

对流占优问题的无网格稳定化方法*

张小华, 欧阳洁, 王建瑜

(西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

(鲁传敬推荐)

摘要: 应用标准的无网格方法求解对流占优问题时会出现数值伪振荡. 针对此问题, 给出了无网格方法中消除非稳定数值解的 4 种技术, 即节点加密、增大节点影响半径、完全迎风无网格稳定化方法、自适应无网格稳定化方法. 并将这 4 种技术应用于径向点插值方法求解一维或二维对流扩散方程. 数值结果表明这 4 种技术均能有效地消除对流占优时的数值伪振荡现象, 且自适应迎风无网格稳定化方法是 4 种技术中最有效的.

关键词: 无网格方法; 对流扩散方程; 稳定化方法

中图分类号: O35; O241 **文献标识码:** A

引 言

在环境保护研究领域中, 经常遇到流体中的污染物(包括化学的、生物的或热的污染)在流体介质中的对流扩散问题. 这类问题通常采用有限元方法(finite element method, FEM)、有限差分法(finite difference method, FDM)、有限体积法(finite volume method, FVM)求解. 但是, 上述方法在求解对流占优问题时会出现数值伪振荡现象. 这是因为当对流效应比较强时, 在求解区域的边界上会形成梯度变化剧烈的很薄的边界层, 而这个薄边界层通常很难模拟, 因此精确模拟对流扩散问题成为环境保护等领域的难点之一. 针对上述问题, 对有限元方法和有限差分方法, 许多研究工作者构造了大量的高精度格式来消除数值伪振荡现象, 如迎风有限差分格式、streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG) 方法^[1]、Galerkin/least squares (GLS) 方法^[1], sub-grid scale (SGS) 方法^[1]、least-squares (LS) 方法^[1]等.

无网格方法是近年来迅速兴起的一种数值方法, 该方法构造形函数时不需要网格, 可以显著减少网格畸变的影响. 迄今为止, 已经提出了一系列无网格方法. 如光滑质点流体动力学方法^[2](smoothed particle hydrodynamics method, SPH)、再生核粒子方法^[3-4](reproducing kernel particle method, RKPM)、无网格 Galerkin 方法^[5-6](element free Galerkin method, EFG)、有限点方法^[7-9](finite point method, FPM)、无网格局部 Petrov-Galerkin 方法^[5, 10](meshless local Petrov-Galerkin method, MLPG)、多项式点插值法^[5](polynomial point interpolation method, PPIM)、径向基函数插值

* 收稿日期: 2007-09-20; 修订日期: 2008-06-26

基金项目: 国家自然科学基金(重大)资助项目(10590353); 陕西省自然科学基金资助项目(2005A16)

作者简介: 张小华(1980—), 男, 湖北枝江人, 博士生(E-mail: chafen03@mail.nwpu.edu.cn);

欧阳洁(1957—), 女, 教授, 博士(联系人. Tel: +86-29-88495234; E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn).

法^[5](radial point interpolation method, RPIM)等。目前无网格方法的应用主要集中在固体力学领域,而针对对流占优问题的研究还较少。Liu 等人^[4]应用 RKPM 求解了二维稳态的对流扩散方程,并采用 SUPG 方法消除对流项带来的数值振荡。Oñate 等人^[7]应用 FPM 求解对流扩散方程时,通过添加一个像有限元 SUPG 方法那样的稳定项,可很好地消除数值伪振荡现象,同时 Oñate 等人^[8-9]还指出仅在控制方程中添加稳定项是不够的,Neumann 边界上也需要做类似地处理。Lin 和 Atluri^[10]用 MLPG 方法求解对流扩散方程时,根据 MLPG 方法的自身特点提出了两种处理对流项占优的方案。张小华等人^[11]应用 EFG 方法求解线性定常对流扩散方程时,分别采用了 SUPG、GLS 和 SGS 三种稳定化方案来消除对流项的影响。Liu 和 Gu^[5]针对无网格方法求解对流占优问题时会出现数值伪振荡这个问外,提出了多种处理对流占优问题的稳定化技术,并将这些技术应用到多项式点配置法(polynomial point collocation method, PPCM)中。但 PPCM 易出现矩阵奇异,计算精度较差,且难以处理 Neumann 边界条件,其结果常不稳定。而 RPIM 不仅计算精度高、可像有限元方法那样易处理本质边界条件,自动满足 Neumann 边界条件,且避免了矩阵奇异问题,因此本文将 Liu 和 Gu^[5]提出的稳定化技术应用到 RPIM 中来求解对流扩散方程。

1 RPIM 的近似原理

RPIM(radial point interpolation method)的插值形式可表示为^[5,12]

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N a_I \phi_I(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}, \quad (1)$$

其中 $\phi_I(\mathbf{x})$ 为径向基函数(radial basis function, RBF), N 为径向基函数的个数, a_I 为待定系数,且 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N]^T$, $\Phi(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}) \ \phi_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \phi_N(\mathbf{x})]^T$ 。在径向基函数 $\phi_I(\mathbf{x})$ 中,仅有一个表示点 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}_I 之间距离的变量 d_I 。

常见的径向基函数有很多种,例如

多 2 次 MQ(multi-quadrics): $\phi_I(\mathbf{x}) = (c + d_I^2)^{1/2}$;

薄板样条 TPS(thin plate splines): $\phi_I(\mathbf{x}) = d_I^{2\beta} \ln d_I$;

式中 c 为大于 0 的常数, β 为整数。

为了确定方程(1)中的系数 a_I ,需形成计算点 \mathbf{x} 的影响域,在这个影响域中包含了 N 个场节点。令近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值等于函数 $u(\mathbf{x})$ 在该节点处的值 u_I ,即 $u^h(\mathbf{x}) = u_I$, $I = 1, 2, \dots, N$ 。于是可以得到 N 个线性方程,1 个节点对应 1 个方程。这些方程组的矩阵形式可表示为

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{u}, \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi^T(\mathbf{x}_1) \\ \Phi^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \Phi^T(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}_1) & \phi_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_1) \\ \phi_1(\mathbf{x}_2) & \phi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\mathbf{x}_N) & \phi_2(\mathbf{x}_N) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_N]^T$$

由方程(2)解出系数列阵 \mathbf{a} , 然后将其代入方程(1),于是方程(1)可表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (3)$$

其中 $N(x) = \Phi^T(x)A^{-1}$ 为 RPIM 的形函数。由于径向基函数近似满足插值条件,即形函数 $N_j(x_j) = \delta_{ij}$, 因此 RPIM 可象有限元方法那样,很容易施加本质边界条件。

图 1 给出了用 MQ 径向基函数构造的 RPIM 形函数及其一阶、二阶导数。由图可见,由于 RBF 的高阶连续性,RPIM 可很容易地构造高阶导数连续的形函数。

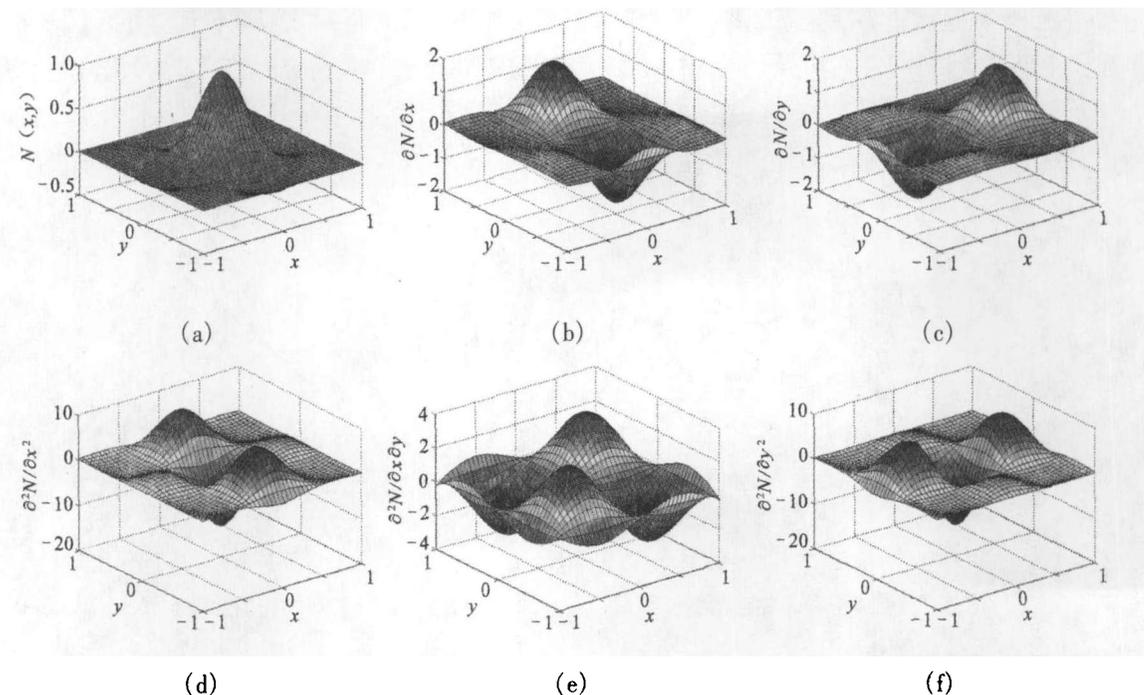


图 1 由 RPIM 构造的形函数及其一阶、二阶导数

2 消除伪振荡的若干技术

为了便于表述,首先考虑如下一维对流扩散方程

$$v \frac{du}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) = f, \quad x \in (0,1), \tag{4}$$

其中 $f = 1$, 边界条件为 $u(0) = u(1) = 0$. 其精确解为

$$u(x) = \frac{1}{v} \left[x - \frac{1 - \exp(\gamma x)}{1 - \exp(\gamma)} \right],$$

其中 $\gamma = \frac{v}{k}$.

类似有限元方法,定义 Peclet 数为 $Pe = v\rho/(2k)$, 其中 ρ 为相邻两节点的节点空间。如在区间 $[0,1]$ 上均匀布置 11 个节点,则 $\rho = 0.1$ 。与有限元等方法一样,随着 Pe 的增大,方程(4)逐渐变为为对流占优,如果采用没有经过特殊处理的无网格方法(如 RPIM、EFG 等)来求解该方程,同样会出现数值伪振荡现象,如图 2 所示。

由于 RPIM 是基于 Galerkin 离散,所以对自然边界条件不需要进行特殊地处理。经过分部积分后,方程(4)对应的积分弱形式为

$$\int v \frac{du}{dx} w dx + \int k \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx - \int_{\Gamma} w \frac{du}{dn} d\Gamma = \int f w dx. \tag{5}$$

2.1 节点加密

前面已经指出,当 Pe 数充分小时不会出现数值伪振荡现象,但当 Pe 数很大时,通常会出非稳定的数值解,即稳定性和 Pe 数有直接关系。因此对给定的 v 和 k ,最简单的方法就是

通过减小 ρ 来减小 Pe 数, 即加密节点. 为了验证上面的观点, 对同一问题 ($v = 1, k = 0.025$), 11 个和 21 个节点均匀布置在区域 $[0, 1]$ 上, 则由 Pe 数定义知, 对上述两种情况 Pe 数分别为 2 和 1. 图 2 给出了均匀布置 11 个节点和 21 个节点的数值结果, 由图可见, 通过加密节点, 可以有效地消除数值伪振荡现象. 注意到整体加密节点的同时也会导致计算费用的增加, 而当对流占优时, 只是薄边界层很难模拟, 因此仅在边界层加密节点可以有效地减少计算量. 图 3 给出了对流占优时, 仅在右边界处局部加密节点时的数值结果. 本算例中, 在区间 $[0.8, 1]$ 上均匀布置了 9 个节点, 但这些节点的影响半径与均匀布置节点的影响半径相同. 从图中可以看出, 数值伪振荡现象消失了, 但计算精度不是很理想.

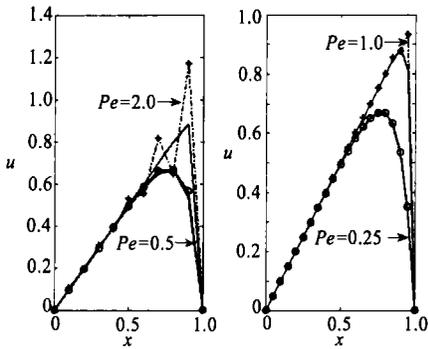


图 2 节点加密和未加密的数值结果

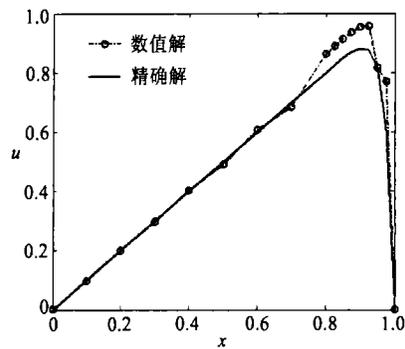


图 3 局部节点加密的数值结果

2.2 增大节点影响半径

当对流占优时, 有限元等方法由于没有充分捕捉到上游信息, 因而出现非稳定数值解. 对无网格方法而言, 要捕捉足够上游信息的最直接的方法是增大节点影响半径, 而这对有限元、有限差分法是比较困难的. 为了展示增大节点影响半径的计算精度和稳定性, 分别选择 3 种节点影响半径来求解同一问题. 图 4 给出了节点在 3 种不同影响半径下的无网格解, 从图中可以看出, 随着无量纲尺寸 r 的增大, 即节点影响半径的增大, 数值稳定性和计算精度都有显著的提高. 这是因为节点影响半径较大时, 无网格方法可以同时捕获到更多的上游和下游的信息. 但增大节点影响半径势必和节点加密一样会增加计算费用, 这往往是不经济的.

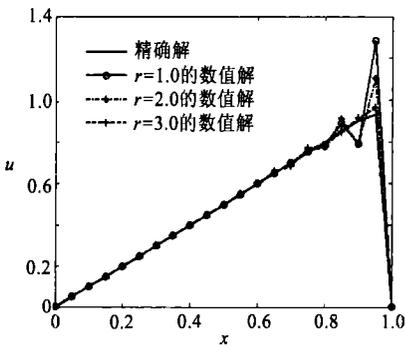


图 4 不同影响半径下的数值结果

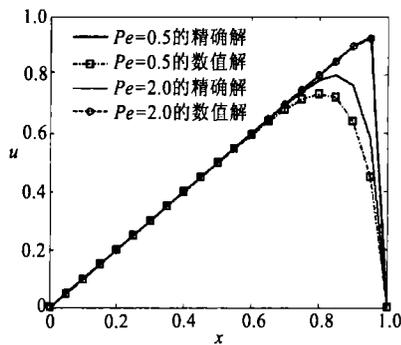


图 5 完全迎风无网格稳定化方法的数值结果

2.3 完全迎风无网格稳定化方法

有限差分法通常应用迎风差分格式来求解对流占优问题. 在无网格方法里, 同样可以采用迎风思想, 这样就可尽可能多地捕捉上游信息, 而尽可能少地利用无用的下游信息. 对方程 (4) 相应的迎风差分格式进行 Taylor 展开, 并忽略高阶导数项, 即可发现迎风差分格式和下面

的弱积分形式等价^[1]:

$$\int v \frac{du}{dx} w dx + \int k \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \int \frac{v\rho}{2} \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx - \int_{\Gamma} w \frac{du}{dn} d\Gamma = \int f w dx. \quad (6)$$

图5给出了完全迎风无网格稳定化方法的数值结果. 由图可见当 Pe 数较大(即对流占优)时,完全迎风无网格稳定化方法可获得稳定的数值解,且具有相当高的计算精度. 但当 Pe 数较小(即扩散占优)时,计算精度较差,出现了较大的数值耗散.

2.4 自适应迎风无网格稳定化方法

从前面的分析我们可以看出,当 Pe 数较小时,标准的无网格方法可以获得稳定且精确的数值解,当 Pe 数较大时,完全迎风无网格稳定化方法可得到非常理想的结果,因此理想的稳定化方法应该能随着 Pe 数自动更新. 为了使所构造的无网格稳定化方法能够在不同 Pe 数下都获得满意的结果,类似于有限元 SUPG 方法,在式(4)左端添加一个相容项,这个相容项是微分方程余量的函数. 方程(4)的余量为

$$R(u) = v \frac{du}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) - f, \quad (7)$$

于是可以得到无网格稳定化方法的弱积分形式:

$$\int v \frac{du}{dx} w dx + \int k \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \int p(w) \tau R(u) dx - \int_{\Gamma} w \frac{du}{dn} d\Gamma = \int f w dx, \quad (8)$$

其中 $\tau = (v\rho/2)\alpha, \alpha = \coth |Pe| - 1/|Pe|$. 从方程(8)中可以看出,一个稳定项添加到 Galerkin 弱形式中. 在这个稳定项中出现了一个稳定参数 τ , 关于这个稳定参数请参考文献 [1,11].

SUPG 稳定化方法定义如下^[1,11]

$$P(w) = v \frac{dw}{dx}. \quad (9)$$

图6给出了该稳定化方法在不同 Pe 数下的数值结果,由图可见,该方法不仅消除了高 Pe 数下的数值伪振荡现象,而且还保证了低 Pe 数下的数值精度. 因此称这种方法为自适应迎风无网格稳定化方法. 该方法的成功归功于 α , 这是因为 α 具有如下优良的性质(如图7所示):

$$\alpha = \begin{cases} 0, & Pe \rightarrow 0, \\ 1, & Pe \rightarrow \infty. \end{cases}$$

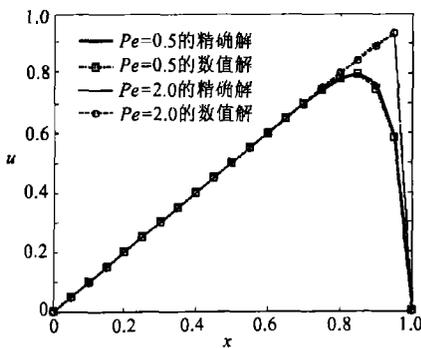


图6 自适应迎风无网格稳定化方法的数值结果

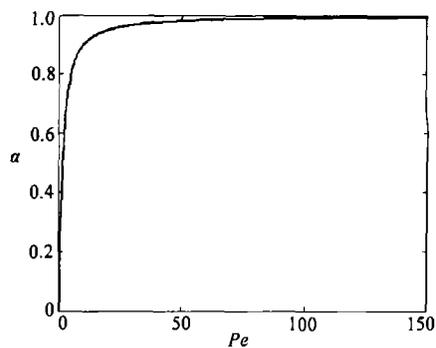


图7 不同 Pe 数下的 α

由此,从方程(8)中易看出当 Pe 数趋于0时,自适应迎风无网格稳定化方法和标准的无网格方法等价;而当 Pe 数趋于无穷时,自适应迎风无网格稳定化方法与完全迎风无网格稳定化

方法等价。同时从方程(8)中还可看出,与有限元 SUPG 方法相比,自适应迎风无网格稳定化方法在求解对流扩散方程时具有如下优点:由于径向基函数可以很容易地构造 C^2 连续的形函数,所以方程(8)中的二阶导数项不会被忽略,而在有限元方法中常忽略了这些二阶导数项。

3 二维数值算例

考虑下面二维对流扩散方程^[5]:

$$\mathbf{V}^T \cdot \nabla u - \nabla^T(\mathbf{D} \nabla u) + \beta u - q(x, y) = 0, \tag{10}$$

边界条件为

$$u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0,$$

其中 $\mathbf{V} = [3 - x, 4 - y]^T, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \beta = 1,$

其精确解为

$$u(x, y) = \sin(x) \left(1 - \exp\left(-\frac{2(1-x)}{\varepsilon}\right) \right) y^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{3(1-y)}{\varepsilon}\right) \right).$$

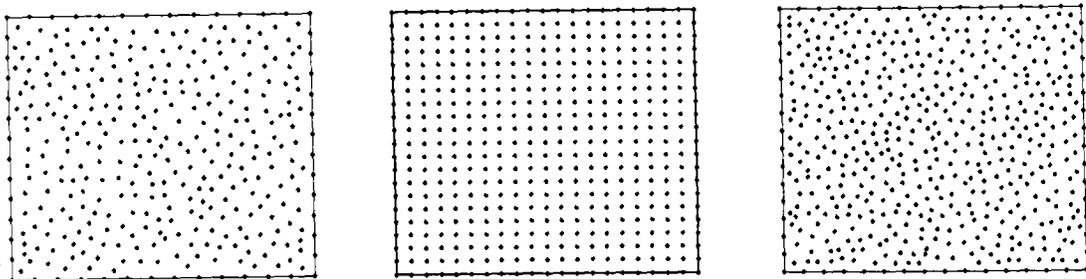
由上述一维算例的数值结果知,无论是扩散占优,还是对流占优,自适应迎风无网格稳定化方法的计算精度和稳定性均优于其他稳定化技术,所以对本算例仅用自适应迎风无网格稳定化方法来求解,则方程(10)对应的弱积分形式为

$$\int_{\Omega} w \mathbf{V}^T \cdot \nabla u d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla w)^T \cdot (\mathbf{D} \nabla u) d\Omega + \int_{\Omega} w u d\Omega + \int_{\Omega} p(w) \tau R(u) d\Omega = \int_{\Omega} w q d\Omega + \int_{\Gamma_u} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma, \tag{11}$$

其中

$$p(w) = \mathbf{V}^T \cdot \nabla w, \tau = \frac{\rho \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\alpha}}{2 \|\mathbf{V}\|^2}, R(u) = \mathbf{V}^T \cdot \nabla u - \nabla^T(\mathbf{D} \nabla u) + \beta u - q(x, y),$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[\coth |Pe_x| - \frac{1}{Pe_x}, \coth |Pe_y| - \frac{1}{Pe_y} \right]^T, Pe_x = \frac{V_x \rho}{2\varepsilon}, Pe_y = \frac{V_y \rho}{2\varepsilon}.$$



(a) 351 个非规则节点

(b) 441 个规则节点

(c) 520 个非规则节点

图 8 节点分布示意图

考虑规则节点布置和非规则节点布置两种情形,图 8 给出了节点分布示意图。为了便于进行误差分析,定义如下相对误差:

$$e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{\text{exact}} - u_i^{\text{num}})^2}{\sum_{i=1}^N (u_i^{\text{exact}})^2}}. \tag{12}$$

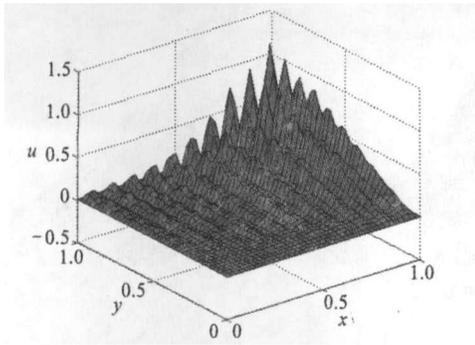


图9 当 $\epsilon = 0.01$ 时的标准 RPIM 解

表1 不同 ϵ 下数值误差比较

ϵ	$e/(%)$	
	无稳定化	有稳定化
100	0.000 505 747	0.000 516 76
10	0.040 147 9	0.039 081 5
1	1.570 72	0.266 688
0.1	3.973 68	0.709 107
0.01	48.042 3	1.452 938
0.001	155.63	3.486 59

表1给出了规则布置441个节点时,不同 ϵ 下标准无网格方法与自适应迎风无网格稳定化方法数值解的比较。从表中可以看出,当 ϵ 较大时(如 $\epsilon > 0.1$),标准无网格方法可获得满意的数值结果,但当 ϵ 很小(如 $\epsilon < 0.01$)或者对流占优时,则出现非常大的误差。而自适应迎风无网格稳定化方法对不同的 ϵ 均能得到很好的数值结果。同时和文献[5]应用PPCM求解的结果相比,RPIM的计算精度要高得多。图9给出了标准RPIM在 $\epsilon = 0.01$ 时的解,由图可见,标准RPIM出现非常剧烈的数值伪振荡现象。图10给出了自适应迎风RPIM稳定化方法在不同 ϵ 下的数值结果,从图中可以看出当 ϵ 很小时,自适应RPIM稳定化方法有效地消除了数值伪振荡。

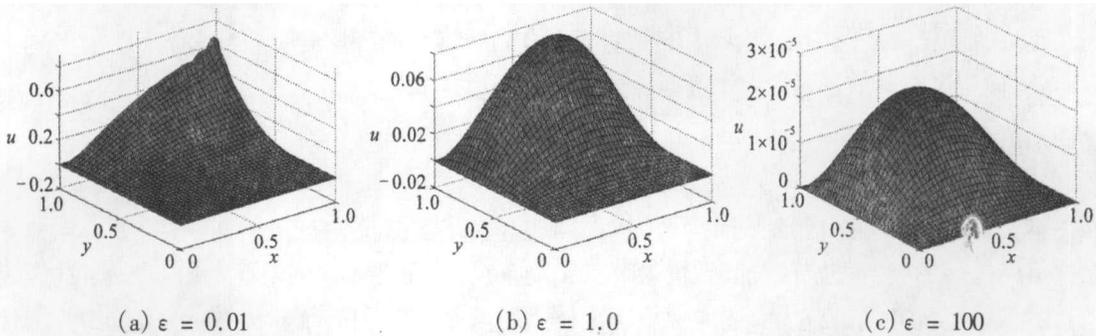


图10 441个规则节点自适应RPIM稳定化方法的数值结果

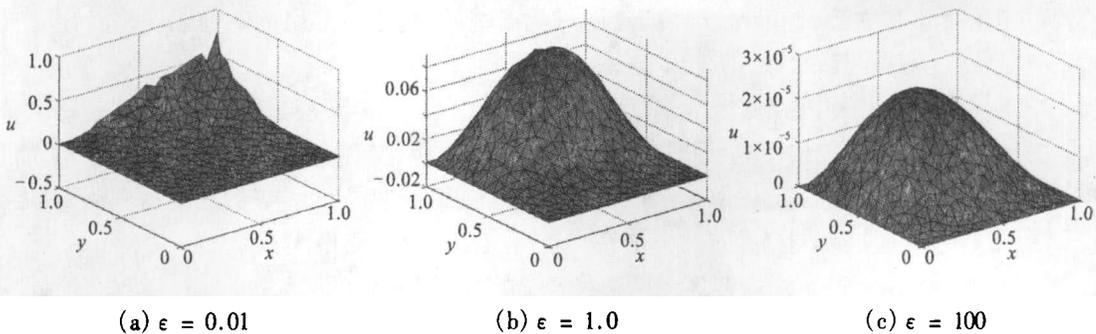


图11 351个非规则节点自适应RPIM稳定化方法的数值结果

图11和图12分别给出了351个和520个非规则节点自适应迎风RPIM稳定化方法的数值结果。由图可见当 ϵ 很小时(如 $\epsilon \leq 0.01$),数值解在上述两种节点布置下均在边界层处有较小的振荡,在 ϵ 较大时(如 $\epsilon \geq 1$),均可得到满意的数值结果。从图中还可看出,在 ϵ 较小时,布置520个节点比布置351个节点的稳定性好。

对均匀布置441个节点和 $\epsilon = 0.01$ 时,图13给出了数值解和精确解分别沿 $x = 0.5$ 和 y

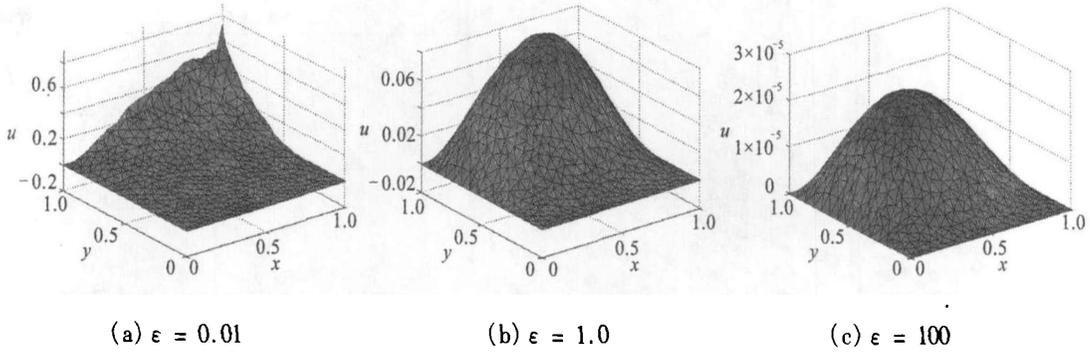


图 12 520 个非规则节点自适应 RPIM 稳定化方法的数值结果

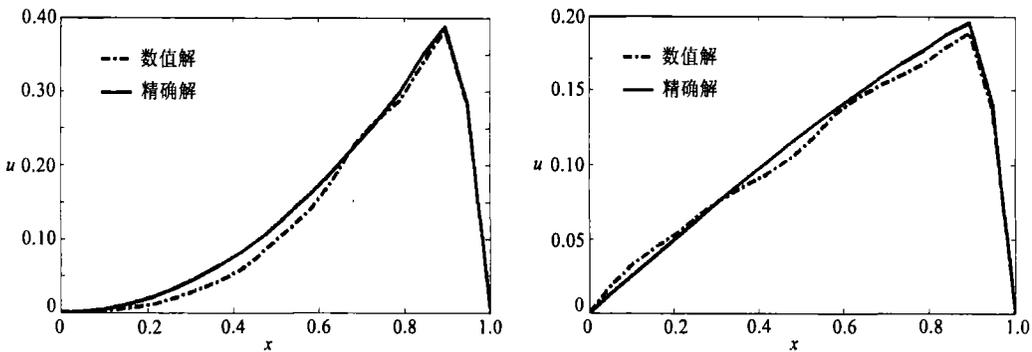


图 13 沿水平和垂直中轴线,数值解和精确解的比较

$= 0.5$ 时的比较。从图中可以看出,自适应迎风 RPIM 解和精确解吻合得比较好,且未出现振荡现象,说明了自适应迎风 RPIM 可很好地求解对流占优问题。

4 结 论

本文针对标准无网格方法求解对流占优问题时会出现数值伪振荡的问题,给出了 4 种消除数值伪振荡的技术,即节点加密、增大节点影响半径、完全迎风无网格稳定化方法、自适应迎风无网格稳定化方法。应用上述 4 种稳定化技术求解了一维和二维对流扩散方程,数值结果表明:

1) 相对于有限元方法、有限差分法处理对流占优问题,本文给出的 4 种无网格稳定化技术简单易行,且不需网格生成,前处理方便;

2) 在 4 种无网格稳定化方法中,节点加密和增大节点影响半径虽然都能有效地消除数值伪振荡,但是计算费用较大;完全迎风无网格稳定化方法能很好地处理高 Pe 数问题,但对低 Pe 数问题会带来过多的数值耗散;自适应迎风无网格方法对高、低 Pe 数均能得到满意的结果。因此,自适应迎风无网格稳定化方法在求解对流扩散方程时最优;

3) 本文中所采用的自适应迎风无网格稳定化方法是基于有限元 SUPG 方法给出的,同样可以基于有限元 GLS、有限元 SGS 等方法给出^[11];

4) RPIM 不仅能很方便地处理本质边界条件,且不需要对自然边界采取复杂地特殊处理。同时 RPIM 的计算精度高于 PPCM。

[参 考 文 献]

- [1] Donea J, Huerta A. *Finite Element Methods for Flow Problems* [M]. Chichester: Wiley, 2003.
- [2] Monaghan J J. An introduction to SPH [J]. *Computer Physics Communications*, 1988, 48(1): 89-96.

- [3] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, **20**(8/9):1081-1106.
- [4] Liu W K, Jun S, Sihling D T, et al. Multiresolution reproducing kernel particle method for computational fluid dynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997, **24**(12): 1391-1415.
- [5] Liu G R, Gu Y T. *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*[M]. Dordrecht: Springer, 2005.
- [6] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2):229-256.
- [7] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C. A finite point method in computational mechanics: Application to convections to transport and fluid flow[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, **39**(22): 3839-3866.
- [8] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4): 315-346.
- [9] Oñate E, Idelsohn S. A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems[J]. *Computational Mechanics*, 1998, **21**(4/5):283-292.
- [10] Lin H, Atluri S N. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for convection-dynamics[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2000, **1**(2):45-60.
- [11] 张小华, 欧阳洁. 线性定常对流占优对流扩散问题的无网格解法[J]. *力学季刊*, 2006, **27**(2):220-226.
- [12] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

Stabilization Meshless Method for Convection Dominated Problems

ZHANG Xiao-hua, OUYANG Jie, WANG Jian-yu

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P. R. China)

Abstract: It is well known that the standard Galerkin is not ideally suited to deal with the spatial discretization of convection-dominated problems. Several techniques were proposed to overcome the instability issues in convection-dominated problems simulated by meshless method. These stable techniques included: the nodal refinement, the enlargement of nodal influence domain, the full upwind meshless technique and the adaptive upwind meshless technique. Meanwhile, these stable techniques were applied to RPIM to solve one and two-dimensional convection-diffusion equations. Numerical results for example problems show that these techniques are effective to solve convection-dominated problems, and the adaptive upwind meshless technique is the most effective method of all.

Key words: meshless method; convection-diffusion problems; stability methods