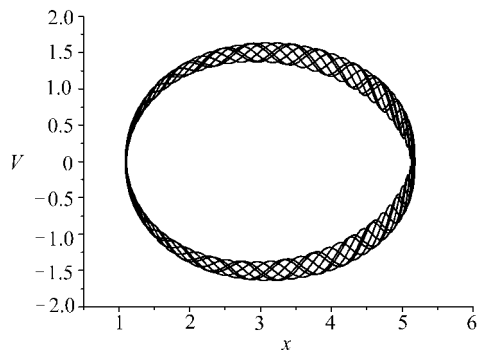
对周期载荷  $p(t) = p_1 + p_2 \sin \Omega t$  而言, 其平均应力  $p_m = p_1 + p_2$ . 计算结果表明, 对给定的载荷幅值  $p_2$  和载荷频率  $\omega$ , 存在平均应力的一个临界值  $p_{cr}^m$ . 当  $p_m < p_{cr}^m$  时, 图 4~ 图 11 给出的时程曲线、相图及 Poincaré 截面图等结果可通过数值计算得到, 且图 4~ 图 11 各图表明在周期载荷作用下, 圆柱壳的运动为拟周期性的非线性振动. 但当  $p_m \geq p_{cr}^m$  时, 不能得到图 4~ 图 11 各图, 意味着圆柱壳将被载荷破坏.

另外, 计算结果表明, 载荷幅值  $p_2$  和载荷频率  $\omega$  对临界载荷值  $p_{cr}^m$  的影响可忽略不计, 如对  $\delta = 2$  的圆柱壳其临界载荷值  $p_{cr}^m$  总是为  $1.4 \text{ MPa}$ .



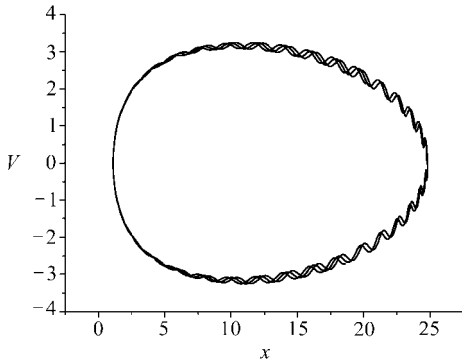
$\delta = 2, p_1 = 0.8 \text{ MPa}, p_2 = 0.7 \text{ MPa}$

图6 相图



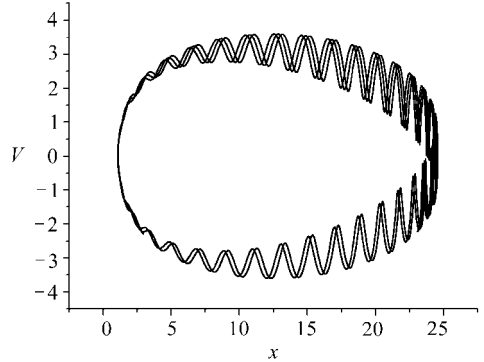
$\delta = 2, p_1 = 1.0 \text{ MPa}, p_2 = 0.5 \text{ MPa}$

图7 相图



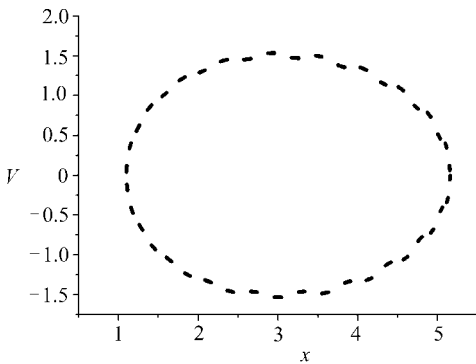
$\delta = 2, p_1 = 1.4 \text{ MPa}, p_2 = 0.1 \text{ MPa}$

图8 相图



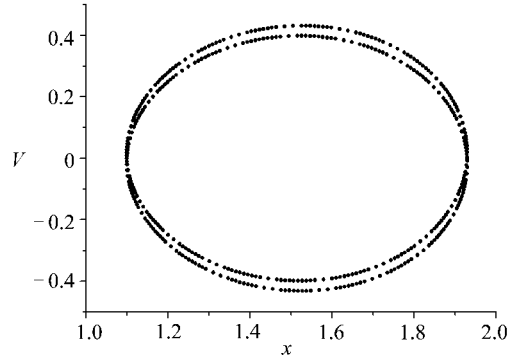
$\delta = 2, p_1 = 1.4 \text{ MPa}, p_2 = 0.5 \text{ MPa}$

图9 相图



$\delta = 2, p_1 = 1.0 \text{ MPa}, p_2 = 0.1 \text{ MPa}$

图10 Poincaré 截面图



$\delta = 2, p_1 = 1.4 \text{ MPa}, p_2 = 0.1 \text{ MPa}$

图11 Poincaré 截面图

## 6 结 论

本文通过有限变形动力学理论, 分析了一类不可压超弹性圆柱壳, 在周期载荷或突加常值载荷作用下的动力响应和破坏问题. 对受均匀内压作用的圆柱壳的准静态问题, 存在内压的一个临界值, 当内压接近于该值时, 圆柱壳的变形快速增加, 圆柱壳将被破坏. 准静态问题的解是突加常值载荷作用下圆柱壳动力响应问题解的不动点, 不动点的性质与圆柱壳的运动性

质有关. 对突加常值载荷也存在一个临界载荷值, 当载荷小于这个临界值时, 不动点是一个稳定的中心, 周围环绕封闭的轨线, 圆柱壳的运动是非线性周期振动. 但当载荷大于这个临界值时, 不动点是一个不稳定的鞍点, 相图不是封闭的曲线, 圆柱壳随时间的增加将被破坏. 通过对描述圆柱壳运动的非线性常微分方程解的数值模拟, 发现对周期载荷也存在着其平均应力的一个临界值, 当平均应力小于这个临界值时, 时程曲线、相图及 Poincaré 截面图可通过数值计算得到, 圆柱壳的运动为拟周期性的非线性振动. 但当平均应力大于这个临界值时, 不能得到以上各图, 圆柱壳将被载荷破坏. 周期载荷或突加常值载荷作用下, 圆柱壳破坏的临界载荷值小于准静态载荷作用下圆柱壳破坏的临界载荷值, 而且突加常值载荷作用下的临界载荷值最低.

### [参 考 文 献]

- [1] Fu Y B, Ogden R W. Nonlinear Elasticity [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [2] Beatty M F. Topics in finite elasticity[J]. Applied Mechanics Review, 1987, **40**(12): 1699-1734.
- [3] Gent A N. Elastic instability in rubber[J]. Internat J Non-Linear Mech, 2005, **40**(2): 165-175.
- [4] Gent A N. Elastic instability of inflated rubber shells[J]. Rubber Chem Technology, 1999, **72**(2): 263-268.
- [5] Needleman A. Inflation of spherical rubber balloons[J]. Internat J Solids and Structures, 1977, **13**(3): 409-421.
- [6] Haughton D M, Ogden R W. On the incremental equations in non-linear elasticity—II: Bifurcation of pressurized spherical shells[J]. J Mech Phys Solids, 1978, **26**(1): 111-138.
- [7] Haughton D M, Ogden R W. Bifurcation of inflated circular cylinders of elastic material under axial loading—II: Exact theory for thick-walled tubes[J]. J Mech Phys Solids, 1979, **27**(4): 489-512.
- [8] 任九生, 程昌钧. 不可压热超弹性圆筒的稳定性[J]. 力学学报, 2007, **39**(2): 283-288.
- [9] Shah A D, Humphrey J D. Finite strain elastodynamics of intracranial aneurysms[J]. J Biomech, 1999, **32**(3): 593-595.
- [10] Guo Z H, Solecki R. Free and forced finite amplitude oscillations of an elastic thick-walled hollow sphere made of incompressible material[J]. Arch Mech Stos, 1963, **15**(3): 427-433.
- [11] Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells[J]. J Elasticity, 1983, **13**(1): 17-47.
- [12] Haslach A D, Humphrey J D. Dynamics of biological soft tissue and rubber: internally pressurized spherical membranes surrounded by a fluid[J]. Internat J Non-Linear Mech, 2004, **39**(3): 399-420.



# Dynamical Response of Hyper-Elastic Cylindrical Shells Under Periodic Load

REN Ji-sheng

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

**Abstract:** The dynamical response such as the motion and destruction of hyper-elastic cylindrical shells subjected to periodic or a suddenly applied constant load on the inner surface are studied within the framework of finite elastodynamics. It was proved that there exists a certain critical value for the internal load through the numerical computing and dynamic qualitative analysis of the nonlinear differential equation that describes the motion of the inner surface of the shell. The motion of the shell is nonlinear periodic or quasi-periodic oscillation when the mean load of the periodic load or the constant load is less than its critical value. But the shell will be destroyed when the load exceeds the critical value. The solution of the static equilibrium problem is the fixed point for the dynamical response of the corresponding system under a suddenly applied constant load. The property of the fixed point is related to the property of the dynamical solution and the motion of the shell. The effects of the thickness and the load parameters on the critical value and the oscillation of the shell were discussed.

**Key words:** hyper-elastic cylindrical shells; nonlinear differential equation; periodic oscillation; quasi-periodic oscillation; critical load