

# Sobolev 方程各向异性矩形 非协调有限元分析\*

石东洋, 王海红, 郭城

(郑州大学 数学系, 郑州 450052)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了 Sobolev 方程的各向异性矩形非协调有限元方法. 在半离散和全离散格式下, 得到了与传统协调有限元方法相同的最优误差估计和超逼近性质. 进一步地利用插值后处理技术得到了整体超收敛结果. 最后的数值结果表明了理论分析的正确性.

关键词: 非协调元; 各向异性; Sobolev 方程; 误差估计; 超收敛

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

## 引言

考虑下面 Sobolev 方程<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x, y) \operatorname{grad} u_t) - \operatorname{div}(b(x, y) \operatorname{grad} u) = \\ \quad f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T], \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, t \in (0, T], \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\Omega \subset R^2$  为有界凸区域,  $f(x, y, t)$  为给定的函数,  $0 < a_1 < a(x, y) < a_2$ ,  $|b(x, y)| \leq a_2$  且  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$  具有二阶连续的导数, 这里  $a_1, a_2$  为正常数.

由于此类方程在流体穿过裂缝岩石的渗透理论, 土壤中湿气的迁移问题, 不同介质的热传导问题等许多物理方面具有广泛的应用. 人们提出了许多数值模拟方法, 如 Galerkin-有限元逼近<sup>[1-2]</sup>, 标准混合有限元方法<sup>[3]</sup>,  $H^1$ -Galerkin 混合有限元方法<sup>[4]</sup>等. 但所有以上文献都是对协调元进行分析的且要求网格剖分满足正则性假设<sup>[5]</sup>.

本文针对问题(1)在各向异性网格下研究了一个矩形非协调有限元的收敛性. 首先, 在半离散格式下给出了离散问题的解的存在唯一性的证明, 相应的误差估计以及超逼近结果. 其次, 在两种全离散格式下分别给出其误差估计, 超逼近结果和整体超收敛性, 最后, 我们给出了相应的数值结果, 验证了我们的理论分析的正确性. 这表明传统有限元分析所依赖的前提条件即要求剖分满足的正则性假设是不必要的.

\* 收稿日期: 2008-04-18; 修订日期: 2008-08-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671184)

作者简介: 石东洋(1961—), 男, 河南鲁山人, 博士(联系人. Tel: +86-371-67767813; E-mail: shi\_dy@zzu.edu.cn).

## 1 单元构造

设  $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  是  $\hat{x} - \hat{y}$  平面上的参考单元, 其 4 个顶点为  $\hat{a}_1 = (-1, -1)$ ,  $\hat{a}_2 = (1, -1)$ ,  $\hat{a}_3 = (1, 1)$  和  $\hat{a}_4 = (-1, 1)$ , 4 边为  $\hat{l}_1 = \overline{\hat{a}_1\hat{a}_2}$ ,  $\hat{l}_2 = \overline{\hat{a}_2\hat{a}_3}$ ,  $\hat{l}_3 = \overline{\hat{a}_3\hat{a}_4}$  和  $\hat{l}_4 = \overline{\hat{a}_4\hat{a}_1}$ . 在  $\hat{K}$  上构造有限元  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  ( 参看文献 [6-7] )

$$\hat{\Sigma} = \left\{ \hat{v}_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 \right\}, \hat{P} = \text{span} \left\{ 1, \hat{x}, \hat{y}, \varphi(\hat{x}), \varphi(\hat{y}) \right\},$$

$$\text{其中 } \varphi(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \hat{v}_i = \frac{1}{|\hat{l}_i|} \int_{\hat{l}_i} \hat{v} ds, \hat{v}_5 = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v} dx d\hat{y}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

文献[6]中已证明上述插值是适定的, 且对任意  $\hat{v} \in H^1(\hat{K})$ , 其插值表达式为

$$\begin{aligned} \hat{I}\hat{v} = & \hat{v}_5 + \frac{1}{2}(\hat{v}_2 - \hat{v}_4)\hat{x} + \frac{1}{2}(\hat{v}_3 - \hat{v}_1)\hat{y} + \frac{1}{2}(\hat{v}_2 + \hat{v}_4 - 2\hat{v}_5) \varphi(\hat{x}) + \\ & \frac{1}{2}(\hat{v}_3 + \hat{v}_1 - 2\hat{v}_5) \varphi(\hat{y}). \end{aligned} \quad (2)$$

同时, 文献[6]中已经验证上述算子  $\hat{I}$  具有各向异性特征, 即对多重指标  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , 且  $|\alpha| = 1$  时成立

$$\|\hat{D}^\alpha(\hat{v} - \hat{I}\hat{v})\|_{0,\hat{K}} \leq C(\hat{I}, \hat{K}) |\hat{D}^\alpha \hat{v}|_{1,\hat{K}}, \quad \forall \hat{v} \in H^2(\hat{K}).$$

为简单起见, 设  $\Omega$  是  $R^2$  中的一个有界矩形区域. 其边界  $\partial\Omega$  平行于  $x$  轴或  $y$  轴,  $\mathcal{T}_h$  是  $\Omega$  的一个矩形剖分族, 不要求满足正则性假设<sup>[5]</sup>. 设其中心点为  $(x_K, y_K)$ , 两边分别平行于  $x$  轴和  $y$  轴, 两边长分别为  $2h_x$  和  $2h_y$ , 4 个顶点是  $a_1(x_K - h_x, y_K - h_y)$ ,  $a_2(x_K + h_x, y_K - h_y)$ ,  $a_3(x_K + h_x, y_K + h_y)$  和  $a_4(x_K - h_x, y_K + h_y)$ , 4 条边是  $l_1 = \overline{a_1a_2}$ ,  $l_2 = \overline{a_2a_3}$ ,  $l_3 = \overline{a_3a_4}$  和  $l_4 = \overline{a_4a_1}$ .

则存在可逆仿射变换  $F_K: \hat{K} \rightarrow K$ :

$$x = x_K + h_x \hat{x}, \quad y = y_K + h_y \hat{y}. \quad (3)$$

那么相应的有限元空间为

$$V_h = \left\{ v; v|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \hat{P}, \int_F [v] ds = 0, \quad \forall F \subset \partial K \right\},$$

这里,  $[v]$  分别表示  $v$  跨过单元边界的跳跃度, 当  $F \subset \partial\Omega$  时,  $[v] = v$ .

定义插值算子  $I_h: v \in H^1(\Omega) \rightarrow I_h v \in V_h$ ,  $I_h|_K = I_K$ ,  $I_K v = (\hat{I}\hat{v}) \circ F_K^{-1}$ .

## 2 半离散格式的收敛性分析

记  $a(x, y) = a$ ,  $b(x, y) = b$ , 相应(1)式的弱形式为: 求  $u \in H_0^1(\Omega)$ , 使得

$$\begin{cases} (u_t, v) + (a \cdot \cdot u_t, \cdot \cdot v) + (b \cdot \cdot u, \cdot \cdot v) = (f, v), & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

则(4)式的半离散格式为: 求  $u_h \in V_h$  满足

$$\begin{cases} (u_h, v_h) + (a \cdot \cdot_h u_{ht}, \cdot \cdot_h v_h)_h + (b \cdot \cdot_h u_h, \cdot \cdot_h v_h)_h = \\ (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ u_h(x, y, 0) = I_h u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $(a \cdot \cdot_h u_h, \cdot \cdot_h v_h)_h = \sum_K (a \cdot \cdot u_h, \cdot \cdot v_h)|_K$ ,  $(b \cdot \cdot_h u_h, \cdot \cdot_h v_h)_h = \sum_K (b \cdot \cdot u_h, \cdot \cdot v_h)|_K$ .

定理 2.1 问题(5)的解唯一存在.

证明 设  $\{\phi_i\}_{i=1}^r$  为  $V_h$  的一组基,  $u_h = \sum_{i=1}^r \phi_i(t) \phi_i$ , 对  $j = 1, 2, \dots, r$ , 取  $v_h = \phi_j$  那么问题

(5) 可写为: 求  $\phi_i(t) (i = 1, 2, \dots, r)$  使得

$$(A + B)\phi(t) + D\phi(t) = F, \quad (6)$$

其中

$$A = ((\phi_i, \phi_j))_{r \times r}, \quad B = ((a \cdot \dot{\cdot}_h \phi_i, \dot{\cdot}_h \phi_j)_h)_{r \times r}, \\ D = ((b \cdot \dot{\cdot}_h \phi_i, \dot{\cdot}_h \phi_j)_h)_{r \times r}, \quad F(t) = ((f, \phi_i))_{1 \times r}.$$

显然(6)式是关于未知函数  $\phi(t)$  的线性常微分方程组, 当给定初值  $\phi(0)$  (由  $u_h(0)$  确定) 时, 由文献[8]知(6)式存在惟一解.

引理 2.2<sup>[6,9]</sup> 在各向异性网格下, 当  $u, u_t \in H^2(\Omega)$ ,  $u_{tt} \in H^1(\Omega)$ , 对任意  $v_h \in V_h$ , 有

$$\begin{cases} (\dot{\cdot}_h(u - I_h u), \dot{\cdot}_h v_h)_h = 0, \quad \|v_h\| \leq C \|v_h\|_h, \\ \|u - I_h u\| \leq Ch^2 |u|_2, \quad \|u_t - I_h u_t\| \leq Ch^2 |u_t|_2, \\ \|u_{tt} - I_h u_{tt}\| \leq Ch |u_{tt}|_1, \\ \|u - I_h u\|_h \leq Ch |u|_2, \quad \|u_t - I_h u_t\|_h \leq Ch |u_t|_2 \end{cases} \quad (7)$$

以及

$$\left| \sum_K \int_{\partial K} a \frac{\partial u}{\partial n} v_h ds \right| \leq Ch |u_t|_2 \|v_h\|_h, \quad \left| \sum_K \int_{\partial K} b \frac{\partial u}{\partial n} v_h ds \right| \leq Ch |u|_2 \|v_h\|_h, \quad (8)$$

特别地, 若  $u, u_t \in H^3(\Omega)$ , 有

$$\left| \sum_K \int_{\partial K} a \frac{\partial u_t}{\partial n} v_h ds \right| \leq Ch^2 |u_t|_3 \|v_h\|_h, \quad \left| \sum_K \int_{\partial K} b \frac{\partial u}{\partial n} v_h ds \right| \leq Ch^2 |u|_3 \|v_h\|_h, \quad (9)$$

这里及以下  $\|\cdot\| = \sum_K (\|\cdot\|_{\partial K}^2)^{1/2}$ ,  $\|\cdot\|_h = \sum_K (|\cdot|_{1,K}^2)^{1/2}$ ,  $C$  为一个与  $h = \max\{h_K\}$  无关的常数.

在上面引理的基础上, 我们给出下面的几个重要结论.

定理 2.3 设  $u, u_h$  分别是(4)式和(5)式的解. 若  $u, u_t \in H^2(\Omega)$ , 则在各向异性网格下成立

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch |u|_2 + Ch \left[ \int_0^t (|u_t(\tau)|_1^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u_t(\tau)|_2^2) d\tau \right]^{1/2}, \quad (10)$$

进一步地, 若  $u, u_t \in H^3(\Omega)$ , 有

$$\|u - u_h\| \leq Ch^2 |u|_2 + Ch^2 \left[ \int_0^t (|u_t(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u_t(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_3^2) d\tau \right]^{1/2} \quad (11)$$

以及超逼近结果

$$\|I_h u - u_h\|_h \leq Ch^2 \left[ \int_0^t (|u(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_3^2) d\tau \right]^{1/2}. \quad (12)$$

证明 记  $u - u_h = (u - I_h u) + (I_h u - u_h) = \eta + \theta$ . 对任意的  $v_h \in V_h$ , 成立下面的误差方程

$$(\theta, v_h) + (a \cdot \dot{\cdot}_h \theta, \dot{\cdot}_h v_h)_h + (b \cdot \dot{\cdot}_h \theta, \dot{\cdot}_h v_h)_h = \\ - (\eta, v_h) - (a \cdot \dot{\cdot}_h \eta, \dot{\cdot}_h v_h)_h - (b \cdot \dot{\cdot}_h \eta, \dot{\cdot}_h v_h)_h + \\ \sum_K \int_{\partial K} a \frac{\partial u}{\partial n} v_h ds + \sum_K \int_{\partial K} b \frac{\partial u}{\partial n} v_h ds. \quad (13)$$

在(13)式中取  $v_h = \theta$ , 由 Cauchy-Schwarz 不等式、 $\varepsilon$ -Young 不等式以及(8)式, 得

$$\begin{aligned} & \|\theta\|^2 + \|a^{1/2} \cdot_h \theta\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|b^{1/2} \cdot_h \theta\|^2 \leq \\ & C(\|\eta\|^2 + \|\cdot_h \eta\|^2 + \|\cdot_h \eta\|^2 + h^2 |u|_1^2 + \\ & h^2 |u|_2^2) + \varepsilon \|\theta\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

取适当小的  $\varepsilon$ , 并由(7) 式得

$$\frac{d}{dt} \|b^{1/2} \cdot_h \theta\|^2 \leq Ch^2(|u|_1^2 + |u|_2^2 + |u|_2^2). \quad (15)$$

对(15) 式两端积分, 再利用三角不等式和(7) 式即得(10) 式.

利用(7) 式和文献[10] 中的技巧, 令  $a = \frac{1}{|K|} \int_K a dx dy$ , 可得

$$\begin{aligned} (a \cdot_h \eta, \cdot_h \theta)_h &= ((a - a) \cdot_h \eta, \cdot_h \theta)_h \leq \\ & Ch |a|_{W^1 \infty(\Omega)} \|\cdot_h \eta\| \|\cdot_h \theta\|. \end{aligned} \quad (16)$$

同理

$$(b \cdot_h \eta, \cdot_h \theta)_h \leq Ch |b|_{W^1 \infty(\Omega)} \|\cdot_h \eta\| \|\cdot_h \theta\|. \quad (17)$$

在(13) 式中取  $v_h = \theta$ , 由(16)、(17) 和(7) 式得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|\theta\|^2 + \|a^{1/2} \cdot_h \theta\|^2) + \|b^{1/2} \cdot_h \theta\|^2 \leq \\ & C(h^4 |u|_2^2 + \|\theta\|^2 + h^4 |u|_2^2 + h^4 |u|_3^2) + \varepsilon \|\cdot_h \theta\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

取适当小的  $\varepsilon$ , 并对上式两端两端积分, 由 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned} & \|\theta\|^2 + \|\cdot_h \theta\|^2 \leq \\ & Ch^4 \int_0^t (|u(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_2^2) d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

再由(7) 式及三角不等式完成定理.

### 3 向后的 Euler- Galerkin 格式

设  $\Delta t$  和  $U^n \in V_h$  分别为时间步长和  $u(t_n)$  在  $t = t_n$  中的逼近. 利用向后差商公式  $\bar{\partial}_t U^n = (U^n - U^{n-1})/\Delta t$ , 我们建立如下的向后的 Euler- Galerkin 全离散格式: 求  $U^n \in V_h$  满足

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_t U^n, v_h) + (a \bar{\partial}_t \cdot_h U^n, \cdot_h v_h)_h + (b \cdot_h U^n, \cdot_h v_h)_h = (f(t_n), v_h), \\ u_h(x, y, 0) = I_h u_0. \end{cases} \quad (20)$$

定理 3.1 问题(20) 的解存在且惟一.

证明 在问题(20) 中取  $v_h = U^n$ , 考虑的  $f = 0$  情况, 由 Cauchy- Schwartz 不等式得

$$\begin{aligned} & \|U^n\|^2 + \|a^{1/2} \cdot_h U^n\|^2 + 2\Delta t \|b^{1/2} \cdot_h U^n\|^2 \leq \\ & \|a^{1/2} \cdot_h U^{n-1}\|^2 + \|U^{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

上式两端对  $n$  求和得

$$\|U^n\|^2 + \|a^{1/2} \cdot_h U^n\|^2 \leq \|a^{1/2} \cdot_h U^0\|^2 + \|U^0\|^2. \quad (22)$$

注意到(22) 式与步长  $\Delta t$  无关, 即格式(20) 是无条件稳定的. 由文献[11] 知问题(20) 的解存在且惟一的.

定理 3.2 设  $u(t_n)$  和  $U^n$  分别是(4) 式和(20) 式的解,  $u_0, u, u_t, u_{tt} \in H^2(\Omega)$ , 则在各向异性网格下成立

$$\|u(t_n) - U^n\|_h \leq$$

$$Ch \left[ |u_0|_2 + \left( \int_0^n (|u(\tau)|_2^2 + |u_u(\tau)|_1^2 + |uu(\tau)|_2^2 + |u_t(\tau)|_2^2) d\tau \right)^{1/2} \right] + C(\Delta t) \left[ \int_0^n (|u_u(\tau)|_1^2 + \|uu(\tau)\|^2) d\tau \right]^{1/2}. \quad (23)$$

进一步地, 若  $u_0 \in H^2(\Omega)$ ,  $u, u_t \in H^3(\Omega)$ , 则成立

$$\|u(t_n) - U^n\| \leq Ch^2 \left[ |u_0|_2 + \left( \int_0^n (|u_t(\tau)|_2^2 + |u_{tt}(\tau)|_3^2 + |u_{tt}(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_3^2 + |u_t(\tau)|_3^2) d\tau \right)^{1/2} \right] + C(\Delta t) \left[ \int_0^n (\|uu(\tau)\|^2 + |u(\tau)|_1^2) d\tau \right]^{1/2}, \quad (24)$$

以及超逼近结果

$$\|I_h u(t_n) - U^n\|_h \leq Ch^2 \left[ \int_0^n (|u_t(\tau)|_2^2 + |u_{tt}(\tau)|_3^2 + |u_{tt}(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_3^2 + |u_t(\tau)|_3^2) d\tau \right]^{1/2} + C(\Delta t) \left[ \int_0^n (\|uu(\tau)\|^2 + |u(\tau)|_1^2) d\tau \right]^{1/2}. \quad (25)$$

证明 类似地, 记  $u(t_n) - U^n = (u(t_n) - I_h u(t_n)) + (I_h u(t_n) - U^n) = \eta^n + \theta^n$ . 则对任意的  $v_h \in V_h$ ,  $\eta^n$  和  $\theta^n$  满足下面的方程:

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_t \theta^n, v_h) + (a \bar{\partial}_t \cdot \cdot \cdot_h \theta^n, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h + (b \cdot \cdot \cdot_h \theta^n, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h = \\ (R_1^n, v_h) + (a R_2^n, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h - (b \cdot \cdot \cdot_h \eta^n, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h + \\ \sum_K \int_{\partial K} a \frac{\partial u_t}{\partial n}(t_n) v_h ds + \sum_K \int_{\partial K} b \frac{\partial u}{\partial n}(t_n) v_h ds, \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} R_1^n &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{t_{n-1}}^{t_n} \eta_t(\tau) + (t_n - \tau) uu(\tau) d\tau \right], \\ R_2^n &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{t_{n-1}}^{t_n} \cdot \cdot \cdot_h \eta_t(\tau) + (t_n - \tau) \cdot \cdot \cdot_h uu(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

在(26)式中取  $v_h = \bar{\partial}_t \theta^n$ , 由 Cauchy-Schwartz 不等式以及  $\varepsilon$ -Young 不等式, 得

$$\begin{aligned} \|\bar{\partial}_t \theta^n\|^2 + \|a^{1/2} \bar{\partial}_t \cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} (\|b^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2 - \|b^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h \theta^{n-1}\|^2 + \|b^{1/2} (\cdot \cdot \cdot_h \theta^n - \cdot \cdot \cdot_h \theta^{n-1})\|^2) \leq \\ C (\|R_1^n\|^2 + \|R_2^n\|^2 + \|\cdot \cdot \cdot_h \eta^n\|^2 + h^2 |u_t(t_n)|_2^2 + \\ h^2 |u(t_n)|_2^2 + \varepsilon \|\bar{\partial}_t \theta^n\|^2 + \varepsilon \|\bar{\partial}_t \cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2). \end{aligned} \quad (28)$$

上式两端关于  $n$  求和, 取适当小的  $\varepsilon$ , 并注意到  $\theta(0) = 0$  得

$$\begin{aligned} \|\cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2 \leq C(\Delta t) \sum_{i=1}^n (\|R_1^i\|^2 + \|R_2^i\|^2 + \\ \|\cdot \cdot \cdot_h \eta^i\|^2 + h^2 |u_t(t_i)|_2^2 + h^2 |u(t_i)|_2^2). \end{aligned} \quad (29)$$

将(27)式代入到(29)式并注意到

$$u_t(t_j) = \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\tau - t_{j-1}) u_{tt}(\tau) d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t(\tau) d\tau \right],$$

得

$$\| \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \| \leq Ch \left[ \int_0^n |u(\tau)|_2^2 + |u_t(\tau)|_1^2 + |u_{tt}(\tau)|_2^2 + |u_t(\tau)|_2^2 d\tau \right]^{1/2} + C(\Delta t) \left[ \int_0^n (|u_{tt}(\tau)|_1^2 + \|u_{tt}(\tau)\|^2) d\tau \right]^{1/2}.$$

再由三角不等式以及(7)式可得(23)式.

下面我们来证明(24)式和(25)式. 首先, 由文献[10]中的技巧得

$$\begin{cases} (b \cdot \cdot \cdot_h \Gamma^n, \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h \leq Ch \| \cdot \cdot \cdot_h \Gamma^n \| \| \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \|, \\ (aR_2^n, \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h \leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[ \frac{h}{\Delta t} \| \cdot \cdot \cdot_h \Gamma_n(\tau) \| + |u_{tt}(\tau)|_1 \right] d\tau \| \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \|. \end{cases} \quad (30)$$

其次, 在(26)式中取  $v_h = \theta^n$ , 由 Cauchy-Schwartz 不等式、 $\varepsilon$ -Young 不等式、(27)式、(30)式以及(9)式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} (\| \theta^n \|^2 - \| \theta^{n-1} \|^2 + \| \theta^n - \theta^{n-1} \|^2) + \frac{1}{2\Delta t} (\| a^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \|^2 - \| a^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h \theta^{n-1} \|^2 + \| a^{1/2} (\cdot \cdot \cdot_h \theta^n - \cdot \cdot \cdot_h \theta^{n-1}) \|^2) + \| b^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \|^2 \leq \\ & C (\| R_1^n \|^2 + \frac{h^2}{\Delta t} \left[ \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \cdot \cdot \cdot_h \Gamma_n(\tau) \|^2 d\tau \right]^2 + \left[ \int_{t_{n-1}}^{t_n} |u_{tt}(\tau)|_1 d\tau \right]^2 + \\ & h^2 \| \cdot \cdot \cdot_h \Gamma^n \|^2 + h^4 |u_t(t_n)|_3^2 + h^4 |u(t_n)|_3^2) + \varepsilon \| \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \|^2. \end{aligned} \quad (31)$$

取适当的  $\varepsilon$ , 上式两端关于  $n$  求和, 并注意到  $\theta^0 = 0$ , 得

$$\begin{aligned} & \| \theta^n \|^2 + \| \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \|^2 \leq \\ & C(\Delta t) \sum_{i=1}^n \left[ \| R_1^i \|^2 + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ \frac{h^2}{\Delta t} \| \cdot \cdot \cdot_h \Gamma_i(\tau) \|^2 + |u_{tt}(\tau)|_1^2 \right] d\tau + \right. \\ & \left. h^2 \| \cdot \cdot \cdot_h \Gamma^i \|^2 + h^4 |u_t(t_i)|_3^2 + h^4 |u(t_i)|_3^2 \right], \end{aligned} \quad (32)$$

所以

$$\begin{aligned} \| \theta^n \| + \| \cdot \cdot \cdot_h \theta^n \| & \leq Ch^2 \left\{ \int_0^n (|u_t(\tau)|_2^2 + (|u_{tt}(\tau)|_3^2 + |u_t(\tau)|_3^2) + \right. \\ & \left. |u(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_3^2) d\tau \right\}^{1/2} + C(\Delta t) \left[ \int_0^n (\|u_{tt}(\tau)\|^2 + |u(\tau)|_1^2) d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

最后, 由三角不等式以及(7)式完成定理 3.2 的证明.

## 4 Crank-Nicolson-Galerkin 格式

在本节考虑对时间有二阶精度的 Crank-Nicolson-Galerkin 格式: 求  $U^n \in V_h$  满足

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_t U^n, v_h) + (a \bar{\partial}_t \cdot \cdot \cdot_h U^n, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h + (b \cdot \cdot \cdot_h U^{n-1/2}, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h = \\ (f(t_{n-1/2}), v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ U^0 = I_h u_0, \end{cases} \quad (34)$$

这里  $U^{n-1/2} = (U^n + U^{n-1})/2$ , 关于这种格式的其他应用可参考文献[12-14].

定理 4.1 问题(34)的解存在且惟一.

证明 在问题(34)中取  $v_h = U^{n-1/2}$ , 类似定理 3.1 的证明得

$$\|U^n\|^2 + \|a^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h U^n\|^2 \leq \|U^0\|^2 + \|a^{1/2} \cdot \cdot \cdot U^0\|^2. \quad (35)$$

因此问题(34)的解存在且惟一.

定理 4.2 设  $u(t_n)$  和  $U^n$  分别是(4)式和(34)式的解, 若  $u_0, u, u_t, u_{tt} \in H^2(\Omega)$ ,  $u_{tt} \in H^1(\Omega)$ , 则在各向异性网格下成立

$$\begin{aligned} & \|u(t_n) - U^n\|_h \leq \\ & Ch \left[ \|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u(\tau)\|_2 d\tau + \right. \\ & \left. \left( \int_0^{t_n} (\|u_t(\tau)\|_1^2 + \|u_t(\tau)\|_2^2 + \|u(\tau)\|_2^2 + \|u_{tt}(\tau)\|_2^2) d\tau \right)^{1/2} + \right. \\ & \left. C(\Delta t)^2 \left( \int_0^{t_n} (\|u_{tt}(\tau)\|^2 + \|u_{tt}(\tau)\|_1^2) d\tau \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

进一步的, 若  $u, u_t, u_{tt} \in H^3(\Omega)$ ,  $u_{ttt} \in H^1(\Omega)$ , 则成立

$$\begin{aligned} & \|u(t_n) - U^n\| \leq \\ & Ch^2 \left[ \|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u(\tau)\|_2 d\tau + \right. \\ & \left. \left( \int_0^{t_n} (\|u_t(\tau)\|_2^2 + \|u(\tau)\|_3^2 + \|u_t(\tau)\|_3^2 + \|u_{tt}(\tau)\|_3^2) d\tau \right)^{1/2} \right] + \\ & C(\Delta t)^2 \left( \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}(\tau)\|^2 + \|u_{ttt}(\tau)\|_1^2) d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (37)$$

以及超逼近结果

$$\begin{aligned} & \|I_h u(t_n) - U^n\|_h \leq \\ & Ch^2 \left[ \int_0^{t_n} (\|u_{tt}(\tau)\|_2^2 + \|u(\tau)\|_3^2 + \|u_t(\tau)\|_3^2 + \|u_{tt}(\tau)\|_3^2) d\tau \right]^{1/2} + \\ & C(\Delta t)^2 \left( \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}(\tau)\|^2 + \|u_{ttt}(\tau)\|_1^2) d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (38)$$

证明 令  $u(t_n) - I_h u(t_n) = \eta^n$ ,  $I_h u(t_n) - U^n = \theta^n$ . 则对任意的  $v_h \in V_h$ ,  $\eta^n$  和  $\theta^n$  满足下面的方程:

$$\begin{aligned} & (\bar{\partial}_t \theta^n, v_h) + (a \bar{\partial}_t \cdot \cdot \cdot_h \theta^n, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h + (b(\cdot \cdot \cdot_h \theta^n + \cdot \cdot \cdot_h \theta^{n-1}), \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h = \\ & (R_3^n, v_h) + (a R_4^n, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h - (b \cdot \cdot \cdot_h \eta^{n-1/2}, \cdot \cdot \cdot_h v_h)_h + \\ & \sum_K \int_{\partial K} a \frac{\partial u_t(t_{n-1/2})}{\partial n} v_h ds + \sum_K \int_{\partial K} b \frac{\partial u(t_{n-1/2})}{\partial n} v_h ds, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\begin{cases} R_3^n = - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \eta_t(\tau) d\tau + \\ \quad \frac{1}{2\Delta t} \left[ \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1/2}} (\tau - t_{n-1})^2 u_{tt}(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1/2}}^{t_n} (\tau - t_n)^2 u_{tt}(\tau) d\tau \right], \\ R_4^n = - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \cdot \cdot \cdot_h \eta_t(\tau) d\tau + \\ \quad \frac{1}{2\Delta t} \left[ \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1/2}} (\tau - t_{n-1})^2 \cdot \cdot \cdot_h u_{tt}(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1/2}}^{t_n} (\tau - t_n)^2 \cdot \cdot \cdot_h u_{tt}(\tau) d\tau \right]. \end{cases} \quad (40)$$

在(39)式中取  $v_h = \bar{\partial}_t \theta^n$ , 由 Cauchy-Schwartz 不等式、 $\varepsilon$ -Young 不等式, 以及(8)式得

$$\begin{aligned} & \|\bar{\partial}_t \theta^n\|^2 + \|a^{1/2} \bar{\partial}_t \cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} (\|b^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2 - \|b^{1/2} \cdot \cdot \cdot_h \theta^{n-1}\|^2) \leq \\ & C (\|R_3^n\|^2 + \|R_4^n\|^2 + h^2 |u_t(t_{n-1/2})|^2 + h^2 |u(t_{n-1/2})|^2) + \\ & \varepsilon \|\bar{\partial}_t \theta^n\|^2 + \varepsilon \|\bar{\partial}_t \cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2. \end{aligned} \quad (41)$$

取  $\varepsilon$  适当小, 并对 (41) 式两端关于  $n$  求和, 得

$$\begin{aligned} & \|\cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|^2 \leq \\ & C \sum_{j=1}^n (\|R_3^j\|^2 + \|R_4^j\|^2 + h^2 |u_t(t_{j-1/2})|^2 + h^2 |u(t_{j-1/2})|^2). \end{aligned} \quad (42)$$

由

$$u(t_{j-1/2}) = \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{t_{j-1/2}}^{t_j} (\tau - t_j) u u(\tau) d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1/2}} (\tau - t_{j-1}) u u(\tau) d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_j} u u(\tau) d\tau \right],$$

得

$$\begin{aligned} \|\cdot \cdot \cdot_h \theta^n\| & \leq Ch \left[ \int_0^n |u_t(\tau)|_1^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u u(\tau)|_2^2 + |u_t|_2^2 d\tau \right]^{1/2} + \\ & C(\Delta t)^2 \left[ \int_0^n (\|u u u(\tau)\|^2 + |u u u(\tau)|_1^2) d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

由三角不等式以及 (7) 式可得 (36) 式.

下面我们来证明 (37) 式和 (38) 式, 首先由文献 [10] 中的技巧得

$$\begin{aligned} & (b \cdot \cdot \cdot_h \Gamma^{n-1/2}, \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h = \\ & ((b - b) \cdot \cdot \cdot_h \Gamma^{n-1/2}, \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h \leq Ch \|\cdot \cdot \cdot_h \Gamma^{n-1/2}\| \|\cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|, \quad (43) \\ & (a R_4^n, \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h = \frac{-1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^n ((a - a) \cdot \cdot \cdot_h \Gamma(\tau), \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h d\tau + \\ & \frac{1}{2\Delta t} \left[ \int_{t_{n-1}}^{n-1/2} (\tau - t_{n-1})^2 (a \cdot \cdot \cdot_h u u(\tau), \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h d\tau + \right. \\ & \left. \int_{t_{n-1/2}}^n (\tau - t_n)^2 (a \cdot \cdot \cdot_h u u(\tau), \cdot \cdot \cdot_h \theta^n)_h d\tau \right] \leq \\ & \frac{Ch}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^n \|\cdot \cdot \cdot_h \Gamma(\tau)\| d\tau \|\cdot \cdot \cdot_h \theta^n\| + \Delta t \int_{t_{n-1}}^n |u u u(\tau)|_1 d\tau \|\cdot \cdot \cdot_h \theta^n\|. \end{aligned}$$

类似地, 可得

$$\begin{aligned} \|\theta^n\| & \leq C \|\cdot \cdot \cdot_h \theta^n\| \leq \\ & Ch^2 \left[ \int_0^n (|u_t(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_3^2 + |u_t(\tau)|_3^2 + |u u(\tau)|_3^2) d\tau \right]^{1/2} + \\ & C(\Delta t)^2 \left[ \int_0^n (\|u u u(\tau)\|^2 + |u u u(\tau)|_1^2) d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (44)$$

最后, 由三角不等式以及引理 2.2 便完成定理 4.2.

## 5 整体超收敛

令  $\mathcal{K}_h = \{K\}$  是一族平行于坐标轴的矩形网格剖分, 将其每个单元  $K$  四等分得到一族新的矩形网格, 记为  $\mathcal{K}_h$ , 即是  $K = \bigcup_{i=1}^4 K_i, K_i \in \mathcal{K}_h (i = 1, 2, 3, 4)$ . 设  $L_1, L_2, L_3$  和  $L_4$  为单元  $K$  的 4 个边长, 为了得到超收敛结果, 我们在  $K$  上构造插值算子  $I_{2h}^2$  如下 (见文献 [9]):



$$\begin{cases} I_{2h}^2 u|_K \in P_2(K), & \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ \int_{L_i} (I_{2h}^2 u - u) ds = 0, & i = 1, 2, 3, 4, \\ \int_{K_1 \cup K_3} (I_{2h}^2 u - u) dx dy = 0, \int_{K_2 \cup K_4} (I_{2h}^2 u - u) dx dy = 0, & \forall K \in \mathcal{F}_h, \end{cases} \quad (45)$$

其中,  $P_2(K)$  是  $K$  上次数不超过 2 的多项式集合.

引理 5.1<sup>[9]</sup> 对任意  $u \in H^3(\Omega)$ , 插值算子  $I_{2h}^2$  满足

$$I_{2h}^2 I_h u = I_{2h}^2 u, \quad \|I_{2h}^2 u - u\|_h \leq Ch^2 |u|_3, \quad \|I_{2h}^2 v\|_h \leq C \|v\|_h, \quad \forall v \in V_h. \quad (46)$$

定理 5.2 设  $u$  和  $u_h$  是(4) 式和(5) 式的解  $u, u_t \in H^3(\Omega)$ , 有如下的整体超收敛结果:

$$\|u - I_{2h}^2 u_h\|_h \leq Ch^2 |u|_3 + Ch^2 \left[ \int_0^t (|u_t(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u_t(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_3^2) d\tau \right]^{1/2}. \quad (47)$$

证明 由三角不等式和(46) 式得

$$\begin{aligned} \|I_{2h}^2 u_h - u\|_h &\leq \|I_{2h}^2 u_h - I_{2h}^2 I_h u\|_h + \|I_{2h}^2 I_h u - u\|_h \leq \\ &\|u_h - I_h u\|_h + \|I_{2h}^2 u - u\|_h \leq \\ &Ch^2 |u|_3 + Ch^2 \left[ \int_0^t (|u_t(\tau)|_2^2 + |u(\tau)|_2^2 + |u_t(\tau)|_3^2 + |u(\tau)|_3^2) d\tau \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (48)$$

定理得证.

## 6 数值算例

在本节为验证本文所提格式的可行性, 我们考虑问题(1), 其中

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$f = e^t xy(1-x)(1-y) + 4e^t y(1-y) + 4e^t x(1-x), \quad a(x) = b(x) = 1,$$

可以验证真解为

$$u = e^t x(1-x)y(1-y).$$

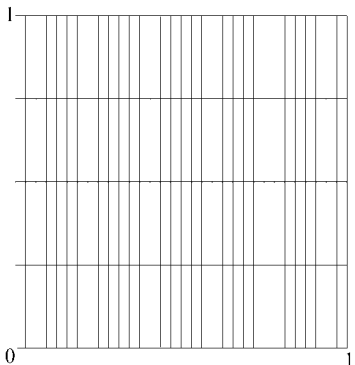


图 1 网格

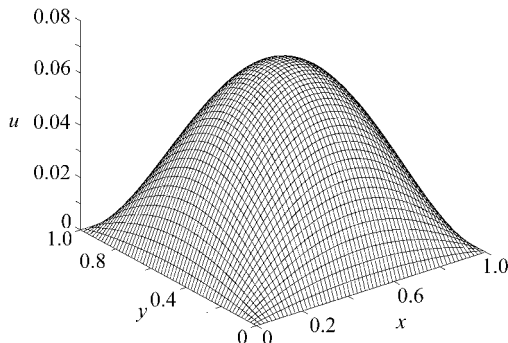


图 2 问题(1) 在  $t = 0.1$  时的真解  $u$

对  $\Omega$  采用各向异性网格剖分,  $x$  轴与  $y$  轴方向的网格比为  $m:n = 8:1$ . 图 1~ 图 3 分别

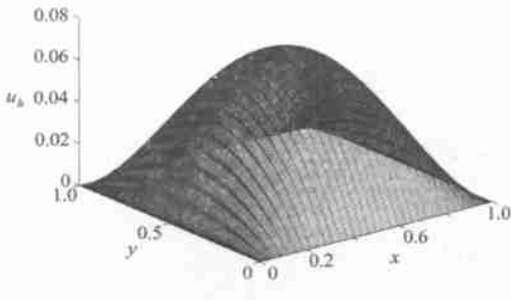


图 3 问题(5)在  $t = 0.1$  时的有限元解  $u_h$

为采用的剖分网格,  $t = 0.1$  时问题(1) 的真解以及  $t = 0.1$  时问题(5) 的有限元解.  $u, u_h, I_h u, I_{2h}^2 u_h$  分别代表真解、有限元插值、有限元解和有限元解后处理,  $\alpha$  表示平均收敛阶.

从表 1~ 表 10 中, 数据显示不同时刻的 4 种不同模意义下的误差结果. 我们可以看出  $h \rightarrow 0$  时,  $\|u - u_h\|_h, \|u - u_h\|, \|I_h u - u_h\|_h$  和  $\|u - I_{2h}^2 u_h\|_h$  分别收敛于最优价  $O(h), O(h^2), O(h^2)$  和  $O(h^2)$ , 和我们前面的理论分析完全一致.

表 1  $t = 0.1$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.001 056 641 3	0.000 282 787 0	0.000 071 960 9	0.000 018 069 0	1.956 608 283 4
$\ u - u_h\ _h$	0.048 110 062 2	0.026 135 643 4	0.013 315 157 0	0.006 688 139 0	0.948 887 308 9
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.002 946 572 8	0.000 739 916 9	0.000 184 828 7	0.000 046 176 6	1.998 577 064 3
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.049 419 813 7	0.012 696 311 0	0.003 194 984 4	0.000 800 043 4	1.982 955 793 9

表 2  $t = 0.2$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.001 564 974 2	0.000 411 860 9	0.000 104 618 1	0.000 026 258 4	1.965 737 671 2
$\ u - u_h\ _h$	0.053 400 772 9	0.028 911 207 8	0.014 718 815 1	0.007 391 945 7	0.950 944 853 2
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.005 934 227 9	0.001 490 227 5	0.000 372 270 1	0.000 093 007 2	1.998 524 500 0
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.054 772 077 6	0.014 083 196 5	0.003 544 501 0	0.000 887 585 8	1.982 470 017 3

表 3  $t = 0.3$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.002 159 261 4	0.000 563 842 3	0.000 143 097 2	0.000 035 909 2	1.970 012 443 2
$\ u - u_h\ _h$	0.059 336 710 4	0.031 989 155 3	0.016 271 384 8	0.008 169 932 5	0.953 509 623 9
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.008 991 823 9	0.002 258 170 9	0.000 564 131 0	0.000 140 943 1	1.998 476 241 7
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.060 747 461 7	0.015 635 887 8	0.003 935 985 2	0.000 985 647 3	1.981 869 571 9

表 4  $t = 0.4$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.002 802 528 6	0.000 728 941 2	0.000 184 911 3	0.000 046 397 2	1.972 181 737 1
$\ u - u_h\ _h$	0.065 948 575 3	0.035 397 037 2	0.017 988 008 7	0.009 029 836 7	0.956 189 893 5
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.012 149 012 4	0.003 051 187 2	0.000 762 268 6	0.000 190 448 2	1.998 432 108 4
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.067 386 883 5	0.017 363 559 7	0.004 371 686 4	0.001 094 788 6	1.981 247 834 1

表 5  $t = 0.5$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.003 487 227 3	0.000 905 000 0	0.000 229 508 0	0.000 057 583 5	1.973 426 241 1
$\ u - u_h\ _h$	0.073 281 319 9	0.039 166 528 9	0.019 885 570 4	0.009 980 227 6	0.958 766 952 5
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.015 436 527 3	0.003 876 989 6	0.000 968 608 9	0.000 242 003 6	1.998 391 910 4
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.074 742 720 4	0.019 278 781 4	0.004 854 728 8	0.001 215 790 3	1.980 655 550 8

表 6  $t = 0.6$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.004 214 569 0	0.001 092 221 8	0.000 276 936 2	0.000 069 480 2	1.974 212 498 2
$\ u - u_h\ _h$	0.081 392 714 2	0.043 333 540 5	0.021 982 838 8	0.011 030 589 4	0.961 129 923 5
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.018 886 484 1	0.004 743 639 5	0.001 185 165 0	0.000 296 112 2	1.998 355 436 7
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.082 878 134 9	0.021 397 231 6	0.005 389 033 7	0.001 349 633 5	1.980 117 304 8

表 7  $t = 0.7$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.004 989 141 5	0.001 291 732 9	0.000 327 479 6	0.000 082 158 5	1.974 745 881 5
$\ u - u_h\ _h$	0.090 352 454 2	0.047 938 419 9	0.024 300 637 4	0.012 191 413 7	0.963 232 782 4
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.022 532 694 5	0.005 659 625 6	0.001 414 056 9	0.000 353 303 6	1.998 322 474 2
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.091 866 781 0	0.023 737 534 8	0.005 979 275 3	0.001 497 487 9	1.979 642 325 1

表 8  $t = 0.8$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.005 817 239 3	0.001 505 125 4	0.000 381 541 0	0.000 095 719 2	1.975 127 244
$\ u - u_h\ _h$	0.100 241 755 0	0.053 026 239 7	0.026 862 038 3	0.013 474 302 9	0.965 067 011
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.026 410 999 0	0.006 633 947 1	0.001 657 532 5	0.000 414 139 4	1.998 292 792
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.101 792 842 0	0.026 321 207 3	0.006 630 863 5	0.001 660 708 1	1.979 231 243

表 9  $t = 0.9$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.006 706 278 9	0.001 734 294 4	0.000 439 600 3	0.000 110 282 8	1.975 410 797 6
$\ u - u_h\ _h$	0.111 153 349 0	0.058 647 160 7	0.029 692 582 9	0.014 892 084 8	0.966 644 591 0
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.030 559 619 4	0.007 676 202 0	0.001 917 989 3	0.000 479 218 7	1.998 266 177 2
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.112 751 354 3	0.029 172 694 3	0.007 349 951 2	0.001 840 834 9	1.978 880 232 5

表 10  $t = 1.0$  时的逼近结果

$n \times m$	$2 \times 16$	$4 \times 32$	$8 \times 64$	$16 \times 128$	$\alpha$
$\ u - u_h\ $	0.007 664 594 3	0.001 981 378 9	0.000 502 199 2	0.000 125 985 1	1.975 627 931 7
$\ u - u_h\ _h$	0.123 191 820 3	0.064 856 869 3	0.032 820 529 4	0.016 458 940 2	0.967 987 704 3
$\ I_h u - u_h\ _h$	0.035 019 536 3	0.008 796 682 3	0.002 197 998 7	0.000 549 183 7	1.998 242 390 3
$\ u - I_{2h}^2 u_h\ _h$	0.124 848 775 4	0.032 319 483 7	0.008 143 461 8	0.002 039 602 1	1.978 583 361 1

## [参 考 文 献]

- [1] Ewing R E. Time- stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial- differential equations

- [J]. SIAM J Numer Anal, 1978, **15**(6): 1125– 1150.
- [2] Nakao M.T. Error estimate of a Galerkin method for some nonlinear Sobolev equations in one space dimension[J]. Numer Math, 1985, **47**(1): 139– 157.
- [3] JIANG Zi- wen, CHEN Huan- zhen. Error estimates of mixed finite element methods for soboleve- quation[J]. Northeast Math, 2001, **17**(3): 301– 314.
- [4] 郭玲, 陈焕贞. Sobolev 方程的  $H^1$ - Galerkin 混合有限元方法[J]. 系统科学与数学, 2006, **26**(3): 301– 314.
- [5] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems [M]. Amsterdam: North- Holland, 1978.
- [6] SHI Dong- yang, MAO Shi- peng, CHEN Shao- chun. An anisotropic nonconforming finiteelement with some superconvergence results[J]. J Comput Math, 2005, **23**(3): 261– 274.
- [7] LIN Qun, Tobiska L, ZHOU Ai- hui. Superconvergence and extrapolation of nonconforming low order finite elements applied to the Poisson equation[J]. IMA J Numer Anal, 2005, **25**(1): 160– 181.
- [8] Hale J K. Ordinary Differential Equations [M]. New York: Willey- Inter Science, 1969.
- [9] 石东洋, 谢萍丽, 陈绍春. 双曲积分微分方程的各向异性非协调有限元逼近[J]. 应用数学学报, 2007, **30**(4): 654– 666.
- [10] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析 [M]. 保定: 河北大学出版社, 1996.
- [11] Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier- Stokes problem IV: Error analysis forsecond- order time discretization[J]. SIAM J Numer Anal, 1990, **27**(2): 353– 384.
- [12] HE Yin- nian. Two- level method based on finite element and Crank- Nicolson extrapolation for time- dependent Navier- Stokes equations[J]. SIAM J Numer Anal, 2003, **41**(4): 1263– 1283.
- [13] HE Yin- nian, SUN Wei- wei. Stability and convergence of the Crank- Nicolson/Adams- Bashforth scheme for the time- dependent Navier- Stokes equations[J]. SIAM J Numer Anal, 2007, **45**(2): 837– 869.
- [14] HE Yin- nian, SUN Wei- wei. Stabilized finite element methods based on Crank- Nicolson extrapolation scheme for the time- dependent Navier- Stokes equations[J]. Math Comp, 2007, **76**(257): 115– 136.

## Anisotropic Rectangular Nonconforming Finite Element Analysis for Sobolev Equations

SHI Dong- yang,    WANG Hai- hong,    GUO Cheng

( Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, P. R. China )

**Abstract:** The anisotropic rectangular nonconforming finite element method to Sobolev equations is discussed under semi- discrete and full discrete schemes, the corresponding optimal convergence error estimates and superclose property are derived, which are the same as the traditional conforming finite elements. Furthermore, the global superconvergence is obtained through post- processing technique. Finally, the numerical results illustrate the validity of our theoretical analysis.

**Key words:** nonconforming element; anisotropy; Sobolev equations; error estimates; superconvergence