

# 热冲击荷载作用下的含球形空腔的广义 热弹性功能梯度球形各向同性体\*

M·K·戈西<sup>1</sup>, M·卡诺瑞阿<sup>2</sup>

(1. 塞拉姆坡学院 数学系, 塞拉姆坡, 胡里-712 201, 印度;

2. 加尔各答大学 应用数学系, 加尔各答-700 009, 印度)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 在带两个松弛时间参数的广义热弹性线性理论(Green 和 Lindsay 理论) 意义上, 研究含一个球形空腔的功能梯度球形各向同性无限大弹性介质中, 热弹性位移、应力和温度的求解方法. 空腔表面无应力, 但承受一个随时间变化的热冲击荷载作用. 在 Laplace 变换域中, 给出了一组矢量-矩阵微分方程形式的基本方程, 并用特征值方法求解. 应用 Bellman 方法进行数值逆变换. 计算了位移、应力和温度, 并给出相应的图形. 结果表明, 材料热物理性质的变化, 对荷载响应的影响非常强烈. 并与对应的均匀材料进行了比较和分析.

**关键词:** 广义热弹性; 功能梯度材料(FGM); Green-Lindsay 理论; 矢量-矩阵微分方程; Bellman 方法

**中图分类号:** O343.6 **文献标识码:** A

## 引 言

传统的耦合动态热弹性理论与实际的物理观测并不相符, 该理论是以 Biot<sup>[1]</sup> 和 Chadwick<sup>[2]</sup> 的抛物-双曲混合型方程为基础, 热信号的传播速度将是无限大的. 为使二者协调, 发展成广义热弹性理论, 保证弹性固体中热信号的传播速度是有限的(第二声速). 第一个广义理论是由 Lord 和 Shulman<sup>[3]</sup> 提出的, 它在热通量-温度梯度关系中, 包括了一个松弛时间参数. 该理论在 Fourier 热传导方程中引入了通量率(flux-rate) 项, 用公式表示的广义形式热传导方程呈双曲型, 确保了热信号的传播速度是有限的. Green 和 Lindsay<sup>[4]</sup> 提出了另一个模型, 依赖于温度率(temperature-rate) 的热弹性理论, 它包括了 2 个松弛时间参数. 该理论服从 Fourier 热传导定律, 并断言热传播速度是有限的. Tzou<sup>[5]</sup> 和 Mitra 等人<sup>[6]</sup> 对这一理论的实验研究表明, 在冲击波传播、激光技术、裂纹尖端急剧扩展等问题中, 松弛时间起着非常显著的作用. 在一个短时间内发生很大的热通量时, 热弹性传播理论不是一个合格的模型, 而广义热弹性理论正是供选择的合适的数学模型. 相关的文献参见 Chandrasekharaiah 的论文<sup>[7]</sup>.

应用上述广义热弹性理论, 求解了几个问题. 为求解耦合热弹性问题, 通常要选择适当的

\* 收稿日期: 2008-02-13; 修订日期: 2008-06-30

作者简介: M. Kanoria(联系人, E-mail: k\_mri@yahoo.com).

本文原文为英文, 韦轶译, 张禄坤校.

热弹性势函数. 但正如 Bahar 和 Hetnarski<sup>[8]</sup> 指出的, 该方法有某些局限性. Ezzat<sup>[9]</sup> 导出了柱形区域中, 带两个松弛时间参数的广义理论的基本解. Hetnarski 和 Ignaczak<sup>[10]</sup> 根据广义热弹性理论, 研究了短脉冲激光的半空间响应. Bagri 和 Eslami<sup>[11]</sup> 基于 Lord-Shulman 理论, 讨论了圆盘的一维广义热弹性问题. Kar 和 Kanoria<sup>[12]</sup> 在一个极大的均质各向同性体中, 研究了边界上球形孔洞逐步输入温度时引起的广义应力分布. Das 和 Lahiri<sup>[13]</sup> 研究了带一个松弛时间参数的横观各向同性介质的广义热弹性问题. Kanoria 和 Kar<sup>[14]</sup> 研究了均匀横观各向同性环形盘中的广义应力. Ghash 和 Kanoria<sup>[15]</sup> 根据两个松弛时间参数的广义热弹性线性理论 (Green 和 Lindsay 理论), 研究了无限大球形各向同性弹性介质中含一个球形空腔时的热弹性问题. 热冲击和非常高的温度, 必然引起热应力的急增, 并导致结构部件 (例如航空器发动机、涡轮机、航天器等) 灾难性的损坏. 为避免这类损坏, Aboudi 等人<sup>[16]</sup> 及 Wetherhold 和 Wang<sup>[17]</sup> 讨论功能梯度材料的应用. 微结构是这类材料的特色, 是宏观尺度上的空间变量, 最初是针对高温作用问题开发的. 这类材料的热和机械性能的特定改变, 对荷载响应的影响非常大. Sugano<sup>[18]</sup> 给出了一维非均匀板瞬态热应力问题的解析解. 板的导热系数和弹性模量呈指数变化, 而 Poisson 比和线性热膨胀系数沿厚度方向任意变化. Qian 和 Batra<sup>[19]</sup> 研究了功能梯度厚板的瞬态热弹性变形问题, 厚板边缘保持恒温. Lutz 和 Zimmernan<sup>[20]</sup> 给出了一维功能梯度球的热应力精确解, 球的弹性模量和线性热膨胀系数随径向距离呈线性变化. Ye 等人<sup>[21]</sup> 给出了均匀受热的、功能梯度横观各向同性柱壳轴对称热弹性问题的精确解, 柱壳的弹性模量和线性热膨胀系数随径向坐标变量的幂律变化. Chen 等人<sup>[22]</sup> 求解了球形各向同性功能梯度 (球形空腔充满液体的) 材料的自由振动. Ding 等人<sup>[23]</sup> 分析调查了球形各向同性功能梯度 (球形空腔) 材料的热弹性动力响应, 引入了一个因变量来阐明该问题, 并应用了变量分离技术. Chen 等人<sup>[24]</sup> 在严格的弹性-电场中, 求解了带有功能梯度性质的压电陶瓷旋转球壳问题. Wang 和 Mai<sup>[25]</sup> 利用有限元法, 研究了非均匀板、柱、球的一维瞬态热应力问题. Shao 等人<sup>[26]</sup> 求解了功能梯度空心圆柱的热-机械问题, 他们假定材料性能与温度无关, 并且在径向连续变化. Mallik 和 Kanoria<sup>[27]</sup> 在无能量耗散广义热弹性理论意义上, 存在着周期变化热源作用时, 将一个无限大各向同性功能梯度材料问题作为一维的热弹性扰动考虑. 在该研究中, 假定材料性能随空间变量呈指数变化. Green-Lindsay 和 Green-Naghdi 将 Lord-Shulman 提出的广义耦合热弹性理论, 和 Bagri 和 Eslami<sup>[28]</sup> 引入的统一参数, 组合成统一的公式. Chen<sup>[29]</sup> 研究了球形各向同性旋转弹性功能梯度材料 (球形空腔) 的应力分布. Obata 和 Noda<sup>[30]</sup> 研究了空心圆柱功能梯度材料 (空心球) 热应力的求解问题. Ootao 和 Tanigawa<sup>[31]</sup> 在一个功能梯度圆柱面板上, 作用着环向不均匀热荷载时, 提出了瞬态热弹性问题的理论分析.

本文的主要目的是, 在带两个松弛时间参数的广义热弹性线性理论 (Green 和 Lindsay 模型) 意义上, 研究功能梯度球形各向同性无限大弹性介质 (含有球形空腔) 中, 产生的热弹性位移、应力和温度的分布. 空腔表面无应力, 但作用着随时间变化的热冲击. 假设功能梯度材料的热性能和机械性能按径向坐标变量的幂律变化. 利用 Das 等人<sup>[32]</sup> 提出的特征值方法, 得到该理论结果的数值解, 并绘制了图形, 还与对应的均匀材料进行了比较.

## 1 基本方程

运动方程为<sup>[33]</sup>

$$\rho \dot{u}_i = \sigma_{ij,j}, \quad (1)$$

其中,  $u_i$  为位移分量; 又, 应力张量  $\sigma_{ij}$  由下式给出:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0 + t_1 T). \quad (2)$$

同时, 无热源时的广义热传导方程为

$$\left[ \left\{ \delta_{1s} K_{ij} + \delta_{2s} \left[ K_{ij}^* + K_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} T_{,j} \right]_{,i} = \rho C_E \left[ \delta_{1s} T_{,s} + (\delta_{1s} t_2 + \delta_{2s}) \dot{T} \right] + T_0 \left[ \zeta \delta_{1s} + \delta_{2s} \frac{\partial}{\partial t} \right] \beta_{ij} e_{ij}, \quad (3)$$

其中,  $C_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) 为弹性系数,  $e_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) 为应变分量,  $\beta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 为弹性模量,  $T$  为绝对温度,  $T_0$  为参考温度,  $t_1$  和  $t_2$  为松弛时间,  $K_{ij}$  为热传导系数,  $K_{ij}^*$  为附加材料常数,  $\rho$  为质量密度,  $C_E$  为常应变固体的比热容,  $\delta_{is}$  为 Kronecker 符号.

在方程(2)和(3)中:

(i) 若取  $t_1 = 0, t_2 = 0, s = 1, \zeta = 0$ , 则它们退化为经典热弹性(CTE)理论方程;

(ii) 若取  $t_1 = 0, t_2 = 0, s = 1, \zeta = 1$ , 则它们退化为经典热弹性耦合(CCTE)理论方程;

(iii) 若取  $s = 1, \zeta = 1$ , 则它们退化为依赖温度-速率的热弹性(TRDTE(G-L模型))理论方程;

(iv) 若取  $s = 2$ , 则它们退化为具能量耗散的热弹性(TEWED(G-N模型))理论方程.

热松弛时间满足不等式<sup>[4]</sup>

$$t_1 \geq t_2 > 0, \quad \text{G-L理论情况.}$$

对于功能梯度材料, 参数  $\rho, C_{ijkl}, \beta_{ij}, K_{ij}$  和  $K_{ij}^*$  是空间变量的因变量. 我们用  $\rho f(\mathbf{r}), C_{ijkl} f(\mathbf{r}), \beta_{ij} f(\mathbf{r}), K_{ij} f(\mathbf{r})$  和  $K_{ij}^* f(\mathbf{r})$  对应替换之, 其中假设  $\rho, C_{ijkl}, \dots$  为常数,  $f(\mathbf{r})$  为空间变量  $\mathbf{r}$  的一个已知的无量纲函数, 则方程(1)~(3)变为(为简便计省去了字母上“'”号)

$$f(\mathbf{r}) \dot{u}_i = [C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0 + t_1 T)]_{,j} f(\mathbf{r}) + [C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0 + t_1 T)] f(\mathbf{r})_{,j}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = [C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0 + t_1 T)] f(\mathbf{r}), \quad (5)$$

$$\left[ f(\mathbf{r}) \left\{ \delta_{1s} K_{ij} + \delta_{2s} \left[ K_{ij}^* + K_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} T_{,j} \right]_{,i} = \rho C_E f(\mathbf{r}) \left\{ \delta_{1s} T_{,s} + (\delta_{1s} t_2 + \delta_{2s}) \dot{T} \right\} + T_0 \left[ \zeta \delta_{1s} + \delta_{2s} \frac{\partial}{\partial t} \right] \beta_{ij} e_{ij} f(\mathbf{r}). \quad (6)$$

## 2 问题的数学描述

本文讨论一个功能梯度球形各向同性无限大固体, 其中含一个半径为  $a$  的球形空腔. 空腔表面没有应力, 对它突然加热, 并且保持其温度随时间变化. 同时假设, 介质内部既无体力作用又无热源作用.

我们利用原点位于空腔中心的球面极坐标  $(r, \theta, \phi)$ , 认为热弹性相互作用是球对称的, 得到位移矢量  $\mathbf{u}$  和温度  $T$  为

$$\mathbf{u} = (u(r, t), 0, 0), \quad T = T(r, t), \quad (7)$$

则

$$e_r \equiv e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} \equiv e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} = \frac{u}{r}, \quad (8)$$

其中, 径向、纬向和经向的应力  $\sigma_r, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\phi\phi}$  分别为

$$\sigma_r(r, t) = \sigma(r, t), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, t) = \sigma_{\phi\phi}(r, t) = \alpha(r, t). \quad (9)$$

假设材料性能仅依赖于径向坐标  $r$ , 因此可取  $f(\mathbf{r}) = f(r)$ .

基于 Green-Lindsay 理论,在广义热弹性线性理论意义上,球形各向同性体的本构方程正如 Wang 等人<sup>[34]</sup>给出的

$$\sigma_r = [C_{11}e_r + 2C_{12}e_\theta - \beta_r(T - T_0 + t_1T)]f(r), \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = [C_{12}e_r + (C_{22} + C_{23})e_\theta - \beta_\theta(T - T_0 + t_1T)]f(r), \quad (11)$$

且

$$\beta_j = \beta_i \delta_{ij}, \quad K_{ij} = K_i \delta_{ij} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}),$$

不计体力时,运动方程(4)变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} [C_{11}e_r + 2C_{12}e_\theta - \beta_r(T - T_0 + t_1T)]f(r) + \\ & \frac{2}{r} [C_{11}e_r + 2C_{12}e_\theta - \beta_r(T - T_0 + t_1T) - \\ & C_{12}e_r - (C_{22} + C_{23})e_\theta + \beta_\theta(T - T_0 + t_1T)]f(r) = \rho(r) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

不考虑热源时,热传导方程(6)退化为(G-L模型中取  $s = 1, \zeta = 1$ )

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ K_r f(r) r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \\ & \left[ \rho C_E \left( \frac{\partial T}{\partial t} + t_2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) + T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \beta_r \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_\theta \frac{2u}{r} \right] \right] f(r). \end{aligned} \quad (13)$$

问题归结在下列边界条件下求解方程(12)、(13):

(i) 无应力边界

$$\sigma_r(r, t) = 0, \quad \text{在 } r = a \text{ 上}; \quad (14)$$

(ii) 热荷载变化

$$T(r, t) = T_0 \{1 + F(t)\}, \quad \text{在 } r = a \text{ 上}; \quad (15)$$

其中,  $F(t)$  为时间  $t$  的已知函数.

初始条件和一致性条件为

$$\begin{cases} u = 0 = T, & t = 0, r \geq a, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 = \frac{\partial T}{\partial t}, & t = 0, \\ u = 0 = T, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (16)$$

引入如下无量纲量:

$$\begin{cases} r^* = Vr, \quad a^* = Va, \quad u^* = Vu, \\ \sigma_j^* = \frac{\sigma_j}{C_{11}}, \quad t^* = V^2 \eta t, \quad t_1^* = V^2 \eta t_1, \\ t_2^* = V^2 \eta t_2, \quad T_1 = \frac{T - T_0}{T_0}, \\ V = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad \eta = \frac{\rho C_E}{K_r}. \end{cases} \quad (17)$$

利用这些无量纲变量,并取  $f(r) = f^*(r^*)$ , 则方程(10)~(13)变为(为简便,略去了字母上角标“\*”)

$$\sigma_r = \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2C_{12}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_r T_0}{C_{11}} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] f(r), \quad (18)$$

$$\sigma_\theta = \left[ \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{C_{22} + C_{23}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_\theta T_0}{C_{11}} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] f(r), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2C_{12}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_r T_0}{C_{11}} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right\} f(r) \right] + \\ & \frac{2}{r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2C_{12}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_r T_0}{C_{11}} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] f(r) - \\ & \frac{2}{r} \left[ \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{C_{22} + C_{23}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_r T_0}{C_{11}} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] f(r) = f(r) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ K_r T_0 f(r) r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right] = \\ & \Theta_0 C_E f(r) \left[ \frac{\partial T_1}{\partial t} + t_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} \right] + T_0 f(r) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \beta_r \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_0 \frac{2u}{r} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

### 3 材料的不均匀性(按幂律变化)

取  $f(r) = r^n$ ,  $n$  为无量纲常数, 则方程 (18) ~ (21) 变为

$$\alpha_r = \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2C_{12}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_r T_0}{C_{11}} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] r^n, \quad (22)$$

$$\alpha_\theta = \left[ \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{C_{22} + C_{23}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_r T_0}{C_{11}} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] r^n, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n+2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \left[ \frac{C_{22} + C_{23} - (n+1)C_{12}}{C_{11}} \right] \frac{u}{r^2} - \\ & \frac{T_0 \beta_r}{C_{11}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) - \frac{2(N - (n+2)/2)}{r} \left( T_1 + t_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{n+2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{\partial T_1}{\partial t} + t_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + \frac{\beta_r}{K_r \eta} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2Nu}{r} \right), \quad (25)$$

其中,  $N = \beta_0/\beta_r$ .

### 4 Laplace 变换域中的矢量-矩阵微分方程

定义函数  $g(r, t)$  的 Laplace 变换为

$$g(r, p) = \int_0^\infty g(r, t) e^{-pt} dt, \quad (26)$$

且  $\text{Re}(p) > 0$ .

对方程 (22) ~ (25) 等号两边取 Laplace 变换, 有

$$\alpha_r = \left[ \frac{du}{dr} + \frac{2C_{12}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{\beta_r T_0}{C_{11}} (1 + t_1 p) T_1 \right] r^n, \quad (27)$$

$$\alpha_\theta = \left[ \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{du}{dr} + \frac{C_{22} + C_{23}}{C_{11}} \frac{u}{r} - \frac{N\beta_r T_0}{C_{11}} (1 + t_1 p) T_1 \right] r^n, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n+2}{r} \frac{du}{dr} - 2 \left[ \frac{C_{22} + C_{23} - (n+1)C_{12}}{C_{11}} \right] \frac{u}{r^2} - \\ & \frac{T_0 \beta_r (1 + t_1 p)}{C_{11}} \left[ \frac{d}{dr} - \frac{2(N - (n+2)/2)}{r} \right] T_1 = p^2 u, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{n+2}{r} \frac{dT_1}{dr} = p(1 + t_2 p) T_1 + \frac{p\beta_r}{K_r \eta} \left( \frac{du}{dr} + 2N \frac{u}{r} \right). \quad (30)$$

设  $N = (n+2)/2$ , 则方程 (29) 变为

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n+2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2}{r^2} \left[ \frac{C_{22} + C_{23} - (n+1)C_{12}}{C_{11}} \right] u =$$

$$p^2 u + \frac{T_0 \beta_r (1 + t_1 p)}{C_{11}} \frac{dT_1}{dr}. \quad (31)$$

对方程(30)作关于  $r$  的微分运算, 得

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{dT_1}{dr} \right) + \frac{n+2}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dT_1}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} \left[ \frac{C_{22} + C_{23} - (n+1)C_{12}}{C_{11}} \right] \frac{dT_1}{dr} = \\ \left[ \frac{p^3 \beta_r}{K_r \eta} + \frac{2}{r^2} \left\{ \frac{C_{22} + C_{23} - (n+1)C_{12} - (n+2)C_{11}/2}{C_{11}} \right\} \right] u + \\ \left[ \frac{pT_0 \beta_r^2 (1 + t_1 p)}{K_r \eta C_{11}} + p(1 + t_2 p) - \right. \\ \left. \frac{2}{r^2} \left\{ \frac{C_{22} + C_{23} - (n+1)C_{12} - (n+2)C_{11}/2}{C_{11}} \right\} \right] \frac{dT_1}{dr}. \end{aligned} \quad (32)$$

将耦合方程(31)和(32)表示为矢量-矩阵微分方程:

$$LV = AV, \quad (33)$$

其中

$$L \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n+2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2m+n+2}{r^2}, \quad (34)$$

$$V \equiv \begin{bmatrix} u \\ \frac{dT_1}{dr} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} b & c \\ bd & ad+f \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\begin{cases} m \equiv \frac{C_{22} + C_{23} - \left\{ (n+2)C_{11}/2 + (n+1)C_{12} \right\}}{C_{11}}, & b \equiv p^2, \\ c \equiv \frac{T_0 \beta_r}{C_{11}} (1 + t_1 p), & d \equiv \frac{p \beta_r}{\rho C_E} = \frac{p \beta_r}{K \eta}, \\ f \equiv p(1 + t_2 p), & n = 2 \frac{C_{22} + C_{23} - (C_{11} + C_{12})}{C_{11} + 2C_{12}}. \end{cases} \quad (37)$$

问题归结为在边界条件(14)和(15), 以及

$$F(t) = \theta_0 [H(t) - H(t - t_0)], \quad \text{在 } r = a \text{ 上}$$

下, 求解方程(33), 其中,  $H(t)$  为 Heaviside 单位阶跃函数,  $t_0$  为冲击作用的短暂时间.

对这些边界条件作 Laplace 变换, 得

$$q_r(a, p) = 0 \quad (38)$$

和

$$T_1(a, p) = \frac{\theta_0}{p} (1 - e^{-pt_0}). \quad (39)$$

## 5 求解方法

为求解方程(33), 我们将下式代入方程(33)

$$V = X(\lambda) w(r, \lambda), \quad (40)$$

其中,  $\lambda$  为标量,  $w(r, \lambda)$  为标量微分方程

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{n+2}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{2m+n+2}{r^2} w = \lambda^2 w \quad (41)$$

的一个非平凡解, 矢量  $X(\lambda)$  与  $r$  无关, 并满足

$$A\mathbf{X}(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{X}(\lambda). \tag{42}$$

方程(33)的解与该问题的解是一致的,有

$$V(r, p) = r^{-(n+1)/2} \sum_{i=1}^2 A_i \mathbf{X}(\lambda_i) \left[ \frac{1}{\lambda_i^2} K_h(\lambda_i r) \right], \tag{43}$$

其中

$$h^2 = 2m + n + 2 + \left( \frac{n+1}{2} \right)^2, \tag{44}$$

$K_h(\lambda r)$  为  $h$  阶第二类修正的 Bessel 函数,  $A_i (i = 1, 2)$  为由边界条件确定的常数. 矩阵  $A$  对应的特征方程为

$$\lambda^4 - (b + cd + f)\lambda^2 + fb = 0, \tag{45}$$

可得对应于特征值  $\lambda_i^2 (i = 1, 2)$  的特征矢量  $\mathbf{X}(\lambda_i) (i = 1, 2)$  为

$$\mathbf{X}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} X_1(\lambda_i) \\ X_2(\lambda_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b - \lambda_i^2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \tag{46}$$

矢量  $V$  的分量可表示为

$$u(r, p) = -r^{-(n+1)/2} \sum_{i=1}^2 cA_i \left[ \frac{1}{\lambda_i^2} K_h(\lambda_i r) \right], \tag{47}$$

$$\frac{dT_1(r, p)}{dr} = r^{-(n+1)/2} \sum_{i=1}^2 (b - \lambda_i^2) A_i \left[ \frac{1}{\lambda_i^2} K_h(\lambda_i r) \right], \tag{48}$$

因此

$$Q_r(r, p) = \begin{bmatrix} \frac{cA_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{cA_2}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} QR_1 + \begin{bmatrix} \frac{cA_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{cA_2}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} QR_2, \tag{49}$$

$$Q_\theta(r, p) = \begin{bmatrix} \frac{cA_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{cA_2}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} QR_{11} + \begin{bmatrix} \frac{cA_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{cA_2}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} QR_{12}, \tag{50}$$

$$T_1(r, p) = \begin{bmatrix} \frac{cA_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{cA_2}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} \frac{SR_1}{c} + \begin{bmatrix} \frac{cA_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{cA_2}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} \frac{SR_2}{c}, \tag{51}$$

其中

$$QR_i = \left[ \left[ \frac{n+1}{2} - 2 \frac{C_{12}}{C_{11}} \right] K_h(\lambda_i r) \right] r^{(n-3)/2} - \left[ \lambda_i \frac{d}{d(\lambda_i r)} \left\{ K_h(\lambda_i r) \right\} \right] r^{(n-3)/2} + \left[ (b - \lambda_i^2) r^{(n+3)/2} \int_r^\infty u^{-(n+1)/2} K_h(\lambda_i u) du \right] r^{(n-3)/2}, \quad i = 1, 2, \tag{52}$$

$$QR_{1i} = \left[ \left[ \frac{n+1}{2} \frac{C_{12}}{C_{11}} - \frac{C_{22} + C_{23}}{C_{11}} \right] K_h(\lambda_i r) \right] r^{(n-3)/2} - \left[ \lambda_i \frac{C_{12}}{C_{11}} r \frac{d}{d(\lambda_i r)} \left\{ K_h(\lambda_i r) \right\} \right] r^{(n-3)/2} + \left[ (b - \lambda_i^2) r^{(n+3)/2} \int_r^\infty u^{-(n+1)/2} K_h(\lambda_i u) du \right] r^{(n-3)/2}, \quad i = 1, 2, \tag{53}$$

$$SR_i = - (b - \lambda_i^2) \int_r^\infty u^{-(n+1)/2} K_h(\lambda_i u) du, \quad i = 1, 2, \tag{54}$$

$$\frac{cA_1}{\lambda_1^2} = - \frac{c\theta_0(1 - e^{-p t_0})QA_2}{D}, \tag{55}$$

$$\frac{cA_2}{\lambda_2^2} = \frac{c\theta_0(1 - e^{-p t_0})QA_1}{D}, \tag{56}$$

$$D = p(QA_1SA_2 - SA_1QA_2), \tag{57}$$

$$\begin{cases} QA_i = [QR_i]_{r=a}, & i = 1, 2, \\ SA_i = [SR_i]_{r=a}, & i = 1, 2. \end{cases} \quad (58)$$

作为特殊情况, 在该解中令  $n = 0$ , 可得均匀材料的结果<sup>[15]</sup>.

## 6 数值结果和讨论

为得到该问题的物理解, 必须对方程(47)、(49)~(51)作逆变换. 我们采用 Bellman 等人<sup>[35]</sup>的方法求逆, 并在时间跨度上选择 7 个时间点  $t_i (i = 1, \dots, 7)$ , 由 7 次移位 Legendre 多项式根的对数的负值, 计算  $\sigma_r$ 、 $q_0$  和  $T_1$  (见附录).

数值计算材料选择钢、镁、锌进行, 其非均匀参数  $n$  分别取 0.0、0.05、1.0. 相关的常数取

$$t_0 = 0.1 \text{ s}, \quad T_0 = 296 \text{ K}, \quad \theta_0 = 1.0;$$

对于钢 ( $n = 0.0$ ) 取<sup>[34]</sup>

$$C_{11} = 0.27865 \times 10^{12} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}, \quad C_{12} = 0.11942 \times 10^{12} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2},$$

$$C_{22} = 0.27865 \times 10^{12} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}, \quad C_{23} = 0.11942 \times 10^{12} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2},$$

$$\rho = 0.78 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}, \quad C_E = 117 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$\beta_r = 5.5889 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}, \quad K_r = 59.0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$t_1 = 0.75 \times 10^{-13} \text{ s}, \quad t_2 = 0.5 \times 10^{-13} \text{ s};$$

对于镁 ( $n = 0.05$ ) 取<sup>[36]</sup>

$$C_{11} = 0.617 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}, \quad C_{12} = 0.217 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2},$$

$$C_{22} = 0.5974 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}, \quad C_{23} = 0.2624 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2},$$

$$\rho = 0.174 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}, \quad C_E = 1040 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$\beta_r = 2.68 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}, \quad K_r = 170.0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$t_1 = 0.75 \times 10^{-13} \text{ s}, \quad t_2 = 0.5 \times 10^{-13} \text{ s};$$

对于锌 ( $n = 1.0$ ) 取<sup>[36]</sup>

$$C_{11} = 0.627 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}, \quad C_{12} = 0.508 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2},$$

$$C_{22} = 1.628 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}, \quad C_{23} = 0.362 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2},$$

$$\rho = 0.714 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}, \quad C_E = 390 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$\beta_r = 5.75 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}, \quad K_r = 124.0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$t_1 = 0.75 \times 10^{-13} \text{ s}, \quad t_2 = 0.5 \times 10^{-13} \text{ s}.$$

图 1 示出时间  $t = 0.14$  和不同非均匀参数  $n (= 0.0, 0.05, 1.0)$  时, 径向位移  $u$  随径向距离  $r$  的变化. 可以看出, 在这 3 种情况下,  $u$  在空腔表面附近都出现极大值, 对于大  $r$  值,  $u$  消失, 并且,  $u$  随  $n$  的增大而增大. 图 2 给出了空腔表面附近,  $n = 0.0, 0.05, 1.0$  时, 热冲击的影响下,  $u$  随  $t$  的变化. 由图可以看出,  $u$  具有振荡性, 当弹性波由其它方向出现反射时,  $u$  发生变号. 图 3 示出, 当  $n = 0.0, 1.0$  和  $t = 0.14, 3.67$  时,  $u$  随  $r$  的变化. 可以看到, 当  $n$  不变时,  $u$  随  $t$  增大而增大; 当  $t$  不变时,  $u$  随  $n$  增大而增大. 图 4 显示,  $n = 0.0, 1.0$  和  $r = 1.5, 3.0$  时,  $u$  随  $t$  的变化. 可以看出, 当  $r = 3.0$  时,  $u$  出现传播, 而当  $r = 1.5$  时, 对应于反射.

图 5 示出, 当非均匀参数  $n = 0.0, 0.05, 1.0$  和  $t = 0.14$  时, 径向应力  $\sigma_r$  随径向距离  $r$  的变化. 可以看到, 当  $r = 1$  时,  $\sigma_r = 0$ , 满足理论条件, 并且当  $r$  不变时,  $\sigma_r$  随  $n$  的增大而增大. 还可以看到, 在各种情况下,  $\sigma_r$  随  $r$  的增大而减小, 物理上似乎是合理的. 图 6 示出, 当  $n = 0.0, 0.05, 1.0$  和  $r = 1.5$  时,  $q$  随  $t$  的变化. 可以看出, 对每一个  $n$ , 当  $t$  最小时,  $q$  为负值, 表



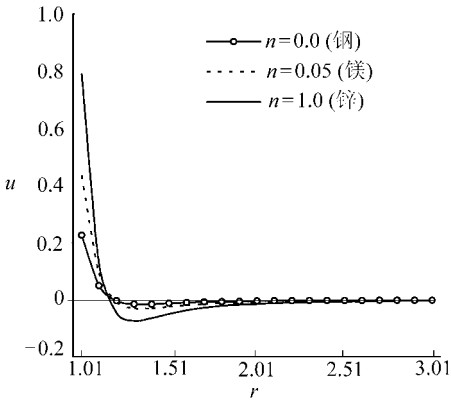


图1 对不同  $n$  值, 径向位移  $u$  随径向距离  $r$  的变化 ( $t = 0.14$ )

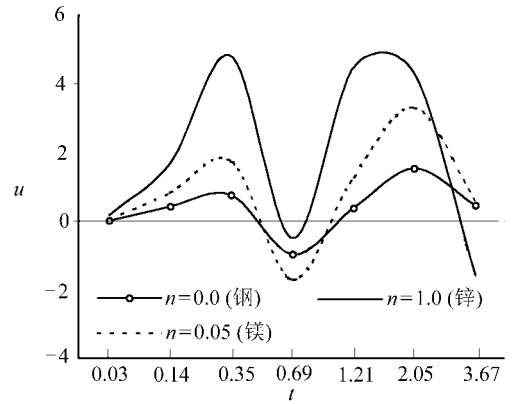


图2 对不同  $n$  值, 径向位移  $u$  随时间  $t$  的变化 ( $r = 1.5$ )

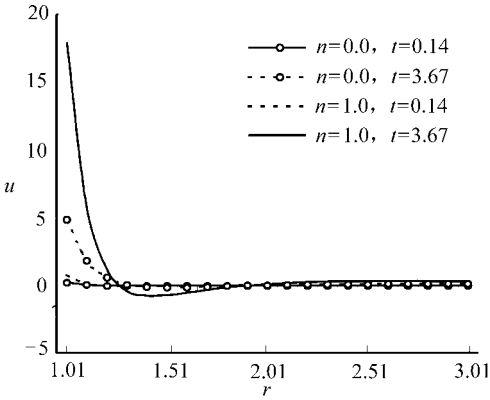


图3 径向位移  $u$  随径向距离  $r$  的变化 ( $n = 0.0, 1.0; t = 0.14, 3.67$ )

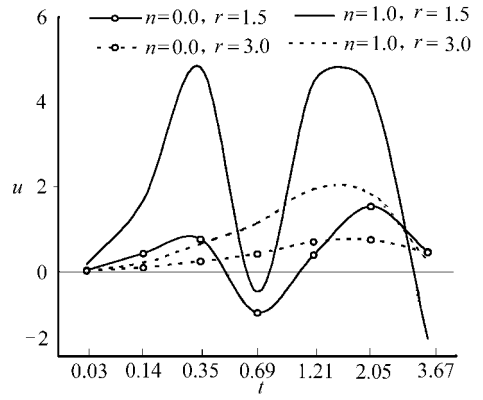


图4 径向位移  $u$  随时间  $t$  的变化 ( $n = 0.0, 1.0; r = 1.5, 3.0$ )

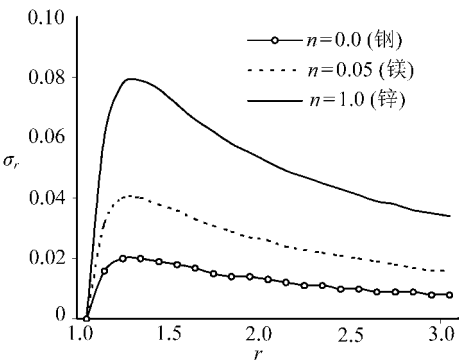


图5 对不同  $n$  值, 径向应力  $\sigma_r$  随径向距离  $r$  的变化 ( $t = 0.14$ )

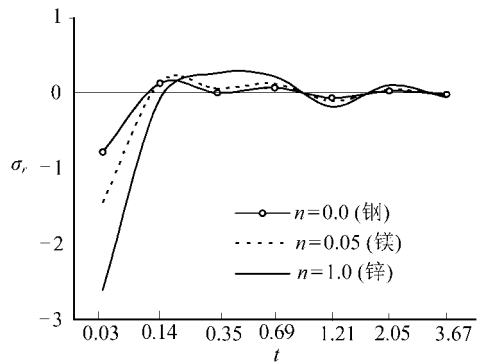


图6 对不同  $n$  值, 径向应力  $\sigma_r$  随时间  $t$  的变化 ( $r = 1.5$ )

明在荷载作用的初始阶段,  $\sigma_r$  为压应力. 在这种情况下, 对任意  $r (1.0 \leq r \leq 3.0)$  和  $n = 1.0$ ,  $\sigma_r$  取得极大值. 图7示出, 当  $n = 0.0, 1.0$  和  $t = 0.14, 3.67$  时,  $\sigma_r$  随  $r$  的变化图形. 可以看出, 当  $n$  固定时,  $\sigma_r$  随  $t$  的增大而增大; 当  $t$  固定时,  $\sigma_r$  也随  $n$  的增大而增大. 说明材料的非均匀性引起应力的增强. 图8示出, 当  $n = 0.0, 1.0$  和  $r = 1.5, 3.0$  时,  $\sigma_r$  随  $t$  的变化. 显然,

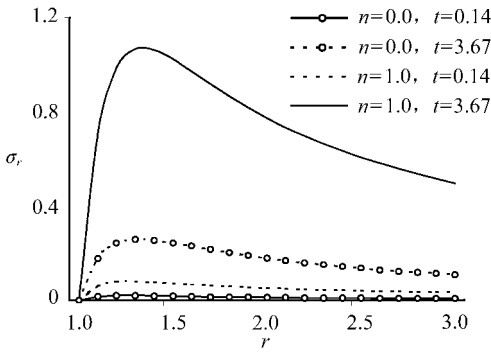


图7 径向应力  $\sigma_r$  随径向距离  $r$  的变化  
( $n = 0.0, 1.0; t = 0.14, 3.67$ )

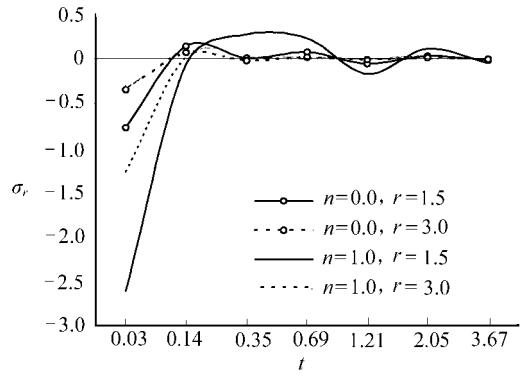


图8 径向应力  $\sigma_r$  随时间  $t$  的变化  
( $n = 0.0, 1.0; r = 1.5, 3.0$ )

当  $t$  取最小值时, 在各种情况下  $\sigma_r$  都呈压应力. 对每一个  $n$ ,  $\sigma_r$  在  $\sigma_r = 0$  线上下, 随  $r$  的增大呈减幅震荡.

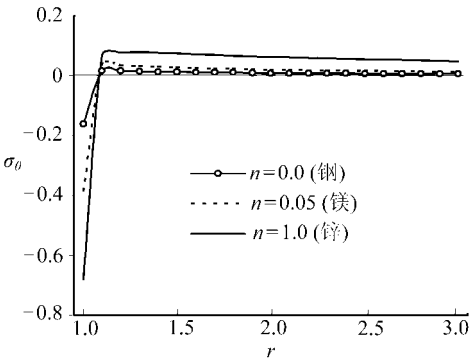


图9 对不同  $n$  值, 环向应力  $\sigma_\theta$  随径向距离  $r$  的变化 ( $t = 0.14$ )

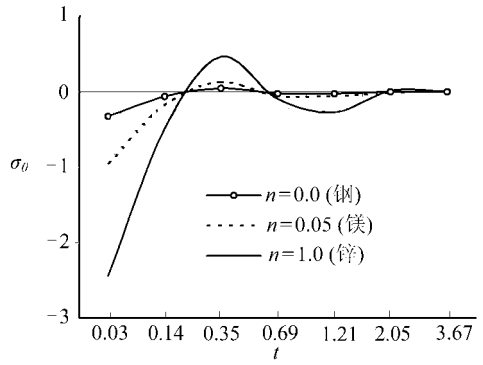


图10 对不同  $n$  值, 环向应力  $\sigma_\theta$  随时间  $t$  的变化 ( $r = 1.5$ )

图9给出了环向(纬向)应力  $\sigma_\theta$  随  $r$  的变化, 其参数与图5相同. 可以看出, 当  $r$  不变时,  $\sigma_\theta$  随  $n$  增大而增大. 在每一种情况下, 对大  $r$  值,  $\sigma_\theta$  消失. 图10示出, 当  $r = 1.5$  和  $n = 0.0, 0.05, 1.0$  时,  $\sigma_\theta$  随时间  $t$  的变化. 可以看出, 当  $t$  取最小值时,  $\sigma_\theta$  为压应力, 它真实地反映了温度的冲击作用, 并且符合假定的温度条件. 对每一个  $n$ ,  $\sigma_\theta$  具有振荡性, 并随着  $t$  的增大而振幅减小. 正如图10所示, 对特定的  $t$ ,  $|\sigma_\theta|$  也随  $n$  的增大而增大. 图11示出, 当  $n = 0.0, 1.0$  和  $t = 0.14, 3.67$  时,  $\sigma_\theta$  随  $r$  的变化. 可以看出, 固定  $t$  不变, 当  $n$  由  $0.0$  变化到  $1.0$  时,  $\sigma_\theta$  的值增大. 而当  $r$  固定不变, 在  $n = 1.0$  和  $t = 3.67$  两种情况下, 应力呈现增强. 然而, 在多数情况下,  $\sigma_\theta$  的值随  $r$  的增大而减小. 图12示出, 当  $n = 0.0, 1.0$  和  $r = 1.5, 3.0$  时,  $\sigma_\theta$  随  $t$  的变化. 在所有情况下, 当  $t$  取最小值时, 应力  $\sigma_\theta$  为压应力. 对  $n$  和  $r$  的任意值, 应力  $\sigma_\theta$  的值, 围绕  $\sigma_\theta = 0$  线随  $t$  的增大而作减幅振荡.

图13示出, 当时间  $t$  取两个不同的值  $t = 0.69$  和  $t = 2.05$ , 相应的材料为  $n = 0.0$  和  $n = 1.0$  时, 所产生温度之间的比较. 可以看出,  $r$  和  $t$  不变时, 材料的均匀性诱导  $T_1$  达到极大值. 对每一种情况, 在热源附近,  $T_1$  达到极大值. 图14示出, 当  $n = 0.0, 1.0$  和  $r = 1.5, 3.0$  时,  $T_1$  随  $t$  的变化. 可以看出, 固定  $n$  和  $r$  不变, 当  $t$  最小时,  $T_1$  的值最大.  $t$  增大时,  $T_1$  围绕  $T_1 = 0$  线作小幅振荡, 而对大的  $t$  值,  $T_1$  消失. 当  $r$  不变时, 与  $n = 0.0$  对应的温度更高.

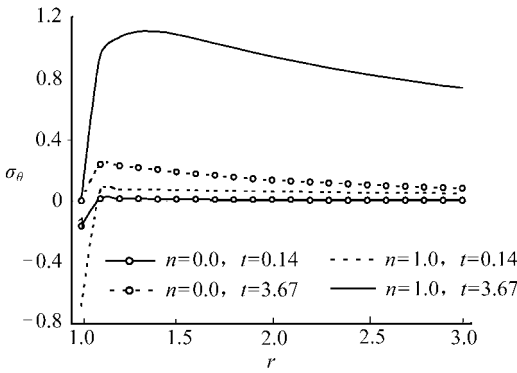


图 11 环向应力  $\sigma_\theta$  随径向距离  $r$  的变化  
( $n = 0.0, 1.0; t = 0.14, 3.67$ )

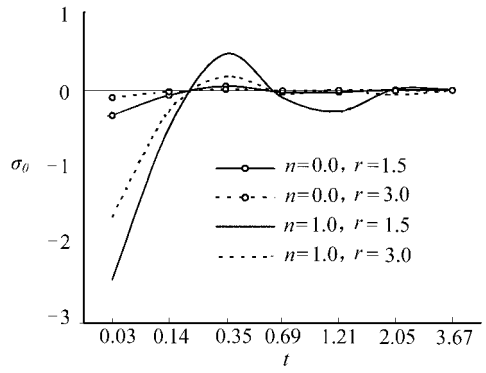


图 12 环向应力  $\sigma_\theta$  随时间  $t$  的变化  
( $n = 0.0, 1.0; r = 1.5, 3.0$ )

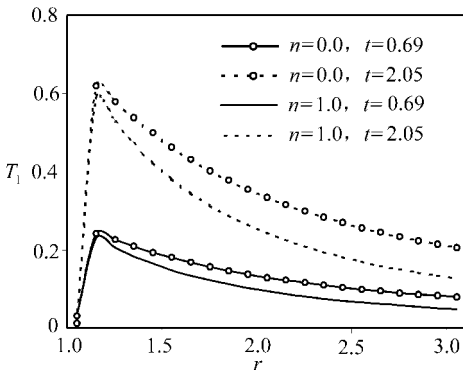


图 13 温度  $T_1$  随径向距离  $r$  的变化  
( $n = 0.0, 1.0; t = 0.69, 2.05$ )

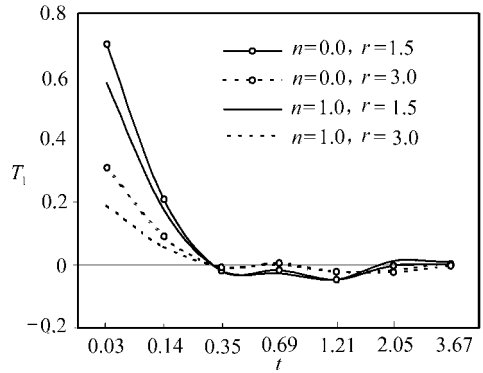


图 14 温度  $T_1$  随时间  $t$  的变化  
( $n = 0.0, 1.0; r = 1.5, 3.0$ )

## 7 结 论

本文根据带两个松弛时间参数的广义热弹性理论 (Green 和 Lindsay 理论), 研究在一个功能梯度球形各向同性无限大介质中, 含一个球形空腔, 受随时间变化的热冲击荷载作用时, 产生的热弹性位移、应力和温度问题. 利用 Laplace 变换方法, 给出了矢量-矩阵微分方程形式的基本方程, 并利用特征值方法求解. 利用 Bellman 方法给出数值逆变换. 假设热物理参数按径向坐标的幂指数变化. 结果分析可得出以下结论:

- 1) 热弹性位移、应力和温度对非均匀参数  $n$  有很强的依赖性. 因此, 在功能梯度材料的设计中, 必须考虑参数  $n$  的重要作用.
- 2) 由诸图形明显可知, 当  $n$  增大时, 出现应力增强.
- 3) 由图 6 和图 10 可见, 当  $t$  取最小值时, 应力  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  都是压应力, 并且随着时间的发展出现减幅振荡.
- 4) 均匀材料中产生的温度  $T_1$ , 要大于非均匀材料中产生的  $T_1$ .

致谢 本文作者感谢加尔各答大学应用数学系 S. C. Bose 教授, 在本文完成过程中提供的帮助和指导. 我们同样感谢审稿人对改进本文提供的宝贵意见.

## 附 录

设  $\sigma_j(R, \eta)$  的 Laplace 变换为

$$\sigma_j(R, p) = \int_0^{\infty} e^{-p\eta} \sigma_j(R, \eta) d\eta \quad (\text{A. 1})$$

假设  $\sigma_j(R, \eta)$  是充分光滑的, 以便于渐近方法的应用.

在方程(A. 1)中, 令  $x = e^{-\eta}$ , 得

$$\sigma_j(R, p) = \int_0^1 x^{p-1} g_j(R, x) dx, \quad (\text{A. 2})$$

其中

$$g_j(R, x) = \sigma_j(R, -\ln x). \quad (\text{A. 3})$$

对方程(A. 2)应用 Gauss 求积法则, 得到渐近关系

$$\sum_{i=1}^n W_i x_i^{p-1} g_j(R, x_i) = \sigma_j(R, p), \quad (\text{A. 4})$$

其中  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为移位 Legendre 多项式的根,  $W_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为对应的权重<sup>[35]</sup>, 且  $p = 1, 2, \dots, n$ .

当  $p = 1, 2, \dots, n$  时, 方程(A. 4)变为

$$W_1 g_j(R, x_1) + W_2 g_j(R, x_2) + \dots + W_n g_j(R, x_n) = \sigma_j(R, 1),$$

$$W_1 x_1 g_j(R, x_1) + W_2 x_2 g_j(R, x_2) + \dots + W_n x_n g_j(R, x_n) = \sigma_j(R, 2),$$

⋮

$$W_1 x_1^{n-1} g_j(R, x_1) + W_2 x_2^{n-1} g_j(R, x_2) + \dots + W_n x_n^{n-1} g_j(R, x_n) = \sigma_j(R, n),$$

因此

$$\begin{pmatrix} g_j(R, x_1) \\ g_j(R, x_2) \\ \vdots \\ g_j(R, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & \dots & W_n \\ W_1 x_1 & W_2 x_2 & \dots & W_n x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_1 x_1^{n-1} & W_2 x_2^{n-1} & \dots & W_n x_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_j(R, 1) \\ \sigma_j(R, 2) \\ \vdots \\ \sigma_j(R, n) \end{pmatrix}. \quad (\text{A. 5})$$

从而计算出  $g_j(R, x_1), g_j(R, x_2), \dots, g_j(R, x_n)$ .

当  $n = 7$  时, 有

移位 Legendre 多项式的根	对应的权重
2.544 604 382 862 088 6E-2	6.474 248 308 443 481 6E-2
1.292 344 072 003 028 2E-1	1.398 526 957 446 382 8E-1
2.970 774 243 113 014 5E-1	1.909 150 252 525 593 8E-1
5.000 000 000 000 000 0E-1	2.089 795 918 367 346 6E-1
7.029 225 756 886 985 3E-1	1.909 150 252 525 593 8E-1
8.707 655 927 996 970 6E-1	1.398 526 957 446 382 8E-1
9.745 539 561 713 790 9E-1	6.474 248 308 443 481 6E-2

由方程(A. 5), 可以计算出  $g_j(R, x_i)$  的离散值, 即  $\sigma_j(R, \eta_i) (i = 1, 2, \dots, 7)$ . 最后利用插值法, 得到应力分量  $\sigma_i(R, \eta) (i = r, \theta)$ .

## [参 考 文 献]

- [1] Biot M A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics[J]. J Appl Phys, 1956, 27(3): 240-253.
- [2] Chadwick P. Thermoelasticity, the Dynamical Theory [M]. In: Hill R, Sneddon I N, Eds. Progress in Solid Mechanics. Vol 1. Amsterdam: North Holland, 1960.
- [3] Lord H, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. Mech Phys Solid, 1967, 15(5): 299-309.
- [4] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. J Elast, 1972, 2(1): 1-7.

- [5] Tzou D Y. Experimental support for the lagging behavior in heat propagation[J]. *J Thermophys Heat Transf*, 1995, **9**(4): 686-693.
- [6] Mitra K, Kumar S, Vedaverg A. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat[J]. *J Heat Transfer, ASME*, 1995, **117**(3): 568-573.
- [7] Chandrasekharaiah D S. Thermoelasticity with second sound, a review[J]. *Appl Mech Rev*, 1986, **39**(3): 355-375.
- [8] Bahar L, Hetnarski R. State space approach to thermoelasticity[J]. *J Thermal Stresses*, 1978, **1**(1): 135-145.
- [9] Ezzat M. Fundamental solution in thermoelasticity with two relaxation times for cylindrical regions[J]. *Internat J Engng Sci*, 1995, **33**(14): 2011-2020.
- [10] Hetnarski R B, Ignaczak J. Generalized thermoelasticity response of semi-space to a short laser pulse[J]. *J Thermal Stresses*, 1994, **17**(3): 377-396.
- [11] Bagri A, Eslami M R. Generalized coupled thermoelasticity of disks based on the Lord-Shulman model[J]. *J Thermal Stresses*, 2004, **27**(8): 691-704.
- [12] Kar A, Kanoria M. Thermo-elastic interaction with energy dissipation in an unbounded body with a spherical hole[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(9): 2961-2971.
- [13] Das N C, Lahiri A. Thermoelastic interactions due to prescribed pressure inside a spherical cavity in an unbounded medium[J]. *Ind J Pure Appl Math*, 2000, **31**(1): 19-32.
- [14] Kar A, Kanoria M. Thermoelastic interaction with energy dissipation in a transversely isotropic thin circular disc[J]. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2007, **26**(6): 969-981.
- [15] Ghosh M K, Kanoria M. Generalized thermoelastic problem of a spherically isotropic infinite elastic medium containing a spherical cavity[J]. *J Thermal Stresses*, 2008, **31**(8): 665-679.
- [16] Aboudi J, Pindera M J, Arnold S M. Thermo-inelastic response of functionally graded composites[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, **32**(12): 1675-1710.
- [17] Wetherhold R C, Seelman S, WANG Jian-zhong. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation[J]. *Composites Science and Technology*, 1996, **56**(9): 1099-1104.
- [18] Sugano Y. An expression for transient thermal stress in a nonhomogeneous plate with temperature variation through thickness[J]. *Ingenieur Archiv*, 1987, **57**(2): 147-156.
- [19] Qian L F, Batra R C. Transient thermoelastic deformations of a thick functionally graded plate[J]. *J Thermal Stresses*, 2004, **27**(8): 705-740.
- [20] Lutz M P, Zimmerman R W. Thermal stresses and effective thermal expansion coefficient of a functionally graded sphere[J]. *J Thermal Stresses*, 1996, **19**(1): 39-54.
- [21] Ye G R, Chen W Q, Cai J B. A uniformly heated functionally graded cylindrical shell with transverse isotropy[J]. *Mechanics Research Communication*, 2001, **28**(5): 535-542.
- [22] Chen W Q, Wang X, Ding H J. Free vibration of a fluid-filled hollow sphere of a functionally graded material with spherical isotropy[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1999, **106**(5): 2588-2594.
- [23] Ding H J, Wang H M, Chen W Q. Analytical thermo-elastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2002, **72**(8): 545-553.
- [24] Chen W Q, Ding H J, Wang X. The exact elastoelectric field of a rotating piezoceramic spherical shell with a functionally graded property[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(38/39): 7015-7027.
- [25] Wang B L, Mai Y W. Transient one dimensional heat conduction problems solved by finite element[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, **47**(2): 303-317.
- [26] Shao Z S, Wang T J, Ang K K. Transient thermo-mechanical analysis of functionally graded hollow circular cylinders[J]. *J Thermal Stresses*, 2007, **30**(1): 81-104.

- [27] Mallik S H, Kanoria M. Generalized thermo-elastic functionally graded solid with a periodically varying heat source[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, **44**(22/23): 7633-7645.
- [28] Bagri A, Eslami M R. A unified generalized thermoelasticity formulation; application to thick functionally graded cylinders[J]. J Thermal Stresses, 2007, **30**(9/10): 911-930.
- [29] Chen W Q. Stress distribution in a rotating elastic functionally graded material hollow sphere with spherical isotropy[J]. Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 2000, **35**(1): 13-20.
- [30] Obata Y, Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally graded material[J]. J Thermal Stresses, 1994, **17**(5): 471-487.
- [31] Ootao Y, Tanigawa Y. Transient thermoelastic problem of a functionally graded cylindrical panel due to nonuniform heat supply[J]. J Thermal Stresses, 2007, **30**(5): 441-457.
- [32] Das N C, Lahiri A, Sen P K. Eigenvalue approach to three dimensional generalized thermoelasticity [J]. Bulletin Calcutta Math Soc, 2006, **98**(4): 305-318.
- [33] Nowacki W. Dynamic Problems of Thermoelasticity [M]. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1975.
- [34] Wang H M, Ding H J, Chen Y M. Thermoelastic dynamic solution of a multilayered spherically isotropic hollow sphere for spherically symmetric problems[J]. Acta Mechanica, 2005, **173**(1/4): 131-145.
- [35] Bellman R, Kolaba R E, Lockette J A. Numerical Inversion of the Laplace Transform [M]. New York: American Elsevier Pub Co, 1966.
- [36] Dhaliwal R S, Sing A. Dynamic Coupled Thermoelasticity [M]. Delhi: Hindustan Publ, 1980.

## Generalized Thermoelastic Functionally Graded Spherically Isotropic Solid Containing a Spherical Cavity Under Thermal Shock

M. K. Ghosh<sup>1</sup>, M. Kanoria<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Serampore College,  
Serampore, Hooghly - 712 201, India;

2. Department of Applied Mathematics, University of Calcutta,  
92 A. P. C. Road, Kolkata - 700 009, India)

**Abstract:** The determination of thermoelastic displacement, stresses and temperature in a functionally graded spherically isotropic infinite elastic medium having a spherical cavity in the context of the linear theory of generalized thermoelasticity with two relaxation time parameters (Green and Lindsay theory) are concerned with. The surface of the cavity is stress free and is subjected to a time dependent thermal shock. The basic equations were written in the form of a vector-matrix differential equation in the Laplace transform domain which was then solved by eigenvalue approach. The numerical inversion of the transforms was carried out using Bellman method. The displacement, stresses and temperature were computed and presented graphically. It is found that the variation of thermo-physical properties of a material strongly influences the response to loading. A comparative study with the corresponding homogeneous material has also been made.

**Key words:** generalized thermoelasticity; functionally graded material (FGM); Green-Lindsay theory; vector-matrix differential equation; Bellman method