

# 各向异性材料动态裂纹扩展特性和 动态应力强度因子\*

高 鑫, 王汉功, 康兴无

(西安高技术研究所 501 室, 西安 灞桥 710025)

(郭兴明推荐)

摘要: 基于各向异性材料力学, 研究了无限大各向异性材料中 III 型裂纹的动态扩展问题. 裂纹尖端的应力和位移被表示为解析函数的形式, 解析函数可以表达为幂级数的形式, 幂级数的系数由边界条件确定. 确定了 III 型裂纹的动态应力强度因子的表达式, 得到了裂纹尖端的应力分量、应变分量和位移分量. 裂纹扩展特性由裂纹扩展速度  $M$  和参数  $\alpha$  反映, 裂纹扩展越快, 裂纹尖端的应力分量和位移分量越大; 参数  $\alpha$  对裂纹尖端的应力分量和位移分量有重要影响.

关键词: 动态; 应力强度因子; 裂纹扩展; 各向异性

中图分类号: O346 文献标识码: A

## 引 言

各向异性材料具有优良特性, 它们在工程领域中得到广泛应用. 然而, 在动态载荷下, 其内在缺陷如微裂纹等容易导致结构的断裂失效. 因此, 各向异性材料的动态断裂问题已成为固体力学和材料学等专业研究的主题.

最早研究动态断裂的是 Mott, 他于 1948 年用量纲分析方法, 得到运动裂纹的动能表达式<sup>[1]</sup>. 虽然 Mott 的分析很粗略, 但是把裂纹运动速度及动能的作用提出来, 是有意义的. 最先给出裂纹的位移场、应力场与裂纹速度关系的是 Yoffe<sup>[2]</sup>. 后来, 其他一些学者也发现了类似的结果. Chen, Baker 和 Freund 等人对各向同性材料动态裂纹扩展特性进行了分析, 得到了动态应力分量和动态位移分量<sup>[3-5]</sup>. 但他们的研究仅限于各向同性材料. Kassir 和 Tse, Arcisz 和 Sih 利用积分变换法研究了正交各向异性材料运动 Griffith 裂纹问题<sup>[6-7]</sup>. Achenbach 和 Bazant, Piva 和 Viola 针对正交各向异性材料, 研究了以常速扩展裂纹尖端的应力场和位移场<sup>[8-10]</sup>, 但他们的结果仍有缺憾, 即没有对应力强度因子进行清晰的描述. 为此, Lee 等人研究了动应力强度因子  $K_I$ 、 $K_{II}$  和正交异性材料的动态裂纹扩展特性, 得到了正交异性材料裂纹尖端的动态应力分量和动态位移分量的近似表达式<sup>[11]</sup>. 但他们没有对 III 型动态裂纹进行研究. 已有的 III 型裂纹端部场的解析解都是各向同性材料在静态或动态情况下的解. 胥红敏等人在此基础上研究了动应力强度因子  $K_{III}$  和正交异性材料 II 型裂纹的动态扩展特性, 并推

\* 收稿日期: 2008-05-12; 修订日期: 2008-08-08

作者简介: 高鑫(1981-), 男, 安徽颍上人, 博士(联系人. Tel/Fax: +86-29-84741699; E-mail: gx\_10164@yahoo.com.cn).

导了正交异性材料中 II 型裂纹尖端的动态应力分量和动态位移分量<sup>[12]</sup>. 遗憾的是他们没有对各向异性材料 II 型动态裂纹进行研究.

上述研究结果是很有意义的. 但是, 对于一般的各向异性材料而言, 由于本构关系的复杂性, 其相关的研究还未深入. 对各向异性材料 II 型动态裂纹进行研究有助于研究裂纹快速扩展的力学参数, 建立新的断裂判据, 对于理解各向异性材料动态断裂的过程和本质具有重要意义.

本文基于各向异性材料力学, 采用复变函数方法, 研究无限大各向异性材料中裂纹的动态扩展问题. 推导 II 型裂纹尖端附近的动态应力场、动态应变场和动态位移场. 进一步讨论了参数对裂纹扩展特性的影响.

## 1 裂纹端部场的解析表达

在固定坐标系  $OXY$  中, 平衡方程为

$$\frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

这里,  $t$  为时间,  $\rho$  为材料的密度,  $w$  为  $z$  向的位移. 各向异性材料平面问题的本构方程和几何方程分别为

$$\tau_{YZ} = S_{44} \gamma_{YZ} + S_{45} \gamma_{XZ}, \quad \tau_{XZ} = S_{45} \gamma_{YZ} + S_{55} \gamma_{XZ}, \quad (2)$$

$$\gamma_{XZ} = \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z}, \quad \gamma_{YZ} = \frac{\partial w}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Z}, \quad (3a)$$

这里,  $U$  和  $V$  分别为  $X$  和  $Y$  向位移. 对于 III 型裂纹, 不计位移  $U$  和  $V$ . 式 (3a) 化为

$$\gamma_{XZ} = \frac{\partial w}{\partial X}, \quad \gamma_{YZ} = \frac{\partial w}{\partial Y}, \quad (3b)$$

对于各向异性材料, 取坐标轴与其弹性主轴重合, 有刚度系数分量

$$S_{44} = G_{23}, \quad S_{45} = 0, \quad S_{55} = G_{31}, \quad (4)$$

式中,  $G_{31}$  和  $G_{23}$  为弹性常数. 当坐标轴与其弹性主轴夹角为  $\alpha$  时, 由弹性理论知

$$\begin{cases} S_{44} = G_{23} \cos^2 \alpha + G_{31} \sin^2 \alpha, \\ S_{45} = (G_{31} - G_{23}) \sin \alpha \cos \alpha, \\ S_{55} = G_{23} \sin^2 \alpha + G_{31} \cos^2 \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

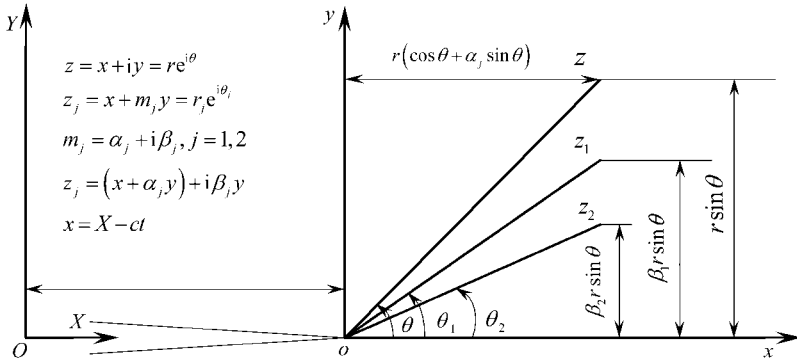


图 1 极坐标  $(r, \theta)$ 、 $(r_1, \theta_1)$  和  $(r_2, \theta_2)$  之间的关系

设裂纹以常速  $c$  沿  $X$  轴扩展, 引入运动坐标系  $oxy$ , 如图 1 所示, 有坐标变换关系式

$$x = X - ct, \quad y = Y. \quad (6)$$

将式(2)、(3)和式(6)代入式(1),式(1)变为

$$S_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (7)$$

设复变量

$$z = x + my. \quad (8)$$

由式(7)、(8)得

$$(S_{44}m^2 + 2S_{45}m + S_{55} - \rho c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (9)$$

式(9)的解为

$$w(z) = \phi(z_1) + \varphi(z_2) + \overline{\phi(z_1)} + \overline{\varphi(z_2)} = 2\text{Re}[\phi(z_1) + \varphi(z_2)], \quad (10)$$

其中,  $z_1 = x + m_1y$ ,  $z_2 = x + m_2y$ .  $m_1, m_2$  为特征方程(11)的解.

$$S_{44}m^2 + 2S_{45}m + S_{55} - \rho c^2 = 0, \quad (11)$$

$$m_{1,2} = \frac{-S_{45} \pm i \sqrt{S_{44}(S_{55} - \rho c^2) - S_{45}^2}}{S_{44}}.$$

定义

$$\phi(z_1) = \frac{d\phi}{dz_1}, \quad \varphi(z_2) = \frac{d\varphi}{dz_2}, \quad (12)$$

将式(10)和(12)代入式(2)和(3)得

$$\begin{cases} \tau_{xz} = 2\text{Re}[(S_{45} + m_1S_{44})\phi' + (S_{45} + m_2S_{44})\varphi'], \\ \tau_{yz} = 2\text{Re}[(S_{55} + m_1S_{45})\phi' + (S_{55} + m_2S_{45})\varphi'], \end{cases} \quad (13a)$$

$$\gamma_{xz} = 2\text{Re}[\phi' + \varphi'], \quad \gamma_{yz} = 2\text{Re}[m_1\phi' + m_2\varphi']. \quad (13b)$$

在裂纹面,由于上下裂纹面的不连续性,裂纹尖端与裂纹面的夹角  $\theta$  分别为  $\pi$  和  $-\pi$ , 即  $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi$ , 在  $x$  轴上  $r = r_1 = r_2$ , 此时有

$$\tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad (14)$$

则由式(13)和(14)得式(15):

$$\begin{cases} D_1\phi + D_2\overline{\phi} + D_3\varphi + D_4\overline{\varphi} = 0, \\ D_5\phi + D_6\overline{\phi} + D_7\varphi + D_8\overline{\varphi} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} D_1 = S_{45} + m_1S_{44}, \quad D_2 = \overline{S_{45} + m_1S_{44}}, \quad D_3 = S_{45} + m_2S_{44}, \\ D_4 = \overline{S_{45} + m_2S_{44}}, \quad D_5 = S_{55} + m_1S_{45}, \quad D_6 = \overline{S_{55} + m_1S_{45}}, \\ D_7 = S_{55} + m_2S_{45}, \quad D_8 = \overline{S_{55} + m_2S_{45}}, \end{cases} \quad (16)$$

解析函数  $\phi(z_1)$  和  $\varphi(z_2)$  表示成幂函数的形式为

$$\begin{cases} \phi(z_1) = \sum_n A_n z_1^\lambda = \sum_n (A_n^0 + iA_n^*) r_1^\lambda e^{i\lambda\theta_1}, \\ \varphi(z_2) = \sum_n B_n z_2^\lambda = \sum_n (B_n^0 + iB_n^*) r_2^\lambda e^{i\lambda\theta_2}, \end{cases} \quad (17a)$$

$$\begin{cases} \phi(z_1) = \sum_n \lambda (A_n^0 + iA_n^*) (r_1 e^{i\theta_1})^{\lambda-1}, \\ \varphi(z_2) = \sum_n \lambda (B_n^0 + iB_n^*) (r_2 e^{i\theta_2})^{\lambda-1}, \end{cases} \quad (17b)$$

式中,  $A_n^0$  和  $B_n^0$  与  $A_n^*$  和  $B_n^*$  分别为复数  $A_n$  和  $B_n$  的实部和虚部.  $\lambda_n$  为实特征值, 后文将确定.

将式(17)代入式(15)得到:

1) 当  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$  时

$$\begin{cases} (D_1 A_n + D_3 B_n) e^{i(\lambda_n - 1)\pi} + (D_2 \overline{A_n} + D_4 \overline{B_n}) e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} = 0, \\ (D_5 A_n + D_7 B_n) e^{i(\lambda_n - 1)\pi} + (D_6 \overline{A_n} + D_8 \overline{B_n}) e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} = 0; \end{cases} \quad (18a)$$

2) 当  $\theta_1 = \theta_2 = -\pi$  时

$$\begin{cases} (D_1 A_n + D_3 B_n) e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} + (D_2 \overline{A_n} + D_4 \overline{B_n}) e^{i(\lambda_n - 1)\pi} = 0, \\ (D_5 A_n + D_7 B_n) e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} + (D_6 \overline{A_n} + D_8 \overline{B_n}) e^{i(\lambda_n - 1)\pi} = 0. \end{cases} \quad (18b)$$

若  $(D_1 A_n + D_3 B_n)$  和  $(D_2 \overline{A_n} + D_4 \overline{B_n})$ ,  $(D_5 A_n + D_7 B_n)$  和  $(D_6 \overline{A_n} + D_8 \overline{B_n})$  有非零解, 则有

$$\begin{vmatrix} e^{i(\lambda_n - 1)\pi} & e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} \\ e^{-i(\lambda_n - 1)\pi} & e^{i(\lambda_n - 1)\pi} \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

$$\sin 2(\lambda_n - 1)\pi = 0, \quad (20)$$

解得

$$\lambda_n = n/2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (21)$$

这里,  $\lambda_n$  取正值, 否则没有物理意义.

由式(16)、(18)、(21)得

$n$  为奇数时

$$\begin{cases} D_1 A_n + D_3 B_n = D_2 \overline{A_n} + D_4 \overline{B_n} = \overline{D_1 A_n + D_3 B_n}, \\ D_5 A_n + D_7 B_n = D_6 \overline{A_n} + D_8 \overline{B_n} = \overline{D_5 A_n + D_7 B_n}, \end{cases} \quad (22a)$$

即

$$A_n^0 = B_n^0, \quad A_n^* = -B_n^*. \quad (22b)$$

$n$  为偶数时

$$\begin{cases} D_1 A_n + D_3 B_n = -(D_2 \overline{A_n} + D_4 \overline{B_n}) = -\overline{(D_1 A_n + D_3 B_n)}, \\ D_5 A_n + D_7 B_n = -(D_6 \overline{A_n} + D_8 \overline{B_n}) = -\overline{(D_5 A_n + D_7 B_n)}, \end{cases} \quad (22c)$$

即

$$A_n^0 = -B_n^0, \quad A_n^* = B_n^*. \quad (22d)$$

将式(17)代入式(10)、(13)得

$$w(z) = \Phi(z_1) + \Phi(z_2) + \overline{\Phi(z_1)} + \overline{\Phi(z_2)} = 2\text{Re} \left[ \sum_n (A_n^0 + iA_n^*) r_1^n e^{i\lambda_n \theta} + \sum_n (B_n^0 + iB_n^*) r_2^n e^{i\lambda_n \theta} \right], \quad (23)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = 2\text{Re} \left[ (S_{45} + m_1 S_{44}) \sum_n \lambda_n (A_n^0 + iA_n^*) (r_1 e^{i\theta_1})^{\lambda_n - 1} + (S_{45} + m_2 S_{44}) \sum_n \lambda_n (B_n^0 + iB_n^*) (r_2 e^{i\theta_2})^{\lambda_n - 1} \right], \\ \tau_{xz} = 2\text{Re} \left[ (S_{55} + m_1 S_{45}) \sum_n \lambda_n (A_n^0 + iA_n^*) (r_1 e^{i\theta_1})^{\lambda_n - 1} + (S_{55} + m_2 S_{45}) \sum_n \lambda_n (B_n^0 + iB_n^*) (r_2 e^{i\theta_2})^{\lambda_n - 1} \right], \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} y_{yz} = 2\text{Re} \left[ m_1 \sum_n \lambda_n (A_n^0 + iA_n^*) (r_1 e^{i\theta_1})^{\lambda_n - 1} + m_2 \sum_n \lambda_n (B_n^0 + iB_n^*) (r_2 e^{i\theta_2})^{\lambda_n - 1} \right], \\ y_{xz} = 2\text{Re} \left[ \sum_n \lambda_n (A_n^0 + iA_n^*) (r_1 e^{i\theta_1})^{\lambda_n - 1} + \sum_n \lambda_n (B_n^0 + iB_n^*) (r_2 e^{i\theta_2})^{\lambda_n - 1} \right]. \end{cases} \quad (25)$$

当  $n = 1$  时, 式(23)~(25)为

$$w(z) = 2\text{Re}[(A_1^0 + iA_1^*)(r_1e^{i\theta_1})^{1/2} + (B_1^0 + iB_1^*)(r_2e^{i\theta_2})^{1/2}], \quad (26)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \text{Re}[(S_{45} + m_1S_{44})(A_n^0 + iA_n^*)(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} + \\ (S_{45} + m_2S_{44})(B_n^0 + iB_n^*)(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}], \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \text{Re}[(S_{55} + m_1S_{45})(A_n^0 + iA_n^*)(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} + \\ (S_{55} + m_2S_{45})(B_n^0 + iB_n^*)(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}], \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = \text{Re}[m_1(A_n^0 + iA_n^*)(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} + m_2(B_n^0 + iB_n^*)(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}], \\ \gamma_{xz} = \text{Re}[(A_n^0 + iA_n^*)(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} + (B_n^0 + iB_n^*)(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}]. \end{cases} \quad (28)$$

式(26)中,当 $\theta = 0$ 时,有

$$w = 0, \quad (29)$$

则由式(22)、(26)、(29)得

$$A_1^0 = B_1^0 = 0, \quad (30)$$

由此可以得到一般常数

$$A_n^0 = B_n^0 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (31)$$

把式(31)分别代入式(23)~(25)得到位移场、应力场和应变场的一般表达式为

$$w(z) = 2A_n^* \text{Re} \left[ \sum_n i r_1^{n/2} e^{i\theta_1(n/2)} + \sum_n (-1)^n i r_2^{n/2} e^{i\theta_2(n/2)} \right], \quad (32)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = nA_n^* \text{Re} \left[ (S_{45} + m_1S_{44}) \sum_n i (r_1e^{i\theta_1})^{n/2-1} + \right. \\ \left. (S_{45} + m_2S_{44}) \sum_n (-1)^n i (r_2e^{i\theta_2})^{n/2-1} \right], \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = nA_n^* \text{Re} \left[ (S_{55} + m_1S_{45}) \sum_n i (r_1e^{i\theta_1})^{n/2-1} + \right. \\ \left. (S_{55} + m_2S_{45}) \sum_n (-1)^n i (r_2e^{i\theta_2})^{n/2-1} \right], \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = nA_n^* \text{Re} \left[ m_1 \sum_n i (r_1e^{i\theta_1})^{n/2-1} + m_2 \sum_n (-1)^n i (r_2e^{i\theta_2})^{n/2-1} \right], \\ \gamma_{xz} = nA_n^* \text{Re} \left[ \sum_n i (r_1e^{i\theta_1})^{n/2-1} + \sum_n (-1)^n i (r_2e^{i\theta_2})^{n/2-1} \right]. \end{cases} \quad (34)$$

把式(31)分别代入式(26)~(28)得到裂纹尖端位移场、应力场和应变场的表达式为

$$w(z) = 2A_1^* \text{Re} [i(r_1e^{i\theta_1})^{1/2} - i(r_2e^{i\theta_2})^{1/2}], \quad (35)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = A_1^* \text{Re} [i(S_{45} + m_1S_{44})(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} - i(S_{45} + m_2S_{44})(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}], \\ \tau_{xz} = A_1^* \text{Re} [i(S_{55} + m_1S_{45})(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} - i(S_{55} + m_2S_{45})(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}], \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = A_1^* \text{Re} [im_1(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} - im_2(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}], \\ \gamma_{xz} = A_1^* \text{Re} [i(r_1e^{i\theta_1})^{-1/2} - i(r_2e^{i\theta_2})^{-1/2}]. \end{cases} \quad (37)$$

定义动态应力强度因子为

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz} \quad (\theta = 0), \quad (38)$$

由式(36)、(38)得

$$K_{III} = -\sqrt{2\pi} S_{44} A_1^* \frac{m_1 - m_2}{i}, \quad (39)$$

$$A_1^* = -\frac{iK_{III}}{\sqrt{2\pi} S_{44} (m_1 - m_2)}. \quad (40)$$

以上关系推广到一般常数,有

$$A_n^* = - \frac{iK_{III}^n}{\sqrt{2\pi}S_{44}(m_1 - m_2)}. \quad (41)$$

将式(41)分别代入式(32)~(34),可得位移场、应力场和应变场的一般表达式为

$$w(z) = - \frac{2iK_{III}^n r^{n/2}}{\sqrt{2\pi}S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ \sum_n i(\cos\theta + m_1 \sin\theta)^{n/2} + \sum_n (-1)^n i(\cos\theta + m_2 \sin\theta)^{n/2} \right], \quad (42)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = - \frac{niK_{III}^n r^{(n-2)/2}}{\sqrt{2\pi}S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ (S_{45} + m_1 S_{44}) \sum_n i(\cos\theta + m_1 \sin\theta)^{(n-2)/2} + (S_{45} + m_2 S_{44}) \sum_n (-1)^n i(\cos\theta + m_2 \sin\theta)^{(n-2)/2} \right], \\ \tau_{xz} = - \frac{niK_{III}^n r^{(n-2)/2}}{\sqrt{2\pi}S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ (S_{55} + m_1 S_{45}) \sum_n i(\cos\theta + m_1 \sin\theta)^{(n-2)/2} + (S_{55} + m_2 S_{45}) \sum_n (-1)^n i(\cos\theta + m_2 \sin\theta)^{(n-2)/2} \right], \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = - \frac{niK_{III}^n r^{(n-2)/2}}{\sqrt{2\pi}S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ m_1 \sum_n i(\cos\theta + m_1 \sin\theta)^{(n-2)/2} + m_2 \sum_n (-1)^n i(\cos\theta + m_2 \sin\theta)^{(n-2)/2} \right], \\ \gamma_{xz} = - \frac{niK_{III}^n r^{(n-2)/2}}{\sqrt{2\pi}S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ \sum_n i(\cos\theta + m_1 \sin\theta)^{(n-2)/2} + \sum_n (-1)^n i(\cos\theta + m_2 \sin\theta)^{(n-2)/2} \right]. \end{cases} \quad (44)$$

当  $n < 0$ , 式(42)中  $r \rightarrow 0$ , 位移无限大, 因此  $n$  值不能为负; 当  $n = 0$ , 式(42)位移为刚体位移, 式(43)中应力分量和式(44)中应变分量为 0; 因此特征值  $n$  为自然数.

将式(40)分别代入式(35)~(37), 得到裂纹尖端位移场、应力场和应变场为

$$w(z) = - \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2iK_{III}}{S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ i \sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta} - i \sqrt{\cos\theta + m_2 \sin\theta} \right], \quad (45)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}r} \frac{i}{S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ \frac{S_{45} + m_1 S_{44}}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} i - \frac{S_{45} + m_2 S_{44}}{\sqrt{\cos\theta + m_2 \sin\theta}} i \right], \\ \tau_{xz} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}r} \frac{i}{S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ \frac{S_{55} + m_1 S_{45}}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} i - \frac{S_{55} + m_2 S_{45}}{\sqrt{\cos\theta + m_2 \sin\theta}} i \right], \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}r} \frac{i}{S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_1 i}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} - \frac{m_2 i}{\sqrt{\cos\theta + m_2 \sin\theta}} \right], \\ \gamma_{xz} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}r} \frac{i}{S_{44}(m_1 - m_2)} \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} - \frac{i}{\sqrt{\cos\theta + m_2 \sin\theta}} \right]. \end{cases} \quad (47)$$

当  $S_{45} = 0$  时, 式(45)~(47)为

$$w(z) = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2K_{III}}{\sqrt{S_{44}(S_{55} - Q^2)}} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta} \right], \quad (48)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{S_{55}}{\sqrt{S_{44}(S_{55} - \rho^2)}} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \nu_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{S_{44}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \nu_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sqrt{S_{44}(S_{55} - \rho^2)}} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right]. \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sqrt{S_{44}(S_{55} - \rho^2)}} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right]. \end{cases} \quad (50)$$

式(48)~(50)为正交异性材料 II 型动态裂纹端部场的解析表达式. 与胥红敏等人<sup>[12]</sup>的结果相同(见附录). 当  $S_{45} = 0$  且  $S_{44} = S_{55} = G$  时, 式(45)~(47)分别为各向同性材料 III 型动态裂纹端部场的解析表达式. 当  $c = 0$  时,  $m_1$  和  $m_2$  仅由材料常数决定, 式(45)~(47)分别为

$$w(z) = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2K_{III}}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta} \right] = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{K_{III}}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta} \right], \quad (51)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}} \operatorname{Im} \left[ \frac{S_{45} + m_1 S_{44}}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right] = \\ \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}} \operatorname{Im} \left[ \frac{S_{55} + m_1 S_{45}}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right] = \\ \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left[ \frac{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2} + iS_{45}}{S_{44} \sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right] = \\ - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Im} \left[ \frac{m_1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} i \right] = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{m_1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \nu_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}} \operatorname{Im} \left[ \frac{m_1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \nu_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right]. \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right], \\ \tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + m_1 \sin\theta}} \right]. \end{cases} \quad (53)$$

式(51)~(53)分别为各向异性材料 II 型静态裂纹端部场的解析表达式. 这与杨维阳等人<sup>[13]</sup>的结果相同.

## 2 求解结果

利用纤维增强复合材料 T300/5208 研究扩展裂纹尖端应力和位移分布特性. 材料常数为  $G_{23} = 4.13 \text{ GPa}$ ,  $G_{31} = 7.17 \text{ GPa}$ . 定义裂纹扩展速度  $M = c(\rho/S_{55})^{1/2}$ , 其取值分别为  $M = 0, 0.6, 0.8, 0.9$ . 纤维方向角  $\alpha$  取值为  $\alpha = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/2$ .

图 2 为裂纹尖端标准化的剪应力  $\tau_{yz}/\tau_{yz}^*$  与标准化裂纹扩展速度  $M$  和纤维角度  $\alpha$  之间的关

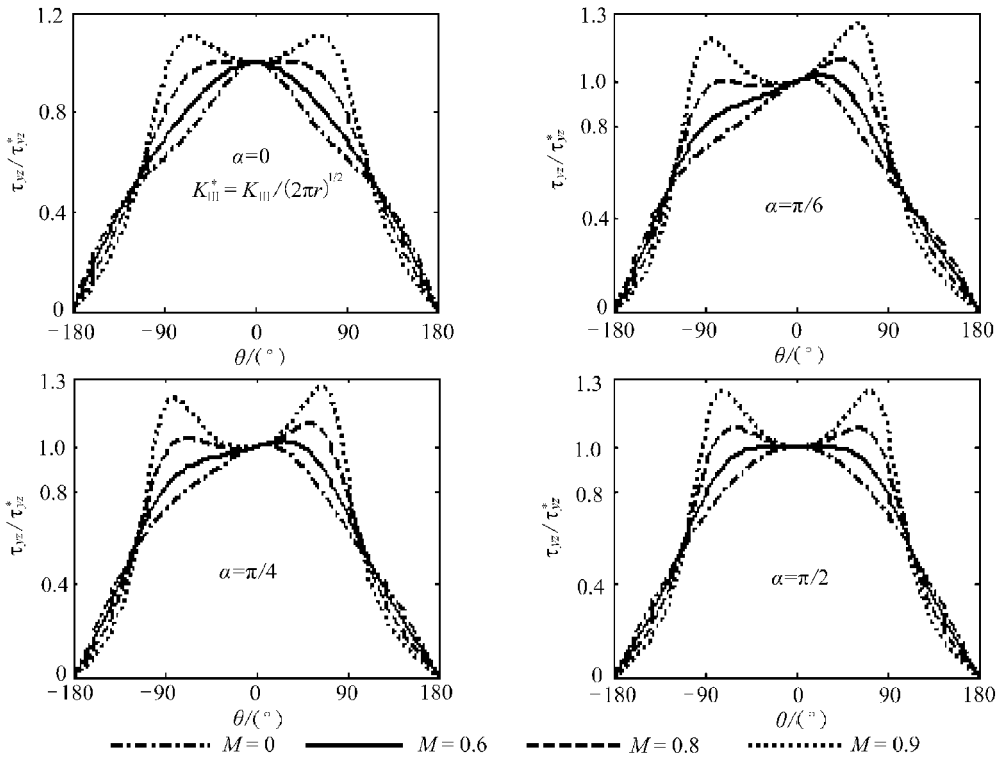


图 2 裂纹尖端  $\tau_{yz}^*/\tau_{yz}^*$  随  $M$  和  $\alpha$  的变化

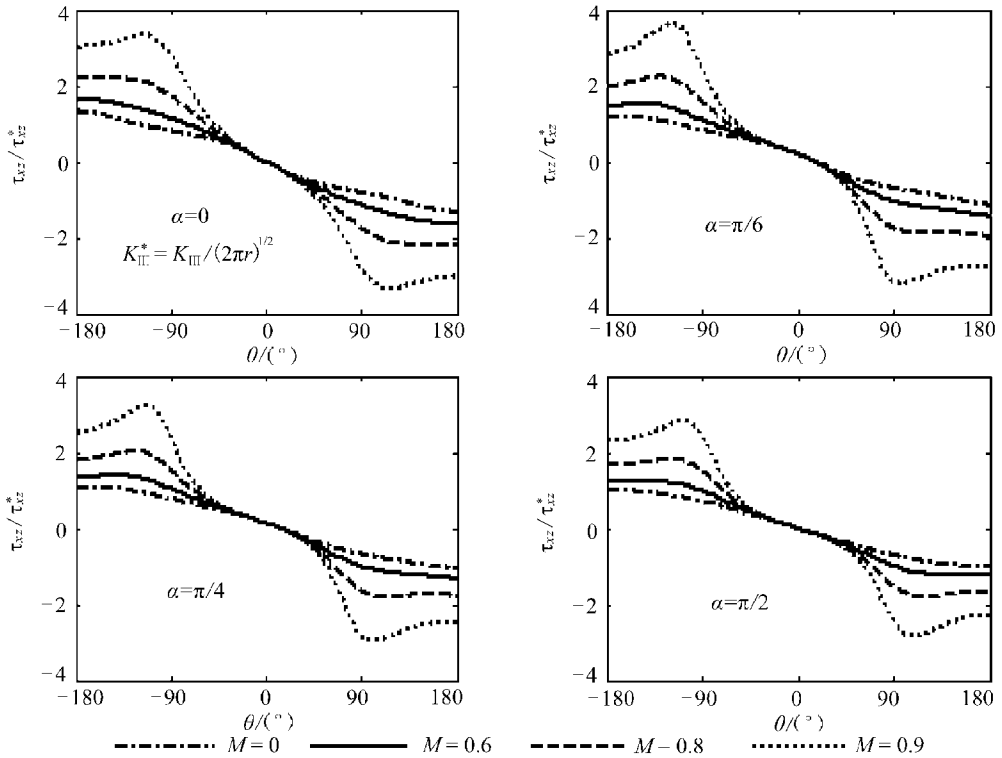


图 3 裂纹尖端  $\tau_{xz}^*/\tau_{xz}^*$  随  $M$  和  $\alpha$  的变化



系. 可以看出,  $\theta = \pm 120^\circ$  为 2 个转折点, 在两点之间即当  $\theta \in [-120^\circ, 120^\circ]$  时, 任何以常速扩展裂纹的应力值都比静态裂纹 ( $M = 0$ ) 的相应值大, 且裂纹扩展越快, 应力值越大; 当  $\theta \in [-180^\circ, -120^\circ] \cup [120^\circ, 180^\circ]$  时, 得到的结果与上述结果相反. 对不同的  $M$  值和  $\alpha$  值, 当  $\theta \in [-120^\circ, 120^\circ]$  时,  $M$  和  $\alpha$  对应力值的影响较大; 当  $\theta \in [-180^\circ, -120^\circ] \cup [120^\circ, 180^\circ]$  时,  $M$  和  $\alpha$  对应力值的影响较小. 当  $\alpha = 0, \pi/2$  时, 由于弹性主轴关于裂纹面对称, 对于不同的  $M$  值, 所得到的应力值也关于裂纹面对称.

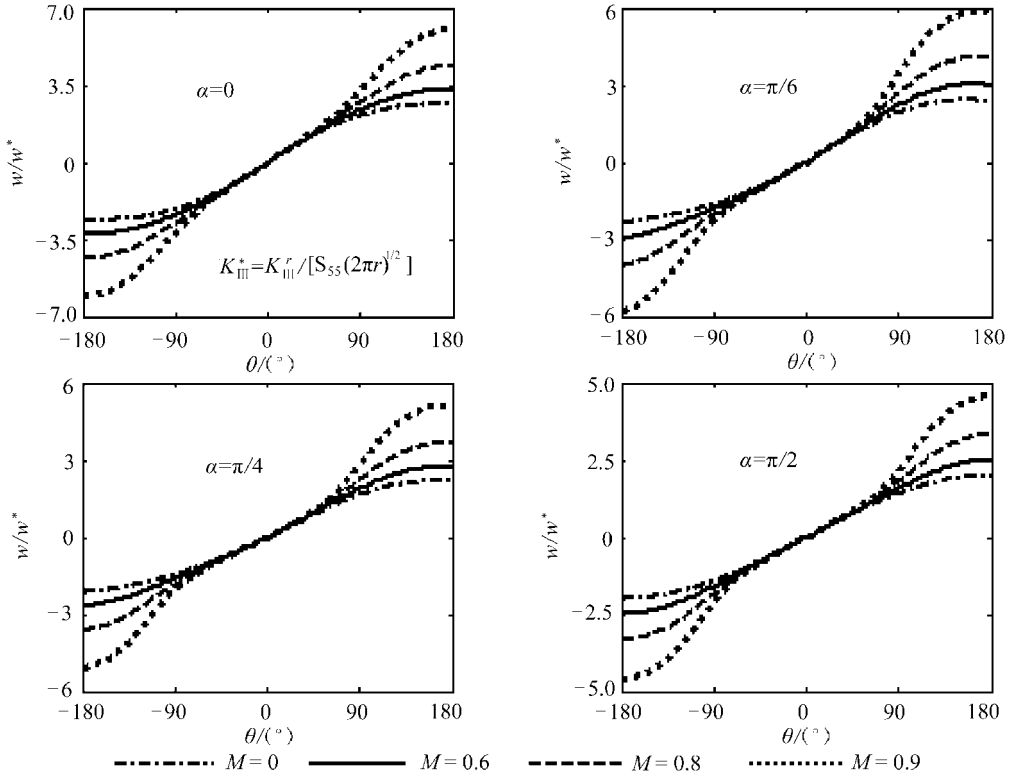


图 4 裂纹尖端  $w/w^*$  随  $M$  和  $\alpha$  的变化

图 3 为裂纹尖端标准化的剪应力  $\tau_{xz}/\tau_{xz}^*$  与标准化裂纹扩展速度  $M$  和纤维角度  $\alpha$  之间的关系. 可以看出, 裂纹扩展速度越快, 应力值越大. 对不同的值  $M$  和  $\alpha$  值, 当  $\theta \in [-180^\circ, -45^\circ] \cup [45^\circ, 180^\circ]$  时,  $M$  和  $\alpha$  对应力值的影响较大; 当  $\theta \in [-45^\circ, 45^\circ]$  时,  $M$  和  $\alpha$  对应力值几乎没有影响. 当  $\alpha = 0, \pi/2$  时, 由于弹性主轴关于裂纹面对称, 对于不同的  $M$  值, 所得到的应力值关于裂纹面反对称.

图 4 为裂纹尖端标准化的位移  $w/w^*$  与标准化裂纹扩展速度  $M$  和纤维角度  $\alpha$  之间的关系. 可以看出, 裂纹扩展速度越快, 位移值越大. 对不同的值  $M$  和  $\alpha$  值, 位移的最大值位于  $\theta = \pm 180^\circ$  处; 当  $\theta \in [-180^\circ, -50^\circ] \cup [50^\circ, 180^\circ]$  时,  $M$  和  $\alpha$  对位移值的影响较大; 当  $\theta \in [-50^\circ, 50^\circ]$  时,  $M$  和  $\alpha$  对位移值几乎没有影响. 对不同的  $M$  值, 位移值随着  $\alpha$  值的增加逐渐减小. 当  $\alpha = 0, \pi/2$  时, 由于弹性主轴关于裂纹面对称, 对于不同的  $M$  值, 所得到的位移值关于裂纹面反对称.

### 3 结 论

通过以上分析, 得到以下结论:

- 1) 确定了 II 型常速扩展裂纹的动态应力强度因子的表达式, 得到了裂纹尖端的应力分量、应变分量和位移分量;
- 2) 本文得到的裂纹尖端位移场、应力场和应变场具有统一性. 通过参数的修改, 可以分别得到正交各向异性材料和各向同性材料常速扩展裂纹和静态裂纹尖端位移场、应力场和应变场的表达式;
- 3) 指出了文献[12]中存在的错误之处;
- 4) 裂纹扩展速度  $M$  和纤维角度  $\alpha$  对裂纹尖端应力场和位移场有影响, 但  $\theta$  在一定范围内, 这种影响较小, 甚至可以忽略;
- 5) 裂纹扩展速度  $M$  越快, 裂纹尖端应力和位移的最大值越大. 裂纹尖端位移值随着值的增加逐渐减小. 当  $\alpha = 0, \pi/2$  时, 裂纹尖端应力分量和位移分量关于裂纹面对称或反对称.

## 附 录

文献[12]中式(13)  $\tau_{yz}$  表达式有误, 应为

$$\tau_{yz} = -2 \sqrt{C_{44}(C_{55} - \rho c^2)} \operatorname{Im}[\psi(z_1) - \psi'(z_2)].$$

更改后, 经推导所得结果式(33)、(34)为

$$\tau_{yz} = \frac{K_1^*}{\sqrt{2\pi r_0}} \cos \frac{\theta_0}{2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{K_1^*}{\sqrt{2\pi r_0}} \frac{C_{55}}{\sqrt{C_{44}(C_{55} - \rho c^2)}} \sin \frac{\theta_0}{2},$$

$$w = \frac{K_1^*}{\sqrt{2\pi r_0}} \frac{2r_0}{\sqrt{C_{44}(C_{55} - \rho c^2)}} \sin \frac{\theta_0}{2}.$$

其表达式形式上与本文结果不同, 本质上与本文结果相同.

## [参 考 文 献]

- [1] Mott N F. Fracture of metals: theoretical considerations[J]. Engineering, 1948, **165**(4275): 16- 18.
- [2] Yoffe E H. The moving Griffith crack[J]. Philosophical Magazine, 1951, **42**(330): 739- 750.
- [3] Chen E P. Sudden appearance of a crack in a stretched finite strip[J]. Journal of Applied Mechanics, 1978, **45**(2): 270- 280.
- [4] Baker B R. Dynamic stresses created by a moving crack[J]. Journal of Applied Mechanics, 1962, **29**(4): 449- 458.
- [5] Freund L B. Dynamic crack propagation[J]. The Mechanics of Fracture, ASME, 1976, **19**(1): 105- 134.
- [6] Kassir M K, Tse S. Moving Griffith crack in an orthotropic material[J]. International Journal of Engineering Science, 1983, **21**(4): 315- 325.
- [7] Arcisz M, Sih G C. Effect of orthotropy on crack propagation[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1984, **1**(3): 225- 238.
- [8] Achenbach J D, Bazant Z P. Elastodynamic near- tip stress and displacement fields for rapidly propagating crack in orthotropic materials[J]. Journal of Applied Mechanics, 1975, **42**(75): 183- 189.
- [9] Piva A, Viola E. Crack propagation in an orthotropic medium[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1988, **29**(5): 535- 548.
- [10] Viola E, Piva A, Radi E. Crack propagation in an orthotropic medium under general loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1989, **34**(5/6): 1155- 1174.
- [11] Lee Kwang- Ho, Hawong Jai- Sug, Choi Sun- Ho. Dynamic stress intensity factors and dynamic crack propagation characteristics of orthotropic material[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1996,

53(1): 119– 140.

- [12] 胥红敏, 姚学锋, 冯西桥. 裂纹稳态扩展下正交异性材料的动应力强度因子  $K_{III}$  解答[J]. 工程力学, 2006, 23(10): 68– 72.
- [13] 杨维阳, 李俊林, 张雪霞. 复合材料断裂复变方法[M]. 北京: 科学出版社, 2005, 55– 56.

## Dynamic Stress Intensity Factor and Dynamic Crack Propagation Characteristics of Anisotropic Material

GAO Xin, WANG Han-gong, KANG Xing-wu

(501 Section of Xi'an High-Tech Institute, Xi'an 710025, P. R. China)

**Abstract:** Based on mechanics of anisotropic material, the dynamic propagation problem of mode III crack in an infinite anisotropic body is investigated. The stresses and displacements around the crack tip were expressed as analytical complex function, which can be represented in power series. The constant coefficients of the series are determined by boundary conditions. The expression of dynamic stress intensity factors for mode III crack was obtained, and the dynamic stress components, strain components and dynamic displacement components around the crack tip were derived. The crack propagation characteristics were represented with mechanical properties of anisotropic material, crack speeds  $M$  and parameters  $\alpha$ . The faster the crack velocity, the greater the maximum of stress components and dynamic displacement components around crack tip. The parameters  $\alpha$  particularly affect the stress components and dynamic displacement components around crack tip.

**Key words:** dynamic; stress intensity factor; crack propagation; anisotropy