

# 弹粘塑性材料中 II 型动态扩展裂纹 尖端场的构造研究\*

贾 斌<sup>1</sup>, 王振清<sup>2</sup>, 李永东<sup>3</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 复合材料与结构研究所, 哈尔滨 150001;

2. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001;

3. 装甲兵工程学院 机械工程系, 北京 100072)

(沈亚鹏推荐)

**摘要:** 采用弹粘塑性力学模型, 对弹粘塑性材料中 III 型动态扩展裂纹尖端场进行了渐近分析. 在线性硬化条件下, 裂纹尖端的应力和应变场具有相同的幂奇异性, 奇异性指数由材料的粘性系数唯一确定. 数值计算结果表明, 运动参量裂纹扩展速度本身对裂尖场的分区构造影响很小. 材料的硬化系数主导裂尖场的分区构造, 但二次塑性区对裂尖场的影响较小. 材料的粘性主导裂纹尖端应力和应变场的强度, 同时对裂尖场的构造有一定影响. 当裂纹扩展速度为 0 时, 动态解退化为相应的准静态解; 当硬化系数为 0 时, 线性硬化解还原为相应的理想塑性解.

**关键词:** 弹粘塑性材料; 动态扩展裂纹; III 型裂纹; 裂纹尖端场; 分区构造

**中图分类号:** O346 **文献标识码:** A

## 引 言

在快速扩展裂纹尖端, 塑性应变率可高达  $10^3 \sim 10^5 \text{ s}^{-1}$ <sup>[1]</sup>, 大部分变形能以热的形式释放出来, 使裂纹尖端局部温度升高可达几百、甚至上千度<sup>[2]</sup>, 此时材料的性质必然发生变化, 粘性流动大大增加. 因此在研究动态裂纹尖端渐近场时, 有必要考虑到材料的粘性效应. 但是, 由于弹性、粘性和塑性三者耦合所造成的复杂性, 使得渐近问题变得更加复杂和困难. 一般来说, 根据弹性阶段粘性变形的有无, 可以把粘弹塑性材料分为两类<sup>[3]</sup>: 一类是粘弹性材料当应力达到一定值时呈现塑性形变, 在弹性变形过程中与塑性阶段内均有粘性效应, 这种材料就称为粘弹塑性材料; 另一类是屈服前仅有弹性变形或微弱粘性效应, 在塑性阶段有明显的粘性性质, 呈粘塑性形变, 此种材料称为弹粘塑性材料. 为了研究粘性效应作用下的动态扩展裂纹尖端渐近场, Gao (高玉臣)<sup>[4]</sup> 首先引入了一种简化的弹粘塑性模型, 即假设在塑性阶段粘性变形和塑性变形相等, 并指出一些金属材料在高应变率下的性能就可以用这种模型来描述, 其结果消除了无粘性动态解中的塑性激波. 在此基础上, 贾斌等人<sup>[5-6]</sup> 分别研究了 I、II 型裂纹问题, 其中 I 型裂纹不含弹性卸载区而 II 型裂纹含有弹性卸载区和二次塑性区及二次弹性区. 本文对 III 型裂纹进行了研究, 得到了其尖端场的分区构造随各参数的变化规律.

\* 收稿日期: 2007-09-29; 修订日期: 2008-04-27

作者简介: 贾斌(1975-), 男, 黑龙江人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86-451-86417978-12; Fax: + 86-451-86402055; E-mail: jiabin@hit.edu.cn).

## 1 控制方程与边界条件

采用弹粘塑性力学模型,如图 1 所示,在三维情况下其本构方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{H(J_2 - K^2)}{\eta} \left[ 1 - \frac{K}{\sqrt{J_2}} \right] S_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

式中  $E$ 、 $\nu$  分别为弹性模量和 Poisson 比,  $\delta$  为 Kroneker 符号,  $H$  为 Heaviside 阶跃函数,  $J_2$  为应力张量的第二不变量,  $K$  为材料屈服强度,  $\eta$  为粘性系数,  $\varepsilon_{ij}$ 、 $\sigma_{ij}$ 、 $S_{ij}$  分别为应变、应力和偏应力张量。

考虑裂尖场的粘性系数  $\eta$  为等效塑性应变率的函数, 并设其形式如下:

$$\eta = C(\dot{\varepsilon}_p)^{-\beta} \quad (0 < \beta < 1), \quad (2)$$

式中  $C$  和  $\beta$  为非负材料常数. 把上式代入式(1), 并假设在裂纹尖端应力具有形如  $r^{-\delta}$  ( $0 < \delta < 1/2$ ) 的幂奇异性, 则由式(1)的量级协调可得

$$\delta = 1/\beta - 1. \quad (3)$$

量级分析表明在裂纹尖端应变也具有形如  $r^{-\delta}$  ( $0 < \delta < 1/2$ ) 的幂奇异性, 并且对于 II 型裂纹, 当材料的硬化规律为

$$\tau_p - k\gamma_p = 0, \quad (4)$$

即线性硬化时, 各物理量与基本方程是量级匹配的, 其中  $k$  为材料的线性硬化模量,  $\tau_p$ 、 $\gamma_p$  分别为等效塑性剪应力和等效塑性剪应变. 其本构方程式(1)在极坐标下变为

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\tau_{\alpha}}{\mu} + \frac{3\tau_{\alpha}}{2\tau} \left( \frac{2}{3C} \right)^{1/(1-\beta)} H(\tau - k\gamma_p) (\tau - k\gamma_p)^{1/(1-\beta)} \quad (\alpha = r, \theta), \quad (5)$$

$$H(\tau - k\gamma_p) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \tau - k\gamma_p > 0, \\ 0, & \text{当 } \tau - k\gamma_p \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\mu$  为剪切模量, 剪应力  $\tau_{\alpha} = \sigma_{\alpha}$ , 剪应变  $\gamma_{\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha}$ , 而等效剪应力、等效塑性剪应力和等效塑性剪应变的定义式分别为

$$\tau = (\tau_r^2 + \tau_{\theta}^2)^{1/2}, \quad \tau_p = [(\tau_r^p)^2 + (\tau_{\theta}^p)^2]^{1/2}, \quad \gamma_p = \int [(\gamma_r^p)^2 + (\gamma_{\theta}^p)^2]^{1/2} dt; \quad (7)$$

几何方程和运动方程分别为

$$\gamma_r = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\tau}{r} = \rho \dot{u}_z; \quad (9)$$

式中  $u_z$  为沿  $z$  轴的非零位移分量,  $\rho$  为质量密度.

由量级分析, 可将位移和应力、应变等写为如下形式:

$$u_z = r^{1-\delta} W(\theta), \quad \tau_{\alpha} = r^{-\delta} T_{\alpha}(\theta), \quad (10)$$

$$\gamma_p = r^{-\delta} W_p(\theta), \quad \tau = r^{-\delta} T(\theta), \quad T(\theta) = [T_r^2(\theta) + T_{\theta}^2(\theta)]^{1/2}. \quad (11)$$

由式(5)、(7)可得等效塑性剪应变率的表达式为

$$\dot{\gamma}_p = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3C} \right)^{1/(1-\beta)} H(\tau - k\gamma_p) (\tau - k\gamma_p)^{1/(1-\beta)}. \quad (12)$$

引入下列无量纲量:

$$T_{\alpha} = \frac{T_{\alpha}}{\mu}, \quad T = \frac{T}{\mu}, \quad M^2 = \frac{\rho V^2}{\mu}, \quad f = \frac{k}{\mu}, \quad (13a)$$

$$D = \frac{3}{2V} \left( \frac{2\mu}{3C} \right)^{1/(1-\beta)}, \quad D^* = \frac{3H(T-fW_p)}{2V} \left( \frac{2\mu}{3C} \right)^{1/(1-\beta)} = H(T-fW_p)D, \quad (13b)$$

式中  $V$  为裂纹扩展速度. 把式(10)代入式(9), 式(7)、(10)和(11)代入式(5), 式(11)代入式(12), 经无量纲化并整理得

$$W'_p = -\delta W_p \cot \theta + \frac{D^*}{\sin \theta} (T-fW_p)^{1/(1-\beta)}, \quad (14)$$

$$T'_r = T_0 - T_r \delta \cot \theta - W' \delta + W \delta (1-\delta) \cot \theta - \frac{D^* T_r}{T \sin \theta} (T-fW_p)^{1/(1-\beta)}, \quad (15)$$

$$T'_0 = W' \frac{\delta M^2 \sin \theta \cos \theta}{1-M^2 \sin^2 \theta} - W(1-\delta) \cos^2 \theta \frac{\delta M^2}{1-M^2 \sin^2 \theta} + T_r \left[ \frac{\delta}{1-M^2 \sin^2 \theta} - 1 \right] + \frac{M^2 \sin^2 \theta}{1-M^2 \sin^2 \theta} \left[ T_0 \delta \cot \theta + \frac{D^* T_0}{T \sin \theta} (T-fW_p)^{1/(1-\beta)} \right], \quad (16)$$

$$W'' = W' \delta \cot \theta \left[ \frac{M^2 \sin^2 \theta}{1-M^2 \sin^2 \theta} - 1 \right] + W \left[ \delta - 1 - (1-\delta) \frac{\delta M^2 \cos^2 \theta}{1-M^2 \sin^2 \theta} \right] + \frac{1}{1-M^2 \sin^2 \theta} \left[ T_r \delta + T_0 \delta \cot \theta + \frac{D^* T_0}{T \sin \theta} (T-fW_p)^{1/(1-\beta)} \right], \quad (17)$$

式(14)~(17)即为Ⅲ型裂纹尖端场的控制方程组. 问题的边界条件为

$$W(0) = T_r(0) = 0, \quad T_0(\pi) = 0, \quad (18a)$$

$$\begin{cases} T_0(0) = \left[ \frac{\delta W_p(0)}{D^*} \right]^{1-\beta} + f W_p(0), \\ W'(0) = \left[ \frac{\delta W_p(0)}{D^*} \right]^{1-\beta} + (1+f) W_p(0). \end{cases} \quad (18b)$$

## 2 数值计算与裂尖场构造分析

由本构方程式(5)可知, 塑性流动因子  $\lambda$  的表达式为

$$\lambda = \frac{3}{2\tau} \left( \frac{2}{3C} \right)^{1/(1-\beta)} H(\tau - k\gamma_p) (\tau - k\gamma_p)^{1/(1-\beta)}. \quad (19)$$

对其进行无量纲化, 可得

$$\lambda = \frac{3}{2VT} \left( \frac{2\mu}{3C} \right)^{1/(1-\beta)} H(T-fW_p) (T-fW_p)^{1/(1-\beta)} = \frac{D^*}{T} (T-fW_p)^{1/(1-\beta)}. \quad (20)$$

由 Heaviside 阶跃函数的定义可知

- 1) 当  $T-fW_p > 0$  时,  $\lambda = (D^*/T)(T-fW_p)^{1/(1-\beta)}$ , 此时处于弹粘塑性区;
- 2) 当  $T-fW_p \leq 0$  时,  $\lambda = 0$ , 此时进入弹性卸载区;
- 3) 如果再次出现  $T-fW_p > 0$  的情况,  $\lambda = (D^*/T)(T-fW_p)^{1/(1-\beta)}$ , 则进入二次塑性区. 依此类推.

在控制方程中共有 4 个无量纲参数, 包括 1 个运动参数即裂纹扩展速度  $M$ , 以及 3 个材料性能参数: 表征材料硬化效应的  $f$ 、反映裂尖场奇异性程度的  $\beta$  和体现材料粘性效应的  $D$ . 对这 4 个参数分别取可能的数值进行计算, 以求得裂尖场分区构造随各参数的变化规律, 结果如下:

- 1) 随着  $M$  单调递增, 即裂纹扩展速度增加, 应力和应变场的变化很小. 裂尖场的构造属性并不随  $M$  发生变化, 如图 2 所示. 即在给定的其它参数下, 裂尖场均由主塑性区、弹性卸载区和二次塑性区组成(这依赖于其它参数的取值, 下同), 但与Ⅱ型裂纹<sup>[6]</sup>不同的是不含二次

弹性区. 当  $M > 0.3$  时裂尖场出现振荡, 这是因为此时裂纹扩展速度  $V \geq 0.34V_R$  ( $V_R$  为材料的 Rayleigh 表面波波速), 运动裂纹失去了稳定性, 因而运动裂纹的连续介质模型不再有效, 这一点与实验结果<sup>[7]</sup> 是一致的. 另外, 在极限情况下即当  $M = 0$  时仍有解, 计算结果表明此时即退化为文献<sup>[8]</sup> 的准静态解. 由于裂尖场各分区随  $M$  变化很小, 因此运动参量裂纹扩展速度本身不是裂尖场构造的直接主控参量. 但注意到式(2)中, 材料的粘性效应是与应变率即裂纹扩展速度直接相关的, 而如下文所述材料的粘性效应对裂尖场的构造具有较大的影响, 因此裂纹扩展速度是裂尖场构造的间接控制参量.

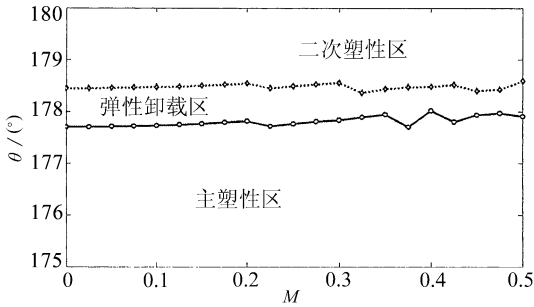


图2 裂尖场构造随  $M$  的变化  
( $f = 0.01, \beta = 0.8, D = 1$ )

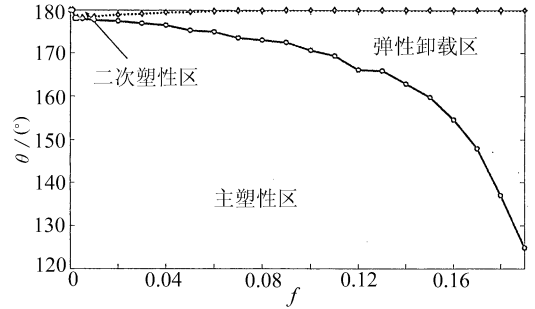


图3 裂尖场构造随  $f$  的变化  
( $\beta = 0.8, D = 1, M = 0.1$ )

2) 随着  $f$  单调递增, 即材料的硬化程度增加, 应力幅值和塑性应变单调递增, 裂尖场的构造呈现复杂的变化, 如图3所示.

由数值计算结果及图3可知

①当  $f = 0$  时仍有解, 此时材料为弹粘性-理想塑性状态, 裂尖场全部被塑性区包围, 不含弹性卸载区, 计算结果表明这时裂尖场退化为文献<sup>[9]</sup> 的粘弹性-理想塑性场;

②当  $f$  从0增加到某一小值(值的大小决定于其它参数的取值, 下同)时, 出现弹性卸载区和二次塑性区, 同样不含二次弹性区, 但这两个分区都不大, 并且主塑性区和二次塑性区随  $f$  增大而减小, 而弹性卸载区随  $f$  增大而增大;

③随着  $f$  再增加, 二次塑性区消失, 裂尖场仅由主塑性区和纯弹性区组成, 并且主塑性区随  $f$  增大而快速减小, 同时弹性区随  $f$  增大而快速增大;

④当  $f$  增加到某一临界值的时候控制方程组无解.

由以上分析可知, 只要裂尖场不是满塑性, 则随着硬化系数  $f$  的增大, 两个塑性区均减小而弹性区必增大, 这符合材料的硬化特性, 因为材料抵抗塑性变形的能力随之增强.

3) 随着  $\beta$  单调递增(相当于  $\delta$  递减), 此时材料的粘性效应减弱, 应力幅值和塑性应变单调递增, 裂尖场的构造随  $\beta$  的改变发生一定程度的变化, 如图4所示.

由数值计算结果及图4可知:

①当  $\beta \rightarrow 2/3$ , 即  $\delta \rightarrow 1/2$  时, 塑性应变和塑性流动因子都趋于0, 此时裂尖场趋于纯弹性解;

②在  $\beta$  从  $2/3$  开始增加至某一临界值之前, 裂尖场都是满塑性的;

③当  $\beta$  增加到这一临界值后, 出现弹性卸载区和二次塑性区, 同样不含二次弹性区, 并且弹性卸载区随  $\beta$  增大而增大, 而二次塑性区随  $\beta$  增大先增大而后减小直至趋于0, 但由于这两个区都不太大, 特别是第二塑性区很小, 相应的分区大小变化也较小, 弹性卸载区只是在  $\beta > 0.9$  之后变化程度增大, 但仍没有硬化系数  $f$  的影响显著;

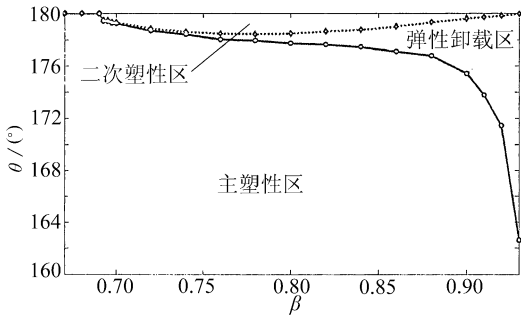


图 4 裂尖场构造随  $\beta$  的变化

( $f = 0.01, D = 1, M = 0.1$ )

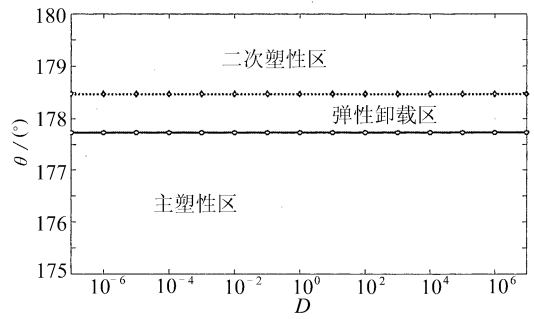


图 5 裂尖场构造随  $D$  的变化

( $f = 0.01, \beta = 0.8, M = 0.1$ )

④当  $\beta \rightarrow 1$ , 即  $\delta \rightarrow 0$  时, 控制方程组无解, 因为此时裂尖场的奇异性消失.

由以上分析可知, 只要裂尖场不是满塑性, 则随着粘性系数中负幂指数  $\beta$  的增大, 弹性区必增大而两个塑性区的和必减小, 这是因为在力学模型中粘性元件和塑性元件是并联的, 当粘性系数  $\eta$  随  $\beta$  的增大而减小时, 粘性效应减弱而塑性效应相对增强, 其效果与硬化系数  $f$  增大相类似, 通过比较图 3 和图 4 的右半部分即可看出两者的相似性.

4) 随着  $D$  单调递减(相当于  $C$  递增), 此时材料的粘性增加, 应力幅值和塑性应变单调递增, 应力和应变场的变化非常显著, 这是因为  $D$  的可取值范围非常大, 但分区构造属性并不随  $D$  发生变化, 即在给定的其它参数下, 裂尖场均由主塑性区、弹性卸载区和二次塑性区组成, 并且同样不含二次弹性区. 但与其它两个材料参数不同的是, 塑性流动因子以及裂尖场的各个分区大小完全不随  $D$  发生改变, 表现在图 5 中各分区的分界线均为直线. 这表明粘性系数中的系数  $C$  对裂尖场的构造没有任何影响, 它只影响裂纹尖端应力和应变场的强度. 当  $D \rightarrow 0$  时, 控制方程组无解, 因此时  $C \rightarrow \infty$ .

### 3 结 论

1) 采用弹粘塑性力学模型, 结合合理的粘性假设, 通过渐近分析表明, 当材料服从线性硬化规律时, 裂纹尖端的应力和应变具有相同的幂奇异性, 其奇异性指数  $\delta$  由粘性系数表达式中等效塑性应变率的幂指数  $\beta$  唯一确定.

2) 对 II 型动态扩展裂纹问题, 裂尖场构造主要由材料性能参数控制, 运动参量裂纹扩展速度本身不是裂尖场构造的直接主控参量, 它的作用是通过影响裂纹尖端材料的粘性效应从而间接地控制裂尖场的构造.

3) 在 3 个无量纲材料性能参数中, 裂尖场构造的主控参数是材料的硬化系数  $f$ , 它的变化使得裂尖场的各分区呈现复杂的变化, 但二次塑性区对裂尖场的影响较小.

4) 在粘性系数表达式所含的两个材料参数中, 幂指数  $\beta$  对裂尖场的分区构造有一定影响, 但不如硬化系数  $f$  显著; 而系数  $C$  对裂尖场的构造没有任何影响, 它是裂纹尖端应力和应变场强度的主控参数. 因此, 材料的粘性对裂尖场的构造和奇异性均有影响.

5) 当裂纹扩展速度为 0 时, 动态解可以退化为相应的准静态解; 当硬化系数为 0 时, 线性硬化解可以还原为相应的理想塑性解.

### [参 考 文 献]

[1] Östlund S. On numerical modeling and fracture criteria of dynamic elastic-viscoplastic crack growth

- [J]. *International Journal of Fracture*, 1990, **44**(4): 283-299.
- [2] Sung J C, Achenbach J D. Heating at a propagating crack tip in a viscoplastic material[J]. *International Journal of Fracture*, 1990, **44**(4): 301-309.
- [3] 杨挺青. 粘弹塑性本构理论及其应用[J]. *力学进展*, 1992, **22**(1): 10-29.
- [4] Gao Y C. Uniparameter plastic field near a dynamic crack tip[J]. *Mechanics Research Communications*, 1988, **15**(5): 307-313.
- [5] 贾斌, 王振清, 李永东. I 型定常扩展裂纹尖端的弹黏塑性场[J]. *力学学报*, 2005, **37**(4): 421-427.
- [6] 贾斌, 王振清, 李永东, 等. 线性硬化材料中稳恒扩展裂纹尖端场的粘塑性解[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(4): 470-476.
- [7] Fineberg J, Gross S P, Marder M, et al. Instability in the propagation of fast crack[J]. *Physics Review B*, 1992, **45**(12): 5146-5154.
- [8] 贾斌, 李永东, 王振清. 蠕变材料中 III 型准静态扩展裂纹尖端场构造分析[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2007, **39**(3): 412-415.
- [9] 贾斌, 唐婧, 王振清. III 型定常扩展裂纹尖端的粘弹性-理想塑性场[J]. *哈尔滨工业大学学报*[J], 2004, **36**(6): 718-721.

## Investigation Into Field Structure at Mode III Dynamically Propagating Crack Tip in Elastic-Visco-Plastic Materials

JIA Bin<sup>1</sup>, WANG Zhen-qing<sup>2</sup>, LI Yong-dong<sup>3</sup>

(1. Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology,  
Harbin 150001, P. R. China;

2. Architectural Engineering College, Harbin Engineering University,  
Harbin 150001, P. R. China;

3. Mechanical Engineering Department, Armored Forces Engineering Institute,  
Beijing 100072, P. R. China)

**Abstract:** An elastic-viscoplastic mechanics model was adopted to investigate asymptotically the mode III dynamically propagating crack tip field in elastic-viscoplastic materials. The stress and strain fields at crack tip possess the same power-law singularity under linear-hardening condition. And the singularity exponent is uniquely determined by the viscosity coefficient of the material. Numerical calculation results indicate that the motion parameter of crack propagating speed has little effect itself on zone structure at crack tip. The hardening coefficient dominates the structure of crack tip field but the secondary plastic zone has little influence on the field. The viscosity of the material dominates the strength of stress and strain fields at crack tip while it does have certain influence on crack tip field structure. The dynamic crack tip field degenerates into the relevant quasi-static solution when the crack moving speed is zero. And the corresponding perfectly plastic solution is recovered from the linear-hardening solution when the hardening coefficient becomes zero.

**Key words:** elastic-viscoplastic materials; dynamically propagating crack; mode III crack; crack tip field; zone structure