

直接数值模拟/大涡模拟中 数值误差影响的研究*

杨小龙¹, 符松²

(1. 湖南大学 先进动力总成技术研究中心, 长沙 410082;

2. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

(周哲玮推荐)

摘要: 通过比较湍流的能谱和总动能, 对数值误差(包括混淆误差、离散截断误差)、亚格子模型以及它们之间相互作用对直接数值模拟和大涡模拟的影响进行了系统研究. 算例采用了三维各向均匀同性湍流. 为了研究复杂几何形状, 数值格式采用了谱方法和 Pad 紧致格式. 大涡模型采用了 truncated Navier-Stokes(TNS) 模型结合 Pad 离散滤波器. 结果表明直接数值模拟中离散误差对结果有很大影响, 低阶格式会导致计算发散. 而大涡模拟中亚格子模型不仅能表征小尺度对大尺度的影响, 而且还缓解了数值误差对计算结果的影响. 因而低精度格式也可取得不错的结果.

关键词: 数值误差; TNS 模型; Pad 紧致格式; 离散滤波器; 大涡模拟

中图分类号: O35; O241 **文献标识码:** A

引 言

近年来由于工业界的强烈需求, 用大涡模拟(large eddy simulation, LES)来模拟复杂的工程湍流问题已成为一个研究热点^[1-2], 如航空航天领域大涡模拟被广泛地用来研究噪声和飞行器非定常流动问题^[3-4]. 但大涡模拟的应用范围依然很有限. 在大涡模拟能够成功模拟工程实际湍流之前, 还有一系列关键问题需要解决, 如亚格子模型、数值误差的影响以及它们之间的相互作用. 注意这里的数值误差是指空间离散带来的混淆误差和截断误差. 一般的, 时间离散也会带来误差, 也需要对其进行考虑. He 等^[5]做了类似的研究, 但他们的着重点是大涡模型对时间相关尺度的影响, 而不是数值误差本身. 本文主要考虑空间数值误差对计算的影响. 另外忽略了计算机浮点运算误差对计算的影响.

在早期的湍流模拟中, 由于几何形状比较简单, 一般采用了高精度的谱方法以及反混淆措施, 数值误差可以得到很好的控制. 但在复杂几何流动问题中, 由于曲面及边界条件的限制, 有限体积/差分法得到了广泛的应用, 一般只有二阶精度. 不同精度的格式带来不同的离散误差、混淆误差, 同时也影响计算的稳定性、收敛性等. 数值误差对大涡模拟的影响得到越来越

* 收稿日期: 2007-10-25; 修订日期: 2008-05-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10502029); 教育部留学回国人员基金资助项目

作者简介: 杨小龙(1973-), 男, 湖南桃源人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86-731-8821672; E-mail: xlyang@mail.tsinghua.edu.cn).

多人的重视^[1-2,6-7]. Ghosal^[6]在谱空间采用 joint normal 假设对各种误差进行了理论分析,给出了各误差的估计公式,随后对 von Kármán 能谱进行了先验. 他得出的结论是大涡模拟中数值误差对计算的影响占了主要部分,甚至超过了亚格子模型. Chow 和 Moin^[11]在他的基础上进一步分析了不同差分格式对亚格子模型的影响,也对网格分辨率、不同滤波尺度的影响进行了分析. 但和 Ghosal 一样,他们的分析也表明数值误差的作用超过了亚格子模型. 他们的分析无法解释为什么低价精度格式在实际工程计算中也能取得不错的结果^[24]. Park 和 Mahesh^[2]更进一步,采用 EDQNM 理论推导出数值误差估计公式,对能量运输方程进行了动态的评估. 他们认为亚格子模型的影响大大超过数值误差,这与 Ghosal 和 Chow 及 Moin 的结论是完全不同的.

另一方面,很多研究者认为有限差分格式加上有限的网格分辨率可以被看成是一种隐式滤波^[8-9]. 但这种隐式滤波有很多问题,比如控制方程偏离了原大涡方程,离散过滤器的选择及它们和数值格式之间的相互作用等. 为了避免这些问题,人们倾向于采用显式滤波,而显式滤波对最终计算结果有直接的影响,其对大涡模拟的影响必须加以考虑. 使用显式滤波的好处有: 1) 通过显式滤波可以移走超过计算网格所能分辨的高模态,因而更容易控制截断和混淆误差; 2) 它能消除由数值离散格式、边界条件等引起的高频振荡. 这些高频振荡的幅值在足够长的计算时间后会积累变得跟流动小尺度同等量级甚至更大,这样会使得最终结果变差; 3) 通过使用相同的显式滤波器,也使得大涡模拟和实验及直接数值模拟数据的比较更直接.

Lund^[8]对显式滤波进行了系统研究,他发现显式滤波能降低截断和混淆误差. 同时一些新的大涡模型也采用了显式滤波.

传统的大涡模型可分为涡粘模型、相似模型和混和模型 3 类. 由于早期的大涡模拟多应用于理论研究,一些精度较高的模型多只适合于简单几何,很难扩展到在工程应用中去. 因此一些简单的模型,如 Smagorinsky 模型和 MILES 模型,在实际应用中得到了广泛的应用,但其结果差强人意. 可喜的是最近有很多新模型被提出来,其中 TNS(truncated Navier-Stokes) 模型在一系列模拟中均取得了不错的结果^[10-11]. TNS 模型实际上相当于分辨率不够的直接数值模拟,它没有显式的亚格子项在控制方程中,也不再要求所求速度场是过滤后的速度场. 由于尺度的限制,根据能量传递理论,小尺度能量将在高波数处积累,需要一定的机制来提供耗散. TNS 是依靠滤波来移走高模态的能量的,而与之类似的 MILES 模型则是依靠数值格式来提供隐式耗散的.

对于直接数值模拟(direct numerical simulation, DNS)来说,数值误差主要包括网格离散截断误差、混淆误差^[1]. 而大涡模拟中,由于网格的限制不能求解所有尺度,小尺度必须用模型来模拟,因此还有亚格子模型带来的误差. 一般的,对大涡模拟来说,要求所有误差不能超过亚格子模型的影响. 另外与直接数值模拟不同,在大涡模拟中截断波数处的能量不能忽略,因此数值误差对其的影响更大,我们必须加以考虑并控制. 本文以 Park 和 Mahesh 的理论研究为基础,通过直接数值模拟和大涡模拟,对混淆误差、有限差分截断误差和亚格子模型的影响进行了详细研究. 因为本文主要关心在实际工程中的应用,因此差分格式除了谱方法外我们还选取了常用的 Padé 紧致格式,亚格子模型则为采用离散滤波器的 TNS 模型. 在下文中,我们首先介绍控制方程和大涡模型,然后对直接数值模拟结果进行讨论,随后进行大涡模拟的分析,最后给出结论.

1 控制方程和数值方法

众所周知,描述不可压湍流的控制方程是三维 Navier-Stokes 方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

上式中 \mathbf{u} 是速度, P 是压力, ν 是分子粘性系数且在本文中假设为常数.

为了避免其它因素的影响,我们这里选取了简单的各向均匀同性湍流作为研究对象. 其优点是可以在谱空间方便地得到诸如能谱、总动能等湍流统计量. 因此把 NS 方程转换到谱空间更方便一些. 注意到在谱空间,连续性方程可以采用投影的方法和压力合并^[12],那么控制方程可简化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{N}^2 \right] \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = - P_{im}(\mathbf{k}) ik_j \hat{u}_j \hat{u}_m(\mathbf{k}, t), \quad (2)$$

其中张量 $P_{im}(\mathbf{k}) = \delta_{im} - k_i k_m / k^2$ 被称为投影运算 (projection operator), 这样可以保证连续性方程得到自动满足.

本文计算采用了类似 Rogallo 的方法^[3]. 方程(2)中左端的粘性项, Rogallo 提出了一种积分因子的方法,可以准确求解. 因此唯一需要离散求解的是右端的非线性项 $N_m(\mathbf{k}, t) = ik_j \hat{u}_j \hat{u}_m(\mathbf{k}, t)$, 一般采用伪谱方法求解. 但在工程应用中,绝大多数情况下谱方法不再适用,多采用有限差分或体积法. 在这其中,Pad 紧致差分格式由于其处理曲面的灵活性和容易获得高精度得到了广泛应用. 对于一维空间导数,Lele^[14]给出的 Pad 紧致格式如下式所示:

$$\mathcal{G}'_{i-1} + \mathcal{G}'_i + \mathcal{G}'_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta}, \quad (3)$$

不同系数定义了不同精度的紧致格式. 方程左边用到了3点,最高能定义6阶格式,Lele^[14]给出的各个系数如表1所示.

表1 Pad 差分格式系数

| 格式 | a | b | 精度 n |
|-------|-----|------|--------|
| Pad 2 | 0 | 1 | 2 |
| Pad 4 | 1/4 | 3/2 | 4 |
| Pad 6 | 1/3 | 14/9 | 6 |

表2 Pad 显式滤波器系数

| 格式 | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | 精度 n |
|-----|---------------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|--------|
| F2 | $1/2 + \alpha_f$ | $1/2 + \alpha_f$ | | | | | 2 |
| F4 | $5/8 + 3\alpha_f/4$ | $1/2 + \alpha_f$ | $-1/8 + \alpha_f/4$ | | | | 4 |
| F6 | $11/16 + 5\alpha_f/8$ | $15/32 + 17\alpha_f/16$ | $-3/16 + 3\alpha_f/8$ | $1/32 - \alpha_f/16$ | | | 6 |
| F8 | $(93 + 70\alpha_f)/128$ | $(7 + 18\alpha_f)/16$ | $(-7 + 14\alpha_f)/32$ | $1/16 - \alpha_f/8$ | $-1/128 + \alpha_f/64$ | | 8 |
| F10 | $(193 + 126\alpha_f)/256$ | $(105 + 302\alpha_f)/256$ | $15(-1 + 2\alpha_f)/64$ | $45(1 - 2\alpha_f)/512$ | $5(-1 + 2\alpha_f)/256$ | $(1 - 2\alpha_f)/512$ | 10 |

如上所述,本文大涡模型采用了 TNS 模型. 假定传统的大涡模拟大尺度截断波数为 k_c , 网格尺寸为 $\Delta_{LES} = \pi/k_c$. 通常 $0 \sim k_c$ 的尺度被称为大尺度. TNS 模型则认为仅考虑大尺度

是不够的, 还需要包括小尺度的影响; 而且它认为小尺度对大尺度的影响主要包括在 $k_c \sim 2k_c$ 之间. 因此 TNS 在计算中把大尺度 $0 \sim k_c$ 和小尺度 $k_c \sim 2k_c$ 两部分都包括进来, 相应的其网格也是传统大涡模拟的两倍每方向, 也就是网格尺寸变为 $\Delta_{TNS} = \mathcal{N}/2k_c$. 这样大尺度和小尺度之间的非线性作用给大涡提供了天然的耗散, 而小尺度的耗散则靠周期性的滤波来提供^[10-11]. 在谱空间, 过滤器可以选择光滑过滤器, 如盒式、高斯、谱截断过滤器. 但用于复杂工程问题时, 很难定义全场光滑连续的滤波器, 只能考虑离散滤波器.

离散滤波器有离散盒式、离散高斯, 以及 Vasilyev 等人^[9] 提出的滤波器系列等. 很多人认为一阶倒数和滤波操作本质上是相通的, 因此基于 Pad 差分格式, Visbal 和 Gaitonde^[15] 也提出了一系列 Pad 离散滤波器: 对一个变量 f , 滤波后的值可表达为

$$\alpha f_{i-1} + f_i + \alpha f_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (f_{i+n} + f_{i-n}), \quad (4)$$

其中参数 α 在 $(-0.5, 0.5)$ 范围内可调, α 越大, 式(4)定义的滤波器耗散就越低. 跟 Pad 差分格式类似, 不同的模板可定义不同精度的滤波器, $2N + 1$ 个点最高可定义 $2N$ 阶滤波器, 在表 2 中给出了不同精度滤波器的各个系数. Yang 和 Fu^[16] 对离散滤波器对大涡模拟的影响进行了详细的研究. Pad 离散滤波器有着不错的表现, 因此本文只对 Pad 离散滤波器进行研究.

2 直接数值模拟计算结果分析

为了避免亚格子模型的影响, 我们首先进行直接数值模拟, 其结果也可作为大涡模拟的参考. 初始流场采用了和 Yang 和 Domaradzki^[11] 一样的各向同性湍流. 其分子粘性 $\nu = 1/720$, 初始无量纲总动能 $E_0 = 0.657$, Taylor-Reynolds 数为 $Re_T = 118$. 网格分辨率是 $128 \times 128 \times 128$, 计算结果表明这个分辨率对本文算例已经足够了. 在图 1 中给出了 128^3 和 256^3 网格直接数值模拟(DNS)的结果. 可以清楚地看到, 它们在低模态符合得非常好. 因此为了节省计算时间, 在下面我们只进行了 128^3 网格的计算.

2.1 混淆误差

直接数值模拟的误差仅包括由数值格式决定的混淆误差和离散误差(本文中没考虑计算机的浮点运算误差). 当空间离散格式采用谱方法时, 数值误差主要是混淆误差. 混淆误差的主要原因是网格分辨率是有限的, 高于网格分辨率的模态被错误地混淆到网格所能准确求解的模态中去. 一般地由于叠加效应, 混淆误差在网格所能分辨的最高模态附近是最大的. 如果不加以控制, 混淆误差会导致能量不守恒而使得计算结果偏离真实物理解. 在谱方法中常用随机相位的方法来消除混淆误差. 为了比较混淆误差的大小, 我们分别对采用反混淆措施(用 dealiased 表示)和不进行反混淆处理(用 aliased 表示)两种情况进行了直接数值模拟, 计算结果如图 2 所示. 图 2(a) 中我们比较了 $t = 1$ 和 $t = 3$ (从上往下)时刻两者的能谱图; 图 2(b) 中给出了混淆误差的相对值, 其计算公式为

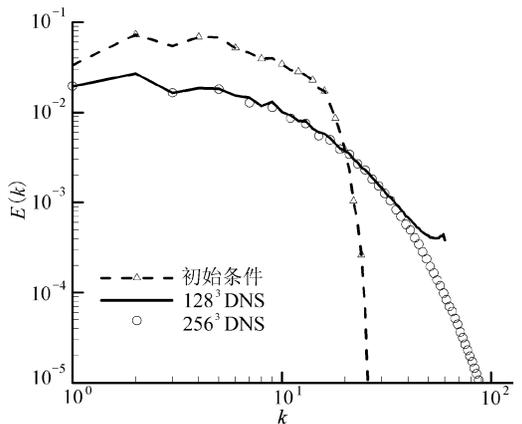
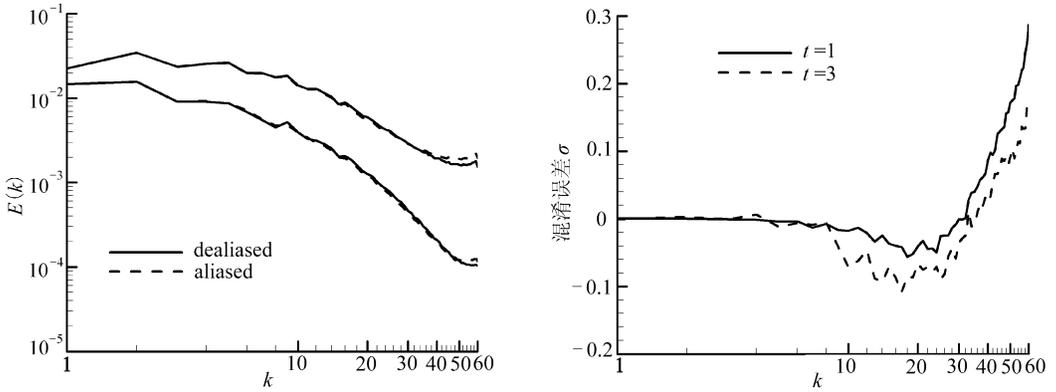


图 1 128^3 和 256^3 网格直接数值模拟(DNS)的比较

图 2(a) 中我们比较了 $t = 1$ 和 $t = 3$ (从上往下)时刻两者的能谱图; 图 2(b) 中给出了混淆误差的相对值, 其计算公式为

$$\sigma(k) = (E(k)_{\text{dealias}} - E(k)_{\text{alias}}) / E(k)_{\text{dealias}} \quad (5)$$

计算结果表明对于谱方法混淆误差是比较小的, 最大误差发生在高波数处. 这和 Park 和 Mahesh^[2]的分析也是一致的. 但长时间的计算会带来较大影响, 混淆误差会逐步影响到低模态(如 $t = 3$ 时刻), 但其绝对值仍然很小.



(a) 能谱演化图

(b) 相对混淆误差

图2 采用谱方法直接数值模拟的混淆误差图

2.2 有限差分误差

对于复杂工程问题, 谱方法不再适用, 这里考虑了常用的 Pad 紧致格式. 人们常常通过比较它在谱空间的修改波数(modified wavenumber) 来考察其带来的截断误差对计算的影响^[4]. 与混淆误差类似, Pad 格式对低模态影响较小, 但在截断波数附近误差很大. 精度越高的格式, 误差越小, 也越接近谱方法. 如前所述, 我们这里仅对非线性项进行了有限差分离散. 因为非线性项对亚格子的影响很大, 如果误差过大会掩盖真实的亚格子量. 同时, 非线性项也是影响计算稳定性的重要因素. Kravchenko 和 Moin^[7]在他们的研究中也采用了类似的做法.

在图 3 中我们对有限差分格式和谱方法在不同时刻的能谱图进行了比较, 而总动能随时间衰减图则在图 4 中给出. 可以看到 6 阶精度的 Pad 格式在各个时刻整个波段都和谱方法符合得很好. 而 4 阶格式则在初始阶段($t = 1$ 时刻)和谱方法在低波数处符合得很好, 仅在高波数(尤其截断波数)处有明显偏差. 但误差带来的能量会在高波数处积累, 并随着时间的推移逐步影响到较低波数($t = 3$ 时刻).

值得注意的是 Pad 2 阶格式实际是 2 阶中心差分格式. 众所周知, 它会带来奇偶失联振荡, 导致计算结果发散. Park 和 Mahesh^[2]在他们的研究中也指出 2 阶中心差分格式很难保证局部能量守恒, 如其文(文献[2]) 中图 7 和图 16(b) 所示. 我们这里也遇到了同样的问题, 在图 5 中显示了 2 阶格式在发散前的能谱图. 可以很明显地看到, 非物理能量迅速在高模态积累而导致结果发散. 对于这个问题, Park 和 Mahesh^[2]给出了详细的分析讨论, 有兴趣的读者可参考他们的文章.

在图 3 中所示 Pad 紧致格式的结果实际上是包含所有误差的结果, 也就是有限差分误差和混淆误差. 与谱方法不同, 很多研究者认为, 有限差分法实际上可以减少混淆误差, 因此不需要特殊的反混淆措施. 同时对于有限差分法实际上是很难把混淆误差和离散误差分开的. 但简单地判断一下其相对大小还是很有意义的. 由于采用 Pad 6 阶格式的结果和谱方法最接近, 在这里我们对 Pad 6 阶算例也加入了和谱方法一样的反混淆措施(用 dealiased 表示), 并和

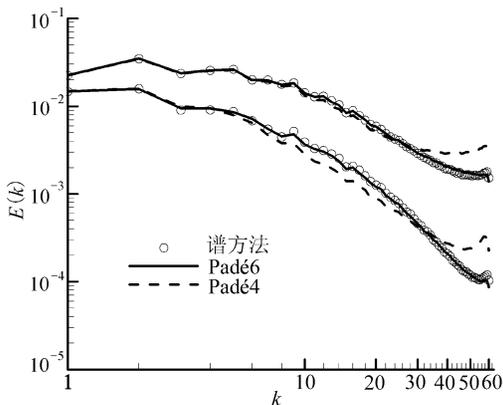


图3 $t = 1$ 和 $t = 3$ 时刻(从上往下)不同 Pad 格式和谱方法的能谱比较图

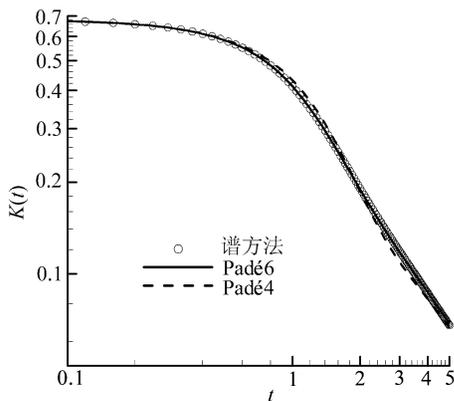


图4 不同 Pad 格式和谱方法 总能量的比较

原始结果比较, 结果图 6 所示. 与谱方法相比, 其幅值确实有所降低.

总的来说, 直接数值模拟可以很好地控制混淆误差, 其误差主要是离散格式的截断误差. 低阶格式在一定情况下是不合适的.

3 大涡模拟计算结果分析

对上面同样初始条件的算例, 我们也进行了大涡模拟. 计算网格为 $64 \times 64 \times 64$, 空间离散采用了和直接数值模拟一样的谱方法及 Pad 紧致格式. 大涡模型采用了 TNS 模型. 由于 TNS 依靠周期性滤波来移走高阶能量, 有很多滤波器可以选择^[16], 包括光滑滤波器和离散滤波器. 因为本文主要探讨大涡模拟在工程问题中的应用, 所以这里只考察了离散滤波器, 特别是 Pad 离散滤波器系列.

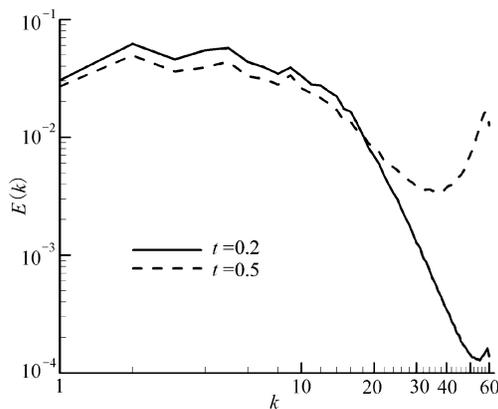
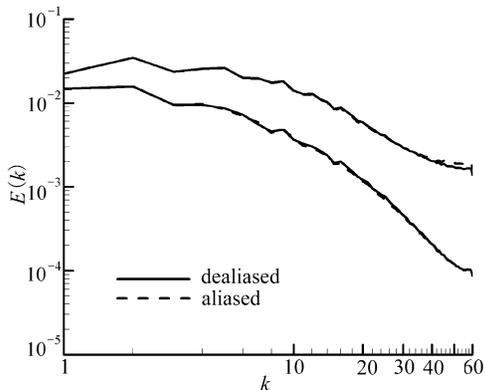
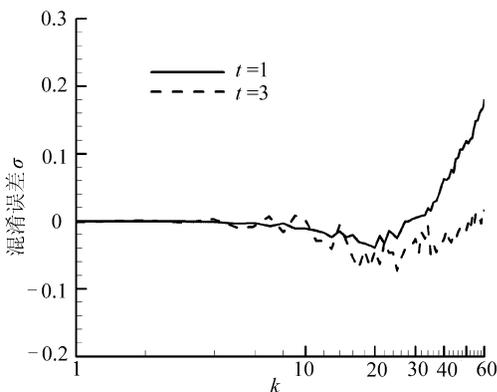


图5 Pad 2 阶格式直接数值模拟 能谱随时间演变图



(a) 能谱演化图



(b) 相对混淆误差

图6 Pad 6 阶格式直接数值模拟的混淆误差图

在图 7(a) ~ (c) 中分别显示了不同精度的紧致格式(用 d 表示)使用不同 TNS 模型(不同精度的滤波器用 f 表示)的最终能谱图, 其中‘ $d6f4$ ’意味着 6 阶 Pad 差分格式, 4 阶滤波器. 在图中也给出了采用谱方法的直接数值模拟结果作为参考. 从图中可以看到, 亚格子(TNS)模型对计算结果的影响很大. 对所有差分格式, 低阶精度的滤波器提供的耗散过大, 在各个计算中的表现均较差; 采用 4 阶精度及以上的 TNS 模型和直接数值模拟结果吻合得比较好. 但滤波器精度越高, 其保持的能量越大, 提供的耗散就越小, 对大涡模拟反而不利. 采用 4 阶滤波器的 TNS 模型结果最好.

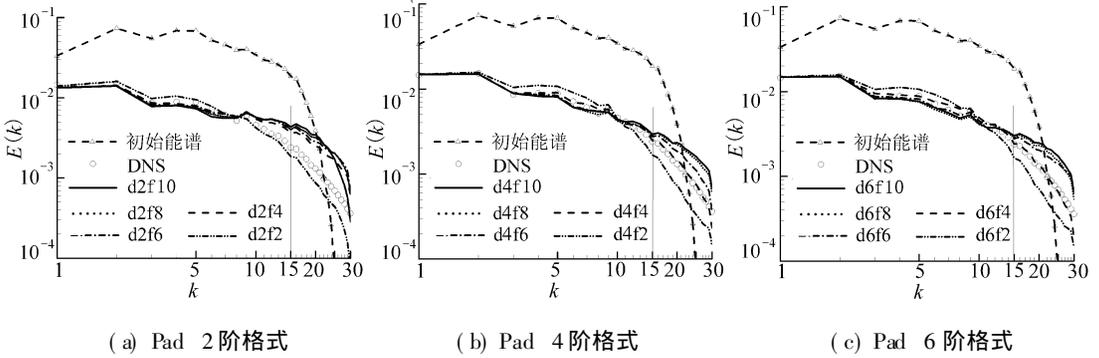


图 7 不同 Pad 格式和 TNS 模型大涡模拟的最终能谱图

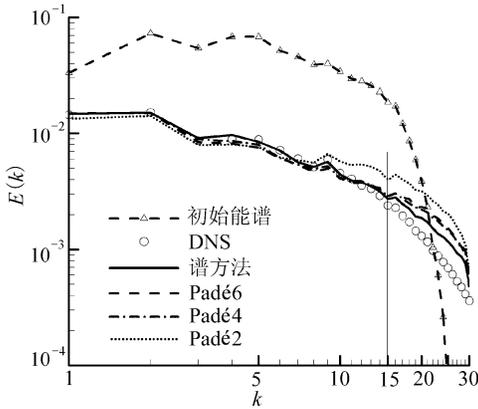


图 8 大涡模拟不同离散格式最终时刻能谱比较图

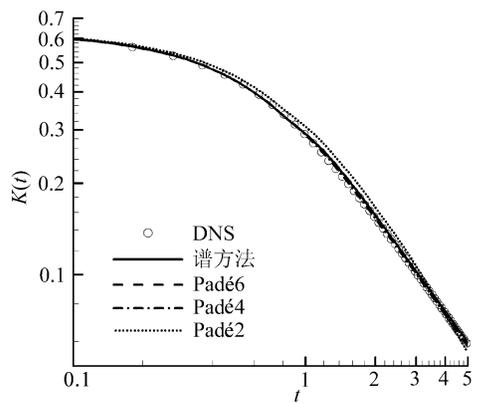


图 9 大涡模拟不同离散格式总动能随时间演变图

和直接数值模拟相比, 一个有意思的现象就是大涡模拟对差分格式的精度没那么敏感. 即使 2 阶精度的 Pad 差分格式, 也能取得不错的模拟结果. 当然其结果仍不如高阶精度格式, 但要比采用 2 阶精度的直接数值模拟导致发散的结果好得多. 其原因是因为差分格式误差及混淆误差使得能量在高模态积累; 而 TNS 模型通过滤波移走了高模态的能量. 过滤带来的能量耗散, 中和了 2 阶离散格式带来的非物理能量的增加, 因而避免了计算的发散. 这也许有利于解释为什么低精度格式在实际工程应用中能取得不错的结果. 为了进一步比较不同数值离散格式对大涡模拟的影响, 这里我们固定 TNS 模型(均采用了 6 阶精度滤波器), 而离散格式则采用了谱方法和不同精度的 Pad 格式. 其结果如图 8、图 9 所示. 与直接数值模拟类似, 低精度格式导致能量在高模态积累, 其最终结果也较差. 精度越高, 其结果也越逼近直接数值模拟结果, 谱方法最接近之.

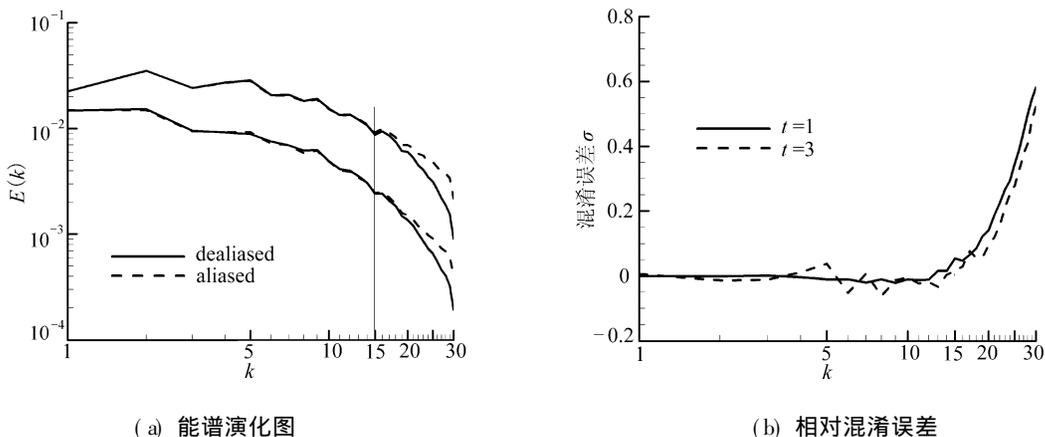


图 10 Padé 6 阶格式大涡模拟的混淆误差图

和图 6 类似, 我们这里也比較了采用和不采用反混淆措施对计算结果的影响(仅考察了 6 阶 Padé 格式, 6 阶 TNS 模型)。如图 10 所示, 混淆误差依然很小。但相比于直接数值模拟, 由于大涡模拟最大波数处的能量仍很大, 混淆误差的相对值有所增大(从 0.3 增加到 0.6)。

4 结 论

我们对数值离散误差、混淆误差和亚格子模型对直接数值模拟和大涡模拟的影响进行了研究。对于直接数值模拟, 无论采用谱方法或者 Padé 紧致格式, 混淆误差都可以得到较好控制。离散误差对计算的影响较大, 应尽量采用高精度格式。低精度格式在某些情况下是不合适的, 如本文算例中 2 阶 Padé 格式会导致能量在高模态迅速地积累, 计算迅速发散。TNS 模型简单、可靠, 可以方便地扩展到复杂流动。选择合适的滤波器就能取得很好的模拟结果。低精度的滤波器耗散过大, 这个性质对大涡模拟是不利的; 但高精度滤波器提供的耗散过小, 同样也会降低计算的性能。高精度离散格式(4 阶 Padé 格式以上)加中等精度(4 阶或 6 阶)滤波器能取得和直接数值模拟符合得非常好的结果。更重要的是由于 TNS 模型周期性地移走高波数的能量, 不仅避免了小尺度能量的积累, 同时也有效地控制了离散误差和混淆误差对高模态的影响。这种亚格子模型和数值误差的相互作用有利于大涡模拟。因此低精度的格式加上耗散较大的 TNS 模型也能取得较好的结果, 如 2 阶 Padé 格式加 2 阶滤波的 TNS 模型。另外对于大涡模拟来说, 其截断波数处的能量仍较大, 因而数值误差的影响增大。

[参 考 文 献]

- [1] Chow F K, Moin P. A further study of numerical errors in large-eddy simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 184(2): 366-380.
- [2] Park N, Mahesh K. Analysis of numerical errors in large eddy simulation using statistical closure theory[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 222(1): 194-216.
- [3] Davidson L. LESFOIL: an European project on large eddy simulations around a high-lift airfoil at high Reynolds number[A]. In: European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering [C]. Barcelona, Spain, 2000.
- [4] Mellen CP, Froehlich J, Rodi W. Lessons from LESFOIL project on large-eddy simulation of flow around an airfoil[J]. AIAA J, 2003, 41(4): 573-581.
- [5] HE Guo-wei, WANG Meng, Lele S. On the computation of space-time correlations in decaying

- isotropic turbulence[J]. *Physics of Fluids*, 2004, **14**(11): 3859-3867.
- [6] Ghosal S. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **125**(1): 187-206.
- [7] Kravchenko A, Moin P. On the effect of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **131**(2): 310-322.
- [8] Lund T. The use of explicit filters in large eddy simulation[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2003, **46**(4): 603-616.
- [9] Vasilyev O, Lund T, Moin P. A general class of commutative filters for LES in complex geometries [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **146**(1): 82-104.
- [10] Domaradzki J, Loh K, Yee P. Large eddy simulation using the subgrid-scale estimation model and truncated Navier-Stokes dynamics[J]. *Theor Comput Fluid Dyn*, 2002, **15**(6): 421-450.
- [11] Yang X, Domaradzki J. Large eddy simulations of decaying rotating turbulence[J]. *Physics of Fluids*, 2004, **16**(11): 4088-4104.
- [12] Lesieur M. *Turbulence in Fluids* [M]. 2nd Ed. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [13] Rogallo R. Numerical experiments in homogeneous turbulence[R]. NASA Tech Memo, 81835, 1981.
- [14] Lele S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **103**(1): 16-42.
- [15] Visbal M, Gaitonde D. On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, **181**(1): 155-185.
- [16] YANG Xiaolong, FU Song. The effect of filtering on truncated Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Turbulence*, 2007, **8**(8): 1-18.

Study of Numerical Errors in DNS/LES

YANG Xiaolong¹, FU Song²

(1. Research Center for Advanced Power-Strain Technology, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China;

2. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: By comparing the energy spectrum and total kinetic energy, the effects of numerical errors (which arise from aliasing and discretization errors), subgrid-scale (SGS) models and their interactions on direct numerical simulation (DNS) and large eddy simulation (LES) were investigated in detail. The decaying isotropic turbulence was chosen as the test case. In order to simulate complex geometries, both spectral method and Pad compact difference schemes were studied. The truncated Navier-Stokes (TNS) equation model with Pad discrete filter was adopted as SGS model. It is shown that for DNS, discretization error plays a key role in the simulation. Low order difference scheme may be not suitable. While for LES, it is found that SGS model can not only represent the effect of small scales to large scales, but also dump the numerical errors. Thus low order discretization scheme can also obtain reasonable results.

Key words: numerical errors; TNS model; Pad compact difference scheme; discrete filter; LES