

含周期脉动的大密度比气液同轴射流的 Floquet 稳定性分析*

李 振, 胡国辉, 周哲玮

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所;
上海市能源与环境中的关键力学问题重点实验室, 上海 200072)

(本刊编委周哲玮来稿)

摘要: 基于周期脉动速度激励下气液同轴射流的数学模型, 运用线性稳定性理论, 采用 Chebyshev 配点法和 Floquet 理论, 将含周期脉动分层流的 Floquet 稳定性分析扩展到大密度比的情况. 研究了液铝-氮气射流的参数共振特性, 分析了不同的物理参数对系统稳定性的影响, 计算了实验工况并和实验结果进行了比较.

关键词: 射流稳定性; Chebyshev 配点法; Floquet 理论; 参数共振; 大密度比
中图分类号: O358 **文献标识码:** A

引 言

Plateau(1873)^[1]最早对射流不稳定性进行了研究, 他观察到圆柱状液体射流会破碎成长度为半径 9 倍的液段. 在忽略重力和周围气体影响的情况下, Rayleigh^[2]发现导致射流破碎的原因是由表面张力引起的水动力学不稳定性. 他指出最快增长扰动波的波长是射流半径的 9 倍. Weber^[3]和 Chandrasekhar^[4]发现液体的粘性能够减小破碎的几率并能增大破碎粒径, 能够使射流更加稳定. Keller, Rubinow 和 Tu^[5]通过分析空间增长的毛细波, 发现时间增长率和空间增长率只在 Weber 数趋于无穷的情况下吻合. 以往的研究^[6-8]表明射流失稳破碎有两种模式: 即当射流速度较低时由表面张力引起的 Rayleigh 模式的破碎和当射流速度较高时由剪切引起的 Taylor 模式的破碎. 前者破碎液滴直径一般与射流的直径相当, 后者得到的粒径通常比喷嘴直径小一二个量级, 也被称为雾化. 实验研究^[9-11]表明, 在射流中引入适当的脉动将使雾化微滴的平均粒径更小, 粒径分布更集中, 有利于提高产品质量. 因此研究含脉动的气液同轴射流的稳定性是很有意义的.

对于含脉动的两相射流问题, 特别是针对粘性流体, 目前为止较少有文献报道. Zhou 和 Tang^[12]研究在周期脉动的速度激励下无粘不可压气液分层射流的稳定性, 推导出参数共振方

* 收稿日期: 2008-07-07; 修订日期: 2008-07-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772107); 上海市科委资助项目(071605102)

作者简介: 李振(1984—), 男, 湖北孝感人, 硕士(E-mail: luckyzhen@gmail.com);

胡国辉(1969—), 男, 南昌人, 教授(E-mail: hu.guohui@gmail.com);

周哲玮(1950—), 男, 武汉人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: + 86-21-66134661; Fax: + 86-21-66133382; E-mail: zhzwzhou@yc.shu.edu.cn).

程(Mathieu 方程),确定出射流的稳定区与不稳定区. 王艳霞等人^[13]研究含周期脉动的分层粘性管流的稳定性,分析了密度、粘性等参数对管流稳定性的影响. Woods 和 Lin^[14]及 Burya 等人^[15]曾研究了沿周期振动的平板下落的液膜问题. 但是,以往的研究中,大多忽略了流体的粘性,也很少研究含周期脉动的大密度比射流的情况. 而在某些工业领域中,存在许多大密度比气液射流问题,比如喷射成形工艺中熔融金属与雾化气体的密度比就在 2 000 到 10 000 之间,这给稳定性分析带来了很大的困难. 本文拟将王艳霞等人^[13]的工作推广到大密度比射流,针对含有周期脉动的粘性同轴射流的稳定性问题进行研究.

1 数学模型

考虑同轴气液分层射流,内部为半径为 R_1 的轴对称液体射流,外围环绕有无穷域的同轴气体射流(如图 1). 假设液体和气体均为粘性不可压流体.

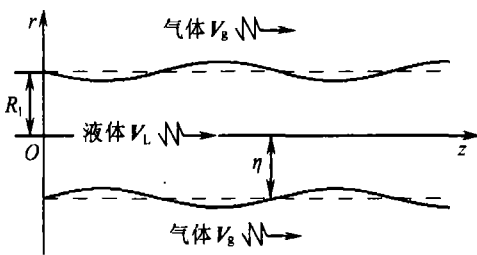


图 1 模型示意图

在基本流 \bar{V} 上加上一个微小的扰动, $V_i = \bar{V}_i + V_i'$ ($i = 1, 2$), 1 代表液体, 2 代表气体, 将其代入控制方程和边界条件, 得到关于小扰动的控制方程. 然后将方程关于小扰动线性化, 并运用正则模方法, 与王艳霞等^[13]类似, 得到关于小扰动流函数的线性方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^2 \varphi_1) = \frac{1}{Re} E^2 E^2 \varphi_1 - ik\bar{V}_1 E^2 \varphi_1 + ik \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial r} \right) \varphi_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^2 \varphi_2) = \frac{1}{Re} \frac{N}{Q} E^2 E^2 \varphi_2 - ik\bar{V}_2 E^2 \varphi_2 + ik \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial r} \right) \varphi_2, \quad (2)$$

其中算子

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2,$$

$$E^2 E^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \left(\frac{3}{r^2} - 2k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{2k^2}{r} - \frac{3}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + k^4.$$

式中的无量纲量为 Reynolds 数 $Re = \rho_1 W_0 R_1 / \mu_1$, Froude 数 $Fr = W_0^2 / (gR_1)$, Weber 数 $We = \sigma / (\rho_1 W_0^2 R_1)$, 气液密度比 $Q = \rho_2 / \rho_1$, Reynolds 数与 Froude 数之比 $R = Re / (Fr)$, 气液动力学粘性系数比 $N = \mu_2 / \mu_1$. 其中 μ_i 是动力学粘性系数, ρ 是密度, g 是沿 z 轴负方向的重力加速度.

边界条件

1) 在轴心 $r = 0$ 处满足轴对称边界条件:

$$\varphi_1 = \partial \varphi_1 / \partial r = 0; \quad (3)$$

2) 在气液界面 $r = 1$ 处满足:

运动学边界条件

$$\partial \eta / \partial t = ik\varphi_1 - ik\bar{V}_1 \cdot \eta, \quad (4)$$

切向速度连续条件

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \left(\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial r} - \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial r} \right) \eta = 0, \quad (5)$$

法向速度连续条件

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad (6)$$

切向应力平衡条件

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} + k^2\right)\varphi_1 - N\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} + k^2\right)\varphi_2 - \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}_2}{\partial r^2}\right)\eta = 0, \quad (7)$$

法向应力平衡条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - Q \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right) = & \\ \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1 - 3k^2)\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi_1 - ik\bar{V}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \left(\frac{2k^2}{Re} + ik \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial r}\right)\varphi_1 - & \\ \frac{N}{Re}\left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1 - 3k^2)\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi_2 + ikQ\bar{V}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \left(\frac{2k^2}{Re}N + ikQ \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial r}\right)\varphi_2 - & \\ ikWe(1 - k^2)\eta; & \end{aligned} \quad (8)$$

3) 在气体外边界 $r = R_2/R_1 = R_{\max}$ 处:

$$\varphi_2 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - R_{\max} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} = 0. \quad (9)$$

2 基本流

考虑轴对称气液分层射流,基本流速度矢量为

$$U_i(r, t) = (0, 0, \bar{V}_i(r, t)),$$

其中轴向速度

$$\bar{V}_i(r, t) = \bar{Z}_i(r) + \bar{W}_i(r, t), \quad i = 1, 2.$$

这里 $\bar{Z}_i(r)$ 和 $\bar{W}_i(r, t)$ 分别是基本流轴向速度的定常和非定常部分.

对于基本流定常部分,若气体和液体流动中的压力梯度比 $(dP_2/dz)/(dP_1/dz) = \beta^{[16]}$, 可以得到方程的解析解:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1(r) = & \frac{R(L^2 - 1)(\beta - Q)}{4(1 - \beta + \beta L^2)}r^2 + \frac{W_{10}}{W_0}, \quad 0 \leq r \leq 1, \\ \bar{Z}_2(r) = & \begin{cases} \frac{R(\beta - Q)}{4N(1 - \beta + \beta L^2)}(r^2 - L^2) + \frac{R(\beta - Q)L^2}{2N(1 - \beta + \beta L^2)}\ln\left(\frac{r}{L}\right) + 1 + \frac{W_{10}}{W_0}, & 1 \leq r \leq L, \\ 1 + \frac{W_{10}}{W_0}, & r \geq L, \end{cases} \end{aligned}$$

其中 W_{10} 为轴心处液体流速, W_0 为气液速度差, L 为剪切层厚度,由边界条件 $Z_1(1) = Z_2(1)$ 确定;关于剪切层 L 和 β 的变化,李小军等人^[16]做过详细的讨论.

基本流非定常部分满足的方程和边界条件分别是

$$\begin{cases} \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \bar{W}_1(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{W}_1(r, t)}{\partial r}\right) = \frac{\partial \bar{W}_1(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}_1(z, t)}{\partial z}, \\ \frac{N}{Q} \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \bar{W}_2(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{W}_2(r, t)}{\partial r}\right) = \frac{\partial \bar{W}_2(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial \bar{p}_2(z, t)}{\partial z}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\bar{W}_1(1, t) = \bar{W}_2(1, t), \quad r = 1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{W}_1(1, t)}{\partial r} = N \frac{\partial \bar{W}_2(1, t)}{\partial r}, \quad r = 1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{W}_2(\infty, t)}{\partial r} = 0, \quad r = \infty. \quad (13)$$

若系统的周期脉动频率为 ω ,由界面条件有 $\bar{p}_1(z, t) - \bar{p}_2(z, t) = We$,则可设

$$\bar{p}_1(z, t) = C \cdot e^{i\omega t} \cdot z + We, \quad \bar{p}_2(z, t) = C \cdot e^{i\omega t} \cdot z,$$

其中 C 为复数^[13]。且定义 $We = -C/(\omega \cdot Q)$ 的实部为非定常流的振幅因子, 令周期脉动速度为 $\bar{W}_i(r, t) = V_i(r)e^{i\omega t}$ 。尽管王艳霞等人^[13]得到了方程(10)~(13)的 Bessel 函数形式的解析解, 但在实际计算中, 当 Bessel 函数的宗量很大或很小的时候, 按解析公式计算出的基本流的准确性无法保证, 造成大密度比情况下的稳定性分析计算十分困难。本文采用 Chebyshev 配点法对方程(10)~(13)进行求解。

为了提高计算的效率和精度, 对坐标进行非线性变换, 将物理空间 r 转换到 Chebyshev 计算空间 y , 将 Gauss-Lobatto 配置点集中到速度变化剧烈的剪切层。内部液体和外部气体的坐标非线性变换分别为

$$r_1 = 1 + \frac{A(y_1 - 1)}{y_1 + 2A + 1}, \quad r_2 = 1 + \frac{A(y_2 - 1)}{A_2 - y_2}, \quad (14)$$

这里 $A_2 = -2A_1/(R_{\max} - 1)$, A 和 A_1 为可调节参数。 A 越大, A_1 越大, 非线性变换越接近线性变换。对于较小的 A 和 A_1 , 所配置的点就更多的分布在剪切层内。

将 $V_i(r)$ 用 Chebyshev 多项式展开, $V_i(r) = \sum_{k=0}^N V_i(r_k) \psi_k(r)$, 其中 $\psi_k(r) |_{k=0}^N$ 为 Gauss-Lobatto 节点的插值基函数, 由于 $d^m \psi_k(r)/dr^m |_{r=r_j} = (D_m)_{jk}$, 那么, 对 $V_i(r)$ 的导数可以转化为插值基函数的导数, 即 $d^m V_i(r_j)/dr^m = \sum_{k=0}^N V_i(r_k) (D_m)_{jk}$, 由此可以求解方程(10)~(13), 得到基本流的 Chebyshev 展开式系数。

3 Chebyshev 配点法

本文采用 Chebyshev 配点法^[17], 用 Gauss-Lobatto 节点并采用非线性变换(14), 求解方程(1)~(9)。可以得到如下的特征方程:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (E_1^2 \varphi_{1j}) = \frac{1}{Re} E_1^2 E_1^2 \varphi_{1j} - ik \bar{V}_1(r, t) |_j E_1^2 \varphi_{1j} + \\ \quad ik \left(\frac{d^2 \bar{V}_1(r, t)}{dr^2} \Big|_j - \frac{2}{1 + \tanh(\delta y_{1j}) / (\tanh(\delta))} \frac{d \bar{V}_1(r, t)}{dr} \Big|_j \right) \varphi_{1j}, \\ \frac{d}{dt} (E_2^2 \varphi_{2l}) = \frac{1}{Re} \frac{N}{Q} E_2^2 E_2^2 \varphi_{2l} - ik \bar{V}_2(r, t) |_l E_2^2 \varphi_{2l} + \\ \quad ik \left(\frac{d^2 \bar{V}_2(r, t)}{dr^2} \Big|_l - \frac{1}{1 + A_1(y_{2l} - 1) / (A_2 - y_{2l})} \frac{d \bar{V}_2(r, t)}{dr} \Big|_l \right) \varphi_{2l}, \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$E_i^2 = \frac{d^2}{dr_i^2} - \frac{1}{r_i} \frac{d}{dr_i} - k^2 I_i,$$

$$E_i^2 E_i^2 = \frac{d^4}{dr_i^4} - \frac{2}{r_i} \frac{d^3}{dr_i^3} + \left(\frac{3}{r_i^2} - 2k^2 \right) \frac{d^2}{dr_i^2} + \left(\frac{2k^2}{r_i} - \frac{3}{r_i^3} \right) \frac{d}{dr_i} + k^4 I_i, \quad i = 1, 2,$$

M_1 和 M_2 分别为液体、气体内的配置点数, I_1 和 I_2 分别为 M_1 维和 M_2 维的单位矩阵。

边界条件

1) $y_1 = -1$ 处满足轴对称边界条件:

$$\varphi_{1M_1} = \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \Big|_{M_1, j} = 0; \quad (16)$$

2) 在气液界面 $y_1 = y_2 = 1$ 处满足:

运动学边界条件

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_1 = ik\varphi_{11} - ik\bar{V}_1(r, t)h|_1, \quad (17)$$

切向速度连续条件

$$\left. \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \right|_{1j} - \left. \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \right|_{1l} - \left(\left. \frac{d\bar{V}_1(r, t)}{dr} \right|_1 - \left. \frac{d\bar{V}_2(r, t)}{dr} \right|_1 \right) h|_1 = 0, \quad (18)$$

法向速度连续条件

$$\varphi_{11} - \varphi_{21} = 0, \quad (19)$$

切向应力平衡条件

$$\left(\left. \frac{d^2\varphi_{1j}}{dr_1^2} \right|_{1j} - \left. \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \right|_{1j} \right) + k^2\varphi_{11} - N \left[\left(\left. \frac{d^2\varphi_{2l}}{dr_2^2} \right|_{1l} - \left. \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \right|_{1l} \right) + k^2\varphi_{21} \right] - \left(\left. \frac{d^2\bar{V}_1(r, t)}{dr^2} \right|_1 - \left. \frac{N d^2\bar{V}_2(r, t)}{dr^2} \right|_1 \right) h|_1 = 0, \quad (20)$$

法向应力平衡条件

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \right|_{1j} - Q \left. \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \right|_{1l} \right) &= \frac{1}{Re} \left(\left. \frac{d^3\varphi_{1j}}{dr_1^3} \right|_{1j} - \left. \frac{d^2\varphi_{1j}}{dr_1^2} \right|_{1j} + (1 - 3k^2) \left. \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \right|_{1j} \right) - \\ &ik\bar{V}_1(r, t) \left. \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \right|_{1j} + \left(\frac{2k^2}{Re} + ik \left. \frac{d\bar{V}_1(r, t)}{dr} \right|_1 \right) \varphi_{11} - \\ &\frac{N}{Re} \left(\left. \frac{d^3\varphi_{2l}}{dr_2^3} \right|_{1l} - \left. \frac{d^2\varphi_{2l}}{dr_2^2} \right|_{1l} + (1 - 3k^2) \left. \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \right|_{1l} \right) + ikQ \left. \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \right|_{1l} - \\ &\left(\frac{2k^2}{Re} N + ikQ \left. \frac{d\bar{V}_2(r, t)}{dr} \right|_1 \right) \varphi_{21} - ik(1 - k^2) Weh|_1; \end{aligned} \quad (21)$$

3) 在气流边界 $y_2 = -1$ 处:

$$\varphi_{2M_2} = 0, \quad \left(\left. \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} - R_{\max} \frac{d^2\varphi_{2l}}{dr_2^2} \right|_{M_2l} \right) = 0. \quad (22)$$

运用 Lanczos 近似方法, 在方程(15)中舍弃气体、液体边界节点上的 8 个方程, 用 8 个边界条件(16)、(18)~(22)代替, 由于界面函数 h 也是未知量, 所以再多 1 个方程(17).

这样, 我们得到包含了 $M_1 + M_2 + 1$ 个未知量 $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1M_1}; \varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2M_2}; h$ 的方程, 即

$$\mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} = [\mathbf{B} + \mathbf{C} \cos(\omega t) + \mathbf{D} \sin(\omega t)] \boldsymbol{\varphi} \quad (23)$$

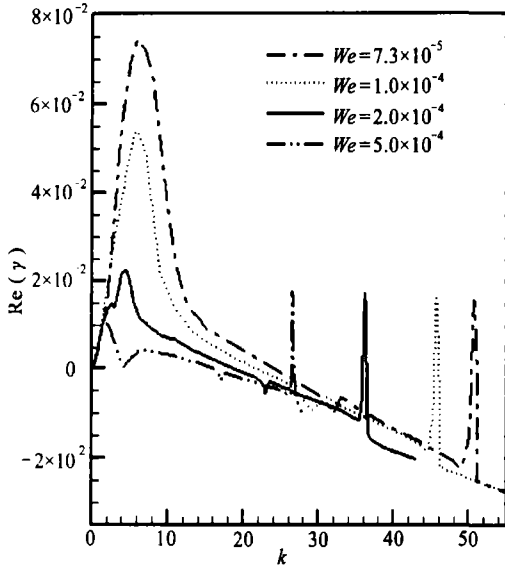
的参数共振方程组, 其中 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1M_1}, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2M_2}, h)^T$. $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是常数矩阵, 可以通过式(15)~(22)求得, 方程组(23)为周期系数的线性常微分方程组, 因此可以采用 Floquet 理论进行求解.

根据 Floquet 理论^[18], 存在一个常数矩阵 \mathbf{R} , 满足 $\boldsymbol{\psi}(t + T) = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\psi}(t)$, 其中 $T = 2\pi/\omega$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ 为微分方程组(23)的一个标准基本解方阵, 如果我们得到 \mathbf{R} 的特征值 (Floquet 乘数) 为 $\lambda_i (i = 1, \dots, M_1 + M_2 + 1)$, 则系统(23)的解可以写为: $\varphi_i = e^{\gamma_i t} Z_i(t)$, 其中 $\gamma_i = T^{-1} \ln \lambda_i$, $Z_i(t)$ 为周期为 $2\pi/\omega$ 的周期函数, γ_i 称为特征指数.

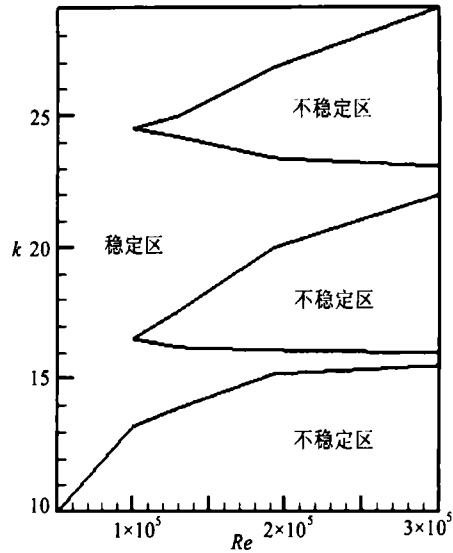
本文中 λ_{\max} 表示基本解矩阵 $\boldsymbol{\psi}(T)$ 的最大特征值的模, $\text{Re}(\gamma)_{\max}$ 为特征指数的实部, 表示最不稳定模的增长率. 系统的稳定性就可以由 λ_{\max} 或 $\text{Re}(\gamma)$ 来决定. 当 $\lambda_{\max} > 1$ ($\text{Re}(\gamma)_{\max} > 0$) 时, 系统为不稳定; 当 $\lambda_{\max} < 1$ ($\text{Re}(\gamma)_{\max} < 0$) 时, 系统为稳定的; 当 $\lambda_{\max} = 1$ ($\text{Re}(\gamma)_{\max} = 0$) 时, 系统为中性稳定.

4 Floquet 稳定性分析

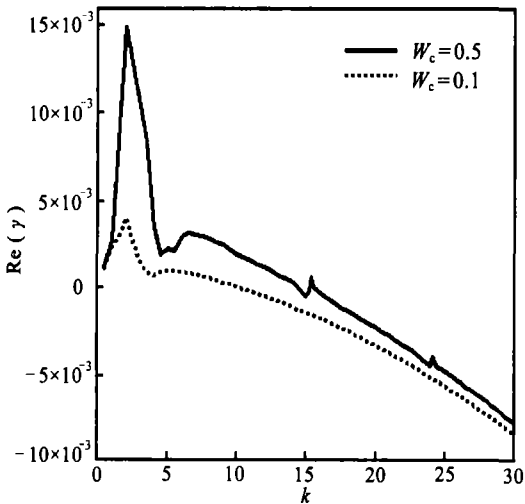
本文在 Zhou 和 Tang^[12]研究无粘性周期脉动射流的参数共振现象和王艳霞^[13]研究粘性含周期脉动管流的稳定性的基础上,对粘性含周期脉动气液同轴射流的稳定性进行研究. 计算中液体为铝液,气体为氮气或氩气. 液铝密度 $\rho_1 = 2\,500\text{ kg/m}^3$, 粘度 $\mu_1 = 0.86 \times 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$, 表面张力系数 $S = 0.836\text{ N/m}$; 氮气密度为 $\rho_2 = 0.5\text{ kg/m}^3$, 粘度 $\mu_2 = 3.14 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$, 所对应的无量纲数参见各图底部, $\text{Re}(\gamma)$ 为系统的增长率, k 为波数.



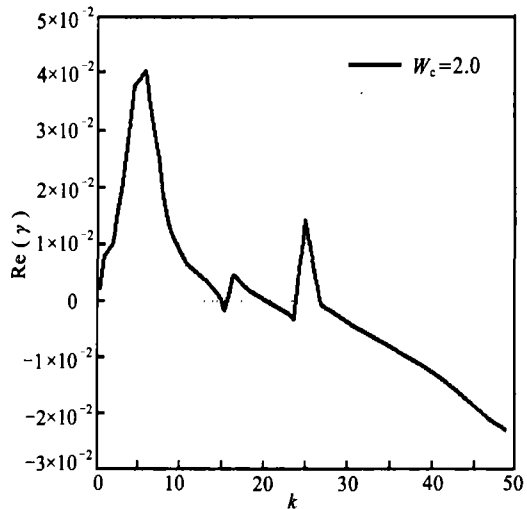
$Q = 2.0 \times 10^{-4}, N = 0.036\,6, \omega = 1,$
 $Re = 1.962\,2 \times 10^5, Fr = 4.649\,2 \times 10^5$
 图 2 表面张力对稳定性的影响



$Q = 2.0 \times 10^{-4}, N = 0.036\,6, \omega = 1,$
 $We = 7.339\,4 \times 10^{-5}, Fr = 4.649\,2 \times 10^5$
 图 3 粘性对稳定性的影响

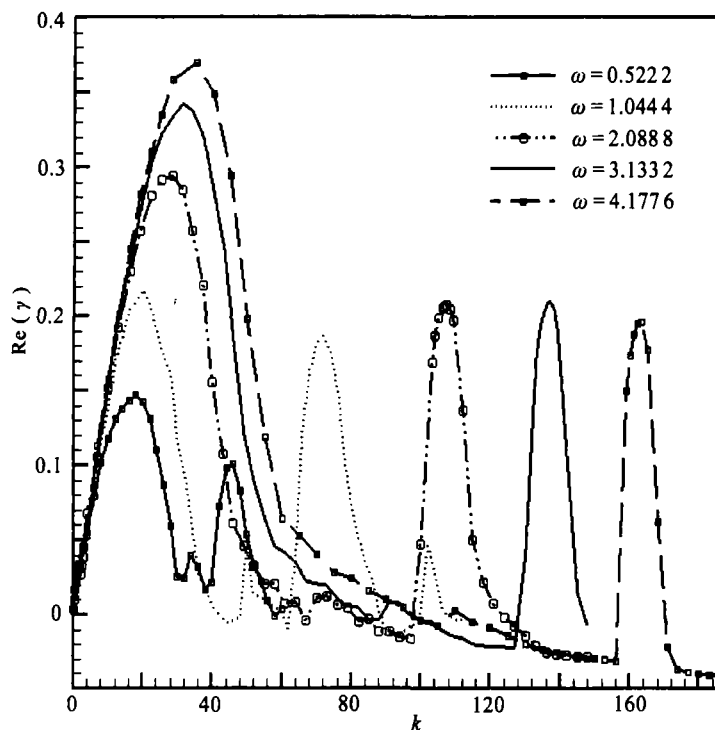


$Q = 2.0 \times 10^{-4}, N = 0.036\,6, Re = 1.962\,2 \times 10^5,$
 $We = 7.339\,4 \times 10^{-5}, Fr = 4.649\,2 \times 10^5, \omega = 1$
 图 4 脉动振幅对稳定性的影响



改变 We 同时保持其他物理参数不变,图 2 分析了表面张力对系统稳定性的影响. 图中显示含脉动射流主要有 3 大不稳定区,即由表面张力引起的不稳定区、由剪切引起的不稳定区

和由振动引起的不稳定区。该图表明当 Weber 数较小时,气液剪切较剧烈时,由表面张力引起的不稳定区被由气液剪切引起的不稳定区覆盖,如图 2 中 $We = 7.3 \times 10^{-5}$ 和 $We = 1.0 \times 10^{-4}$ 两条曲线,只显示出由剪切引起的不稳定区和由振动引起的不稳定区。当 Weber 数增大时,如图 2 中曲线 $We = 5.0 \times 10^{-4}$,系统的 3 大不稳定区都能显现出来,第 1 个不稳定区是由表面张力引起的;第 2 个不稳定区是由气液剪切引起的,它会随着气液剪切的增强而增大;第 3 个不稳定区是由振动引起的,它只随速度脉动的特性而改变。从图中可以看出,表面张力对不同稳定区的影响有较大差异。表面张力本身能够引起射流不稳定,并且能抑制由剪切引起的不稳定,但是对由振动引起的不稳定性几乎没有影响。



$$Q = 6.9167 \times 10^{-4}, N = 0.0248, Re = 1.0213 \times 10^6, \\ We = 4.7493 \times 10^{-6}, Fr = 1.8710 \times 10^6$$

图 5 脉动频率对稳定性的影响

图 3 显示了流体粘性的变化对系统稳定性的影响。由于 Reynolds 数与粘性成反比,本文保持其他参数不变,通过 Reynolds 数的变化来反映流体粘性对稳定性的影响。由图中可以看出,在较小的 Reynolds 数(即较大的粘性)下,系统只存在一个较小的不稳定区;逐渐增大 Reynolds 数(减小粘性),系统逐渐出现了多个不稳定区,并且较大的 Reynolds 数对应的不稳定区较大。这表明流体粘性的增加,会使系统的不稳定区缩小甚至消失;对于粘度较大的流体,很难发生明显的参数共振现象,而对于粘度较小的流体,更容易发生参数共振现象。Zhu 和 Ru^[19]研究微型振荡器中静电板的参数共振也指出,阻尼的增加会使参数共振系统由不稳定变为稳定。

图 4 显示了脉动振幅对稳定性的影响。Zhou 和 Tang^[12]研究有脉动的无粘射流时,其脉动振幅为 0.1 时已经有明显的参数共振现象。本文考虑了流体的粘性,在较小的脉动振幅的影响下,射流只存在一个不稳定区,并且系统的最大增长率较小;当增大脉动振幅, $W_c = 0.5$ 时,可以看出图 4(a)中出现了多个不稳定区。通过增大脉动振幅,可以使多个不稳定区明显呈

现,如图 4(b)。结果表明,随着波数的增加,系统经历了不稳定-稳定-不稳定-稳定-不稳定-稳定的状态,这与 Zhou 和 Tang^[12]研究无粘射流得到的系统参数共振特性类似。由此可以看出,速度脉动幅值的增加能够增强系统的参数共振特性。

图 5 研究了脉动频率对射流稳定性的影响。随着脉动频率的增大,由振动引起的不稳定区对应的增长率先增加后减小,并且最大增长率对应的波数不断增大,其对应的射流破碎粒径也不断减小。Zhou 和 Tang^[12]研究无粘射流和王艳霞^[13]研究含脉动管流时,也发现增加脉动频率将有助于减小破碎粒径。这与本文研究关于粘性射流的结果定性一致。

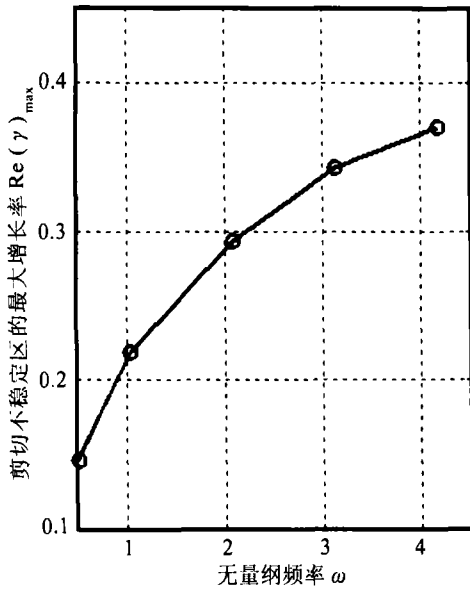


图 6 剪切不稳定最大增长率-脉动频率曲线

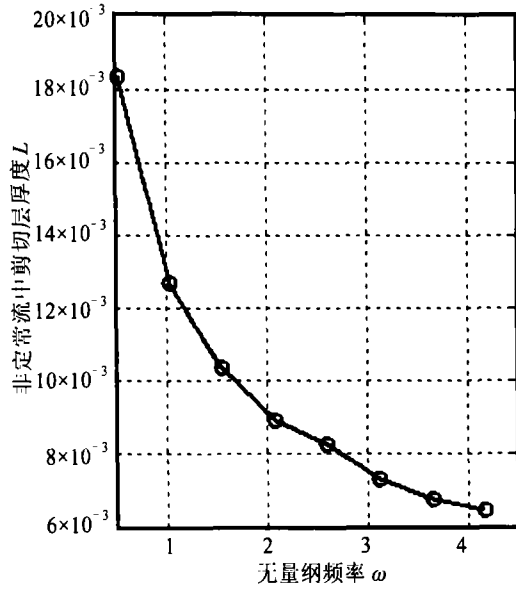


图 7 非常流中剪切层厚度-脉动频率曲线

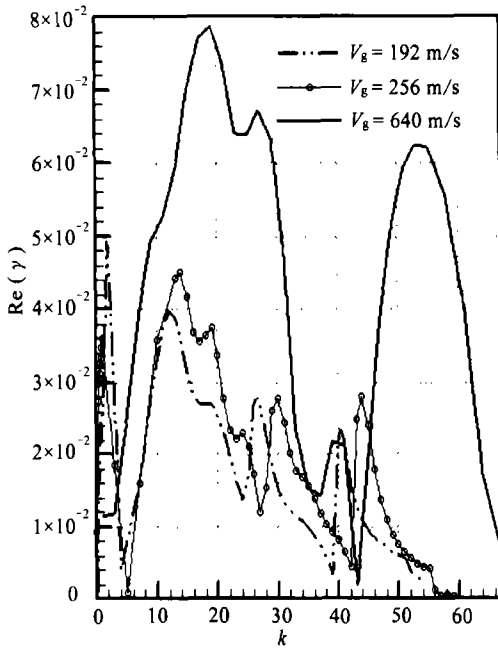


图 8 不同工况下脉动射流的稳定性

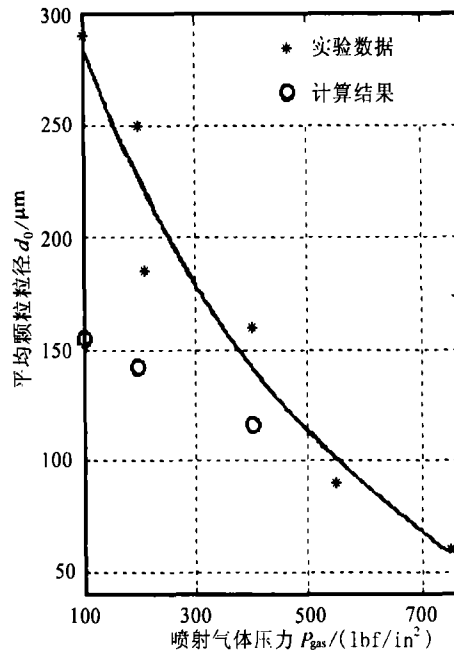


图 9 计算结果和实验粒径比较
(1 lbf/in² = 6 894.76 Pa)

随着脉动频率的增大,由剪切引起的不稳定区呈现单调增大的趋势。图 6 显示了由剪切引起不稳定区最大增长率随脉动频率的增大而单调增加,这是由于非定常基本流中剪切层厚度随着脉动频率的增加单调减小(见图 7)。

对照 Rai 等人^[10-11,20]关于 USGA 雾化液铝的实验,本文计算了其实验中用氩气雾化液铝的几种工况。图 8 显示了 3 种实验工况下在 $(k, \text{Re}(\gamma))$ 平面的射流的稳定性分析结果,图中 V_g 表示雾化气体氩气的速度。可以看出,1) 对应较小波数的、由表面张力引起的不稳定区,随着氩气速度 V_g 的增加,该不稳定区对应的增长率逐渐减小;2) 随着气液速度差的增加,气液剪切作用逐渐增强,由剪切引起的不稳定区逐渐增大;3) 随着气液速度差的增加,氩气振动的影响更加显著,由振动引起的不稳定区逐渐增大。

虽然以上工况显示剪切不稳定的增长率大于振动引起的不稳定增长率,但是在某些参数下,振动引起的不稳定增长率会超过剪切不稳定的最大增长率(见图 2)。对于以上 3 种工况得到的稳定性数据,本文用由振动引起的最不穩定波对应的半波长来比拟雾化平均粒径,跟 Rai 等人^[11]的实验结果比较见图 9,实线为 Rai 等人对其实验数据的拟合曲线。由图可以看出,用稳定性分析得到的结果在雾化粒径的量级上、雾化粒径的变化趋势上都和实验较好的吻合。

5 结 论

本文基于周期性脉动速度激励下气液同轴射流的数学模型,运用线性稳定性理论,采用 Chebyshev 配点法和 Floquet 理论,研究了液铝-氮气射流的参数共振特性。本文用数值方法得到了非定常基本流的解,克服了用 Bessel 函数表示的非定常基本流在大密度比情况下计算不准确的困难。分析了含脉动的粘性射流的共振特性以及各物理参数对射流稳定性的影响,讨论了系统可能产生的 3 种不稳定区域:由表面张力引起的不稳定区;由气液剪切引起的不稳定区域;由振动引起的不稳定区。

结果表明速度脉动幅值能够较大程度影响射流的稳定性,较大的速度脉动幅值能够使射流更加不稳定;流体粘性能抑制由振动引起的不稳定性,随着粘性的增大,由振动引起的不稳定区逐渐缩小甚至消失;流体的表面张力对由周期脉动引起的、对应波数较大的不稳定区没有实质上的影响,但是对剪切引起的不稳定区影响较大;速度脉动频率不仅影响由振动引起的不稳定区,也影响非定常基本流中剪切层的厚度,从而影响由剪切引起的不稳定区;气液剪切作用的增强,能够使由表面张力引起的不稳定区减小,使由剪切引起的不稳定区迅速增大。最后本文用由振动引起的最不穩定波的半波长比拟雾化的平均粒径,得到的颗粒粒径在量级上和变化趋势上都和实验结果比较吻合。

[参 考 文 献]

- [1] Plateau J. Statique experimentale et theorique des liquids soumise aux seules forces[J]. *Moleculaire Gauthier Villars*, 1873, 1(1): 2-10.
- [2] Rayleigh Lord. On the instability of jets[J]. *Proc London Math Soc*, 1879, 10(1): 4-13.
- [3] Weber C Z. Zum zerfall eines flussigkeitsstrahles[J]. *Math Mech*, 1931, 11(36): 136-154.
- [4] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*[M]. New York: Oxford University Press, 1961, 537.
- [5] Keller J B, Rubinow S I, Tu Y O. Spatial instability of a jet[J]. *Phys Fluids*, 1972, 16(12): 2052-2055.
- [6] Lin S P, Lian Z W. Mechanisms of the breakup of liquid Jet[J]. *AIAA Journal*, 1990, 28(1): 120-126.

- [7] Lin S P, Ibrahim E A. Instability of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a vertical pipe [J]. *J Fluid Mech*, 1990, **218**:641-658.
- [8] Lin S P, Chen J N. Role played by the interfacial shear in the instability mechanism of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a pipe[J]. *J Fluid Mech*, 1998, **376**:37-51.
- [9] Grant N J. Rapid solidification of metallic particulates[J]. *Journal of Metals*, 1983, **35**(1):20-27.
- [10] Rai G, Lavernia E J, Grant N J. Powder size and distribution in ultrasonic gas atomization[J]. *Journal of Metals*, 1985, **37**(8):22-26.
- [11] Rai G, Lavernia E J, Grant N J. Effect of the atomisation variable on the powder characteristics in the USGA process[A]. In: *Proceedings of the Fifth International Powder Metallurgy Conference* [C]. Princeton, NJ: Metal Powder Industries Federation, 1986, 55-65.
- [12] ZHOU Zhe-wei, TANG Xiao-dong. The effect of the pulsation in gas flow on the stability of melted metal jet[A]. In: *Fourth International Conference on Spray Forming* [C]. University of Maryland, 1999, 35-41.
- [13] 王艳霞, 胡国辉, 周哲玮. 圆管内含周期脉动分层流的 Floquet 稳定性分析[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(8):883-890.
- [14] Woods D R, Lin S P. Instability of a liquid film flow over a vibrating inclined plane[J]. *J Fluid Mech*, 1995, **294**:391-407.
- [15] Burya A G, Shkadov V Y. Stability of a liquid film flowing down an oscillating inclined surface[J]. *Fluid Dynamics*, 2001, **36**(5):671-681.
- [16] 李小军, 胡国辉, 周哲玮. 射流速度剖面形状变化及其对界面稳定性的影响[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(1):1-6.
- [17] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2000, 327.
- [18] 贺建勋, 王志成. 常微分方程[M]. 上、中、下册. 北京: 科学技术出版社, 1979.
- [19] Zhu J, Ru C Q, Mioduchowski A. High-order subharmonic parametric resonance of nonlinearly coupled micromechanical oscillators[J]. *Eur Phys J B*, 2007, **58**(4):411-421.
- [20] Veistinen M K, Lavernia E J, Baram J C, et al. Jet behavior in ultrasonic gas atomization[J]. *The International Journal of Powder Metallurgy*, 1989, **25**(2):89-92.

Floquet Instability of a Large Density Ratio Liquid-Gas Coaxial Jet With Periodic Fluctuation

LI Zhen, HU Guo-hui, ZHOU Zhe-wei

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics;
Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy and Environment Engineering,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: By the numerical simulation of basic flow, Floquet stability analysis of interfacial flow with periodic fluctuation into large density ratio range were extended. The stability of a liquid aluminum jet in a coaxial nitrogen stream with velocity fluctuation was investigated by Chebyshev collocation method and the Floquet theory. The parametric resonance of the jet and the influences of different physical parameters on the instability were discussed. The results show qualitative agreement with the experimental data available.

Key words: jet stability; Chebyshev collocation; Floquet theory; parametric resonance; large density ratio