

考虑损伤效应的正交各向异性板的 弹塑性后屈曲分析*

田燕萍, 傅衣铭

(湖南大学 力学与航空航天学院, 长沙 410082)

(本刊编委傅衣铭来稿)

摘要: 基于弹塑性力学和损伤理论, 建立了一个与应力球张量有关的正交各向异性材料的混合硬化屈服准则, 该准则无量纲化后与各向同性材料的 Mises 准则同构, 进而建立了混合硬化正交各向异性材料的增量型弹塑性损伤本构方程和损伤演化方程. 基于经典非线性板理论, 得到了考虑损伤效应的正交各向异性板的增量型非线性平衡方程, 且采用有限差分法和迭代法进行求解. 数值算例中, 讨论了损伤演化、初始缺陷对正交各向异性板弹塑性后屈曲行为的影响. 数值结果显示了弹塑性后屈曲与弹性后屈曲的不同, 并且损伤和损伤演化对板的弹塑性后屈曲的影响不可忽略.

关键词: 正交各向异性板; 弹塑性损伤; 弹塑性后屈曲; 混合硬化; 增量理论

中图分类号: O344 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 在弹塑性本构研究方面, 基于 Hill 屈服准则, 袁祖培和郑耀^[1]克服了假定材料屈服与应力球张量无关这一瑕疵, 设在应力球张量作用下, 正交各向异性材料还会产生变形, 建立了一个与应力球张量有关的新的屈服准则. Shi 和 Voyiadjis^[2]基于 Lemaitre^[3]的塑性损伤模型, 提出了一种分析塑性材料损伤的新的自由能泛函. Hayakawa 等人^[4]基于不可逆热力学理论建立了材料的弹塑性损伤本构方程, 并对受拉伸和扭转的管状构件进行了分析. Voyiadjis 和 Deliktas^[5]分别建立了率相关和率无关的弹塑性损伤模型, 并将由该模型计算所得出的复合材料的应力应变关系与实验结果进行了比较.

在结构稳定性研究方面, 目前对弹性结构后屈曲行为的研究已相当透彻, 杆、板、壳等结构的弹性屈曲理论都已较为完善; 而对于结构的弹塑性后屈曲问题, 由于必须考虑弹性卸载而使得问题极为复杂, 至今仍是一个有待探讨的热点课题. Hutchinson^[6,7]在 Hill 理论的基础上建立了应用广泛的初始塑性后屈曲理论, 为结构的塑性后屈曲分析做出了开创性的工作, 他选用分叉模态的幅值作为摄动参数, 引进伸长坐标来分析卸载区附近的边界层, 所得到的后屈曲展

* 收稿日期: 2007-09-05; 修订日期: 2008-06-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572049)

作者简介: 田燕萍(1983—), 女, 博士(联系人, Tel: + 86-734-8822421; Fax: + 86-734-8822330; E-mail: tianyanp@gmail.com);

傅衣铭(1945—), 男, 教授(E-mail: fym-2581@hnu.cn).

开式中具有模态幅值的分数次幂项. 整个分析过程相当复杂, 因而很难得到更高阶项的影响. 为简化起见, Needleman 和 Tvergaard^[8] 采用次弹性模型, 即忽略弹性卸载效应, 得到了较为简单的渐近表达式, 对某些结构得到了有意义的解. Nguyen^[9] 以及 Nguyen 和 Triantafyllidis^[10] 定义标准材料并分析了这种材料的塑性屈曲及后屈曲, 分析过程比较简单, 但只能用于小应变的情况, 而且要获得高阶项的影响是相当困难的. Cimetti re 和 L ger^[11] 综合考虑材料非线性和几何非线性, 不采用任何渐近假设, 对 Hutchinson 模型的弹塑性后屈曲行为进行了分析, 并采用有限元法, 对一个比 Hutchinson 模型更接近实际结构的受压梁模型的弹塑性后屈曲行为进行了分析. Pi 和 Bradford^[12] 采用有限元法, 对中心承载拱结构的弹塑性屈曲和后屈曲进行了分析. 但现有的研究成果主要是对简单梁杆结构的弹塑性后屈曲进行分析, 且都没有考虑损伤对结构后屈曲变形的影响.

1 混合硬化正交各向异性材料的弹塑性损伤本构模型

1.1 弹性损伤本构方程

设正交各向异性损伤主变量 D_1, D_2, D_3 分别为材料沿 x, y, z 方向上的损伤变量, 其定义为

$$D_i = \frac{A_i - A_i}{A_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

式中, A_1, A_2, A_3 分别为材料无损时在 x, y, z 方向上的横截面积, A_i 为损伤后相对应的表观横截面积.

根据 Lemaitre^[13] 的等效应变原理, Cauchy 应力 σ 作用在受损材料上引起的应变与有效应力 σ 作用在无损材料上引起的应变等价. 用四阶张量来表示各向异性损伤状态, 则有效应力可以表示为

$$\sigma = \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \sigma, \quad (2)$$

式中 $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ 为损伤有效张量, 它可表示为六阶对角矩阵^[14], 其对角线元素依次为 $M_{11}, M_{22}, M_{33}, M_{44}, M_{55}, M_{66}$, 且 $M_{11} = 1/(1 - D_1)$, $M_{22} = 1/(1 - D_2)$, $M_{33} = 1/(1 - D_3)$, $M_{44} = 1/\sqrt{(1 - D_2)(1 - D_3)}$, $M_{55} = 1/\sqrt{(1 - D_3)(1 - D_1)}$, $M_{66} = 1/\sqrt{(1 - D_1)(1 - D_2)}$. 当 $D_1 = D_2 = D_3$ 时, 退化为各向同性损伤的情况; 当 $D_1 = D_2$ 时, 退化为横观各向同性损伤的情况.

根据 Sidbroff 的能量等价原理^[15]: Cauchy 应力 σ 作用在受损材料时产生的弹性余能与有效应力 σ 作用在无损材料时产生的弹性余能在形式上相同. 定义 \mathbf{C}^e 为无损材料的弹性张量, \mathbf{C}^e 为损伤材料的弹性张量. 由于无损材料的弹性余能为

$$W^e(\sigma, 0) = 0.5 \sigma^T : (\mathbf{C}^e)^{-1} : \sigma. \quad (3)$$

损伤材料的弹性余能为

$$W^e(\sigma, \mathbf{D}) = 0.5 \sigma^T : (\mathbf{C}^e)^{-1} : \sigma. \quad (4)$$

将式(2)代入式(4), 并与式(3)比较, 定义有效弹性张量为 $\mathbf{C}^e = \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{C}^e : (\mathbf{M}^{-1})^T$, 则损伤材料的增量型弹性本构关系为

$$d\sigma = \mathbf{C}^e : d\varepsilon^e. \quad (5)$$

1.2 损伤混合强化规律

在弹塑性变形情况下, 假设: ① 应力球张量产生塑性变形, 塑性应变可压缩; ② 由主动应力引起的均匀体积扩张不影响塑性变形; ③ 屈服曲面在应力空间中随着塑性应变的产生不

断移动和扩张; ④无量纲化后的正交各向异性材料的屈服准则与各向同性材料的 Mises 屈服准则同构. 基于上述假设, 取损伤材料混合硬化型的屈服准则为

$$F_p = f(\sigma_{ij} - b_{ij}) - K(\zeta), \quad (6)$$

式中, $f(\sigma_{ij} - b_{ij})$ 为屈服函数, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - b_{ij}$ 称为主动应力, 它是引起塑性变形的主要因素, σ_{ij} 为材料损伤后的有效应力; b_{ij} 称为背应力, 它表示随动强化所引起的屈服曲面中心的平移, 反映了材料的运动强化; $K(\zeta)$ 为硬化参量, 它表示屈服曲面的大小, 反映材料的等向强化, 常设为等效主动应力 σ ; ζ 为内变量, 一般取作等效塑性应变 ϵ^p .

为满足假设 ②, 由主动应力 $\sigma_{ij} - b_{ij}$ 引起的应变分量满足 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$, 即

$$\frac{\sigma_{11} - b_{11}}{\alpha_1} = \frac{\sigma_{22} - b_{22}}{\alpha_2} = \frac{\sigma_{33} - b_{33}}{\alpha_3}, \quad (7)$$

其中, $\alpha_1 = C_{11}^e + C_{12}^e + C_{13}^e$, $\alpha_2 = C_{21}^e + C_{22}^e + C_{23}^e$, $\alpha_3 = C_{31}^e + C_{32}^e + C_{33}^e$. 假设材料主方向与坐标轴 x, y, z 方向一致, 类似如 Hill 屈服准则, 取屈服函数 $f(\sigma_{ij} - b_{ij})$ 为如下的形式:

$$f = K_{12}(\sigma'_{11} - \mu_{12}\alpha_{12}\sigma'_{22})^2 + K_{23}(\sigma'_{22} - \mu_{23}\alpha_{23}\sigma'_{33})^2 + K_{31}(\sigma'_{33} - \mu_{31}\alpha_{31}\sigma'_{11})^2 + 2K_{44}\sigma'_{44}{}^2 + 2K_{55}\sigma'_{55}{}^2 + 2K_{66}\sigma'_{66}{}^2, \quad (8)$$

式中, K_{ij}, μ_{ij} 为待定常数. $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ 分别表示正交各向异性材料沿 x, y, z 方向的正应力, $\sigma_{44}, \sigma_{55}, \sigma_{66}$ 分别表示对应于坐标平面 $(y, z), (z, x), (x, y)$ 上的剪应力; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ 分别表示 x, y, z 方向的有效正应力, $\sigma_{44}, \sigma_{55}, \sigma_{66}$ 分别表示对应于坐标平面 $(y, z), (z, x), (x, y)$ 上的有效剪应力, 且有 $\alpha_{12} = \alpha_1/\alpha_2$, $\alpha_{23} = \alpha_2/\alpha_3$, $\alpha_{31} = \alpha_3/\alpha_1$.

从式(8)可以看出, 当不考虑损伤且 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} \neq 0$, $\sigma_{44} = \sigma_{55} = \sigma_{66} = 0$ 时, $f \neq 0$, 即假设 ①成立, 应力球张量产生塑性变形; 当应力分量满足式(7), 且 $\mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{31} = 1$ 时, $f = 0$, 假设 ②成立; 当背应力 b_{ij} 在复杂塑性应变路径作用下不断演化时, 塑性屈服曲面中心不断移动, 同时, 屈服曲面还随着硬化参量 K 的变化不断扩张, 假设 ③成立; 若不考虑运动硬化和损伤, 则有 $b_{ij} = 0$, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$, 再令 $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 1$, 则式(8)退化为 Hill 提出的关于正交各向异性材料的屈服函数.

为满足假设 ④, 对式(8)表述的屈服函数无量纲化, 以便于比较 Mises 屈服准则. 为此, 选取式(8)中的常数 K_{ij} 和 μ_{ij} 分别为

$$\begin{cases} K_{12} = \frac{1}{2\Sigma_{11}^2}, K_{23} = \frac{1}{2\Sigma_{22}^2}, K_{31} = \frac{1}{2\Sigma_{33}^2}, K_{44} = \frac{1}{2\Sigma_{44}^2}, K_{55} = \frac{1}{2\Sigma_{55}^2}, K_{66} = \frac{1}{2\Sigma_{66}^2}, \\ \mu_{12} = \frac{\Sigma_{11}}{\alpha_{12}\Sigma_{22}}, \mu_{23} = \frac{\Sigma_{22}}{\alpha_{23}\Sigma_{33}}, \mu_{31} = \frac{\Sigma_{33}}{\alpha_{31}\Sigma_{11}}, \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}$ 分别为正交各向异性材料主轴材料主方向的屈服应力, $\Sigma_{44}, \Sigma_{55}, \Sigma_{66}$ 分别对应于坐标平面 $(y, z), (z, x), (x, y)$ 上的纯剪切屈服应力. 则屈服函数式(8)可写为如下的无量纲形式:

$$f = [(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{22} - \sigma'_{33})^2 + (\sigma'_{33} - \sigma'_{11})^2]/2 + \sigma'_{44}{}^2 + \sigma'_{55}{}^2 + \sigma'_{66}{}^2, \quad (10)$$

其中, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}/\Sigma_{ij}$. 由上式可知, 无量纲化后的具损伤正交各向异性材料的屈服准则与各向同性材料的 Mises 屈服准则同构.

根据式(10), 定义等效主动应力为

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{22} - \sigma'_{33})^2 + (\sigma'_{33} - \sigma'_{11})^2 + 2(\sigma'_{44}{}^2 + \sigma'_{55}{}^2 + \sigma'_{66}{}^2)}, \quad (11)$$

式中, 具应力量纲的常数 K 待定, 它可由简单应力状态下的拉伸试验来确定.

将屈服函数 f 取为

$$f = \frac{K^2}{2} [(\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22})^2 + (\dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{33})^2 + (\dot{\sigma}_{33} - \dot{\sigma}_{11})^2 + 2(\dot{\sigma}_{44}^2 + \dot{\sigma}_{55}^2 + \dot{\sigma}_{66}^2)], \quad (12)$$

其中

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{M_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - b_{ij}}{\Sigma_{ij}} \quad (i, j \text{ 不求和}). \quad (13)$$

根据式(6)和(12), 则混合硬化屈服准则可取为

$$F_p = f(\dot{\sigma}_{ij}) - [\sigma(\epsilon^p)]^2, \quad (14)$$

其中, 等效主动应力 σ 是等效塑性应变 ϵ^p 的函数, 可通过单向拉伸试验曲线 $\sigma-\epsilon$ 得到.

选取塑性耗散势函数符合混合硬化屈服准则, 根据正交性法则, 有

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial \dot{\sigma}_{ij}} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}_{ij}}, \quad (15)$$

其中, λ_p 是一个由屈服面连续性决定的因子. 将式(12)和(13)代入上式, 得

$$\begin{cases} d\epsilon_{11}^p = \lambda_p \frac{M_{11}K^2}{\Sigma_{11}} (2\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{33}), & d\epsilon_{44}^p = 2\lambda_p \frac{M_{44}K^2}{\Sigma_{44}} \dot{\sigma}_{44}, \\ d\epsilon_{22}^p = \lambda_p \frac{M_{22}K^2}{\Sigma_{22}} (2\dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{33} - \dot{\sigma}_{11}), & d\epsilon_{55}^p = 2\lambda_p \frac{M_{55}K^2}{\Sigma_{55}} \dot{\sigma}_{55}, \\ d\epsilon_{33}^p = \lambda_p \frac{M_{33}K^2}{\Sigma_{33}} (2\dot{\sigma}_{33} - \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}), & d\epsilon_{66}^p = 2\lambda_p \frac{M_{66}K^2}{\Sigma_{66}} \dot{\sigma}_{66}. \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(11), 得

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{3\sqrt{2}K\lambda_p} & \left\{ \left(\frac{\Sigma_{11}}{M_{11}} d\epsilon_{11}^p - \frac{\Sigma_{22}}{M_{22}} d\epsilon_{22}^p \right)^2 + \left(\frac{\Sigma_{22}}{M_{22}} d\epsilon_{22}^p - \frac{\Sigma_{33}}{M_{33}} d\epsilon_{33}^p \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{\Sigma_{33}}{M_{33}} d\epsilon_{33}^p - \frac{\Sigma_{11}}{M_{11}} d\epsilon_{11}^p \right)^2 + \right. \\ & \left. \frac{9}{2} \left[\left(\frac{\Sigma_{44}}{M_{44}} d\epsilon_{44}^p \right)^2 + \left(\frac{\Sigma_{55}}{M_{55}} d\epsilon_{55}^p \right)^2 + \left(\frac{\Sigma_{66}}{M_{66}} d\epsilon_{66}^p \right)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (17) \end{aligned}$$

定义等效塑性应变增量为

$$\begin{aligned} d\epsilon^p = \frac{\sqrt{2}}{3K} & \left\{ \left(\frac{\Sigma_{11}}{M_{11}} d\epsilon_{11}^p - \frac{\Sigma_{22}}{M_{22}} d\epsilon_{22}^p \right)^2 + \left(\frac{\Sigma_{22}}{M_{22}} d\epsilon_{22}^p - \frac{\Sigma_{33}}{M_{33}} d\epsilon_{33}^p \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{\Sigma_{33}}{M_{33}} d\epsilon_{33}^p - \frac{\Sigma_{11}}{M_{11}} d\epsilon_{11}^p \right)^2 + \right. \\ & \left. \frac{9}{2} \left[\left(\frac{\Sigma_{44}}{M_{44}} d\epsilon_{44}^p \right)^2 + \left(\frac{\Sigma_{55}}{M_{55}} d\epsilon_{55}^p \right)^2 + \left(\frac{\Sigma_{66}}{M_{66}} d\epsilon_{66}^p \right)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (18) \end{aligned}$$

由式(17)和(18), 有

$$d\epsilon^p = 2\sigma\lambda_p. \quad (19)$$

塑性应变可分解为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^{p(i)} + d\epsilon_{ij}^{p(j)}, \quad (20)$$

其中, $d\epsilon_{ij}^{p(i)}$ 为各向同性强化塑性应变增量, $d\epsilon_{ij}^{p(j)}$ 为随动强化塑性应变增量, 这两部分应变增量可分别表示为

$$d\epsilon_{ij}^{p(i)} = \alpha d\epsilon_{ij}^p, \quad d\epsilon_{ij}^{p(j)} = (1 - \alpha) d\epsilon_{ij}^p, \quad (21)$$

式中, α 为混合强化参数, 可通过试验确定, 其取值范围为 $(-1, 1)$. 当 $\alpha = 1$ 时表示等向强化; $\alpha = 0$ 时为随动强化; α 取负值时表示屈服曲面收缩; α 取其它值时为混合强化. 背应力可以表示为塑性应变的线性函数, 即

$$db_{\bar{j}} = c d\varepsilon_{ij}^{(j)}, \quad (22)$$

其中, c 为比例常数. 根据式 (15) 和 (21), 上式可写为

$$db_{\bar{j}} = c(1 - \alpha) \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (23)$$

1.3 弹塑性损伤本构方程

假定总应变增量由弹性与塑性应变增量两部分构成:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (24)$$

由式 (15) 和 (24), 式 (5) 可表示为

$$d\sigma_{\bar{j}} = C_{\bar{j}kl}^e \left[d\varepsilon_{kl} - \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right]. \quad (25)$$

根据一致性条件, 且令 $H' = d\sigma/d\varepsilon^p$, 由式 (14) 有

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{\bar{j}} - 2\alpha H' d\varepsilon^p = 0. \quad (26)$$

将式 (15)、(19)、(23) 和 (25) 代入上式, 可解得

$$\lambda_p = \frac{X_{\bar{j}} d\varepsilon_{\bar{j}}}{S}, \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} X_{\bar{j}} = \frac{M_{kl}}{\Sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} C_{kl\bar{j}}^e, \\ S = \frac{M_{ij}}{\Sigma_{\bar{j}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{\bar{j}kl}^e \frac{M_{kl}}{\Sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{1}{\Sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} c(1 - \alpha) \frac{M_{ij}}{\Sigma_{\bar{j}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\bar{j}}} + 4\alpha^2 H', \end{cases} \quad (28)$$

式中的下标 i, j, k, l 服从求和约定. 将式 (27) 代入式 (25), 得增量型弹塑性损伤本构方程为

$$d\sigma_{\bar{j}} = (C_{\bar{j}kl}^e - C_{\bar{j}kl}^p) d\varepsilon_{kl}, \quad (29)$$

式中, $C_{\bar{j}kl}^p = X_{ij} X_{kl} / S$. 由此, 可得损伤材料的增量型弹塑性本构关系为

$$d\sigma_{\bar{j}} = (C_{\bar{j}kl}^e - \alpha_1 C_{\bar{j}kl}^p) d\varepsilon_{kl}. \quad (30)$$

当 $F_p = 0$ 且 $(\partial f / \partial \sigma_{\bar{j}}) d\sigma_{\bar{j}} > 0$ 时, 取 $\alpha_1 = 1$; 当 $F_p < 0$, 或 $F_p = 0$ 且 $(\partial f / \partial \sigma_{\bar{j}}) d\sigma_{\bar{j}} \leq 0$ 时, 取 $\alpha_1 = 0$.

1.4 损伤演化方程

Chow 和 Wang 提出的损伤耗散势函数^[14]为

$$F_d = \sigma_d - [B_0 + B(\beta)], \quad (31)$$

其中, σ_d 称为对偶应力, B_0 为损伤演化门槛值, β 为累积损伤变量, $B(\beta)$ 为损伤阈值增量, 且定义^[4]

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{\bar{j}} L_{\bar{j}kl} \sigma_{kl} / 2}, \quad L_{\bar{j}kl} = (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{il} \delta_{jk}) / 2, \quad B(\beta) = k_d \beta, \quad (32)$$

式中, k_d 为材料常数. 根据正交性法则, 有

$$dD_1 = \lambda_l \frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{11}}, \quad dD_2 = \lambda_l \frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{22}}, \quad dD_3 = \lambda_l \frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{33}}, \quad (33)$$

$$d\beta = \lambda_l \frac{\partial F_d}{\partial (-B)} = \lambda_l, \quad (34)$$

其中 λ_l 是一个由损伤面连续性决定的因子. 根据一致性条件, 有

$$\frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{\bar{j}}} d\sigma_{\bar{j}} + \frac{\partial F_d}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \beta} d\beta = 0. \quad (35)$$

将式 (34) 代入上式, 得

$$\lambda_d = \alpha_2 \frac{\partial F_d}{\partial \sigma_j} d\sigma_j \bigg/ \frac{\partial B}{\partial \beta} = \alpha_2 \frac{\sigma_j L_{jkl}}{k_d \sigma_d} d\sigma_{kl}. \quad (36)$$

当 $F_d = 0$ 且 $(\partial F_d / \partial \sigma_j) d\sigma_j > 0$ 时, 取 $\alpha_2 = 1$; 当 $F_d < 0$, 或 $F_d = 0$ 且 $(\partial F_d / \partial \sigma_j) d\sigma_j \leq 0$ 时, 取 $\alpha_2 = 0$.

将式(36)代入式(33), 得损伤演化方程为

$$\begin{cases} dD_1 = \sigma_{11} \alpha_2 \frac{\sigma_{11} d\sigma_{11} + \sigma_{22} d\sigma_{22} + \sigma_{33} d\sigma_{33}}{2k_d(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)}, \\ dD_2 = \sigma_{22} \alpha_2 \frac{\sigma_{11} d\sigma_{11} + \sigma_{22} d\sigma_{22} + \sigma_{33} d\sigma_{33}}{2k_d(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)}, \\ dD_3 = \sigma_{33} \alpha_2 \frac{\sigma_{11} d\sigma_{11} + \sigma_{22} d\sigma_{22} + \sigma_{33} d\sigma_{33}}{2k_d(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)}. \end{cases} \quad (37)$$

2 考虑损伤效应的正交各向异性薄板的基本方程

考虑图1所示具初始缺陷 w 的正交各向异性薄板, 其长为 a , 宽为 b , 厚为 h . 取坐标系 $Oxyz$, 其参考平面 ($z = 0$) 位于未变形板的中面. 在 x 、 y 方向的边界上分别施加均布荷载 P_x 、 P_y , 定义 $k = P_y/P_x$, 且有 $P_x = P$. 假设损伤沿板厚均匀分布, 忽略 z 方向损伤, 即 $D_3 = 0$, 损伤主变量 D_1 、 D_2 分别与坐标轴 x 、 y 的方向一致. 由式(30), 可得具损伤薄板的增量型弹塑性本构关系为

$$\begin{cases} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{66} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11}^e - \alpha_1 C_{11}^p & C_{12}^e - \alpha_1 C_{12}^p & -\alpha_1 C_{16}^p \\ C_{21}^e - \alpha_1 C_{21}^p & C_{22}^e - \alpha_1 C_{22}^p & -\alpha_1 C_{26}^p \\ -\alpha_1 C_{61}^p & -\alpha_1 C_{62}^p & C_{66}^e - \alpha_1 C_{66}^p \end{bmatrix} \begin{cases} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{66} \end{cases}. \quad (38)$$

设 u 、 v 、 w 分别为中面内任一点沿 x 、 y 、 z 方向的位移, 且设 w 为初始挠度, 根据经典的几何非线性理论, 板的中面应变 ε_{11}^0 、 ε_{22}^0 、 ε_{66}^0 可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = u_{,x} + 0.5w_{,x}^2 + w_{,x}w_{,x}, \\ \varepsilon_{22}^0 = v_{,y} + 0.5w_{,y}^2 + w_{,y}w_{,y}, \\ \varepsilon_{66}^0 = u_{,y} + v_{,x} + 0.5w_{,x}w_{,y} + \\ \quad w_{,x}w_{,y} + w_{,y}w_{,x}, \end{cases} \quad (39)$$

其中下标“ \cdot ”表示对变量求偏导. 板中面曲率的改变量 K_{11} 、 K_{22} 、 K_{66} 分别为

$$\begin{cases} K_{11} = -w_{,xx}, & K_{22} = -w_{,yy}, \\ K_{66} = -2w_{,xy}. \end{cases} \quad (40)$$

当作用在板上的荷载发生变化时, 板中任一点的位移和应变均会产生相应的增量, 此时的中面应变增量为

$$\begin{cases} d\varepsilon_{11}^0 = du_{,x} + (w_{,x} + w_{,x})dw_{,x} + 0.5dw_{,x}^2, \\ d\varepsilon_{22}^0 = dv_{,y} + (w_{,y} + w_{,y})dw_{,y} + 0.5dw_{,y}^2, \\ d\varepsilon_{66}^0 = du_{,y} + dv_{,x} + (w_{,x} + w_{,x})dw_{,y} + (w_{,y} + w_{,y})dw_{,x} + dw_{,x}dw_{,y}, \end{cases} \quad (41)$$

其中 du 、 dv 、 dw 为板中面任一点沿 x 、 y 、 z 方向的位移增量. 中面曲率增量为

$$dK_{11} = -dw_{,xx}, \quad dK_{22} = -dw_{,yy}, \quad dK_{66} = -2dw_{,xy}, \quad (42)$$

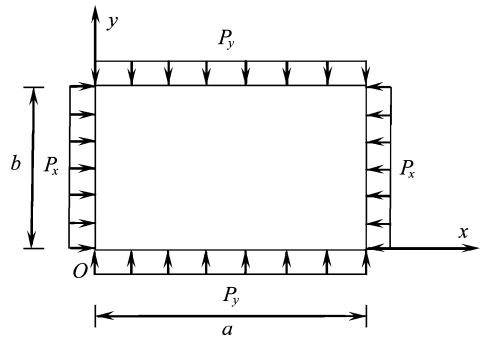


图1 正交各向异性薄板示意图

则板中任一点的应变增量为

$$d\varepsilon_{11} = d\varepsilon_{11}^0 + z d\kappa_{11}, \quad d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{22}^0 + z d\kappa_{11}, \quad d\varepsilon_{66} = d\varepsilon_{66}^0 + z d\kappa_{66}. \quad (43)$$

根据经典的非线性板理论^[16], 则具初始挠度板的增量型非线性平衡方程为

$$\begin{cases} dN_{x,x} + dN_{xy,y} = 0, \\ dN_{xy,x} + dN_{y,y} = 0, \\ dM_{x,xx} + 2dM_{xy,xy} + dM_{y,yy} + dN_x(w_{,xx} + w_{,xx}) + 2dN_{xy}(w_{,xy} + w_{,xy}) + \\ dN_y(w_{,yy} + w_{,yy}) + N_x dw_{,xx} + 2N_{xy} dw_{,xy} + N_y dw_{,yy} + dN_x dw_{,xx} + \\ 2dN_{xy} dw_{,xy} + dN_y dw_{,yy} = 0, \end{cases} \quad (44)$$

式中, N_x, N_y, N_{xy} 与 M_x, M_y, M_{xy} 分别为应力的合力与合力偶, dN_x, dN_y, dN_{xy} 和 dM_x, dM_y, dM_{xy} 分别为合力增量和合力偶增量, 且有

$$\begin{cases} [dN_x \quad dN_y \quad dN_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [d\sigma_{11} \quad d\sigma_{22} \quad d\sigma_{66}] dz, \\ [dM_x \quad dM_y \quad dM_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [d\sigma_{11} \quad d\sigma_{22} \quad d\sigma_{66}] z dz. \end{cases} \quad (45)$$

将式(38)代入上式, 可得

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon^0 \\ d\kappa \end{Bmatrix}, \quad (46)$$

其中

$$\begin{cases} A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (C_{ij}^e - \alpha_1 C_{ij}^p) dz, \\ B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (C_{ij}^e - \alpha_1 C_{ij}^p) z dz, \\ D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (C_{ij}^e - \alpha_1 C_{ij}^p) z^2 dz \end{cases} \quad (47)$$

引入如下无量纲参数

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad U = \frac{u}{a}, \quad V = \frac{v}{b}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad \bar{W} = \frac{w}{h}, \quad \lambda_1 = \frac{h}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{b}, \\ \lambda_3 = \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}}, \quad \lambda_4 = \frac{\Sigma_{66}}{\Sigma_{22}}, \quad \lambda_5 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \lambda_6 = \frac{G_{12}}{E_2}, \quad A_{ij} = \frac{A_{ij}}{Kh}, \quad B_{ij} = \frac{B_{ij}}{Kh^2}, \quad D_{ij} = \frac{D_{ij}}{Kh^3}, \\ N_\xi = \frac{N_x}{Kh}, \quad N_\eta = \frac{N_y}{Kh}, \quad N_{\xi\eta} = \frac{N_{xy}}{Kh}, \quad M_\xi = \frac{M_x}{Kh^2}, \quad M_\eta = \frac{M_y}{Kh^2}, \\ P = \frac{P}{Kh}, \quad B_0 = \frac{B_0}{\Sigma_{11}}, \quad k_d = \frac{k_d}{\Sigma_{11}}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\Sigma_j}, \quad \sigma_{cr} = \frac{\sigma_{11}^{cr}}{K}. \end{cases} \quad (48)$$

将式(46)、(48)代入式(44), 可得到用位移增量 dU, dV, dW 表示的具初始缺陷正交各向异性板弹塑性后屈曲问题增量形式的无量纲非线性平衡方程.

对于边界切向不可动简支板, 其边界条件为

$$\begin{cases} \xi = 0, 1: dV = 0, dN_\xi = -dP, dW = 0, dM_\xi = 0; \\ \eta = 0, 1: dU = 0, dN_\eta = -k \cdot dP, dW = 0, dM_\eta = 0, \end{cases} \quad (49)$$

其中, dP 为板边压力增量. 由式(37), 得无量纲损伤演化方程为

$$dD_1 = \alpha_2 \sigma'_{11} \frac{\lambda_3^2 \sigma'_{11} d\sigma'_{11} + \sigma'_{22} d\sigma'_{22}}{2k_d(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2)}, \quad dD_2 = \alpha_2 \sigma'_{22} \frac{\lambda_3^2 \sigma'_{11} d\sigma'_{11} + \sigma'_{22} d\sigma'_{22}}{2\lambda_3 k_d(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2)}. \quad (50)$$

3 求解方法

对于具损伤正交各向异性板弹塑性后屈曲问题的求解,取板的初始几何缺陷为

$$W = W_0 \sin \pi \xi \sin \pi \eta. \quad (51)$$

由于板内任一点的损伤变化率主要依赖于应力的当前值和应力增量,对于同一时刻,板内任一点的损伤并不相同,一般不可能求得满足边界条件(49)的解析解.为此,在求解中将位移函数 U 、 V 、 W 在空间内采用有限差分法离散,对空间坐标的导数以差商代替.由于荷载和结构的对称性,只取四分之一板进行计算,所考虑区域为 $0 \leq \xi \leq 1/2, 0 \leq \eta \leq 1/2$,且将这个区域用正方形网格分成 $m_1 \times m_2$ 个部分.由于式(47)中的 C_{ij}^p 与当前的应力和应变有关,则 A_j 、 B_j 、 D_j 的值不可能沿板的厚度由直接积分求出,为此,将 C_{ij}^p 在板的厚度上离散,将厚度分为 n 等分,令 $z_k = -h/2 + kh/n$,应用复化梯形求积公式可近似求出.

又将荷载分成 n 等分,每一加载步的荷载增量为 $dP = P/n$,整个问题采用迭代法求解.在任一加载步 J 中,方程和边界条件中的非线性项被线性化,且写成如下的形式:

$$(x \cdot y)_J = (x)_{J_p} \cdot (y)_{J_p}, \quad (52)$$

式中 $(y)_{J_p}$ 是前两次迭代值的均值.对于初始迭代步,可以应用二次外推法求解,即

$$(y)_{J_p} = A(y)_{J-1} + B(y)_{J-2} + C(y)_{J-3}. \quad (53)$$

对于不同的迭代步,系数 A 、 B 、 C 分别取如下的数值:

$$\begin{cases} J = 1: A = 1, B = 0, C = 0, \\ J = 2: A = 2, B = -1, C = 0, \\ J \geq 3: A = 3, B = -3, C = 1. \end{cases} \quad (54)$$

迭代过程持续到相邻两次计算结果的误差小于 0.1% ,在第 J 步得到收敛后,该迭代步终止,再进行第 $J+1$ 步的计算.

4 数值结果与讨论

式(11)中的常系数 K 用单向拉伸实验确定,则 $K = \Sigma_{11}$,在算例中取 $\sigma(\epsilon^p) = \Sigma_{11} + \Sigma_{11}(\epsilon^p)^{0.51}$.算例中,假设初始损伤为 0,采用的无量纲几何参数和材料参数为

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 1.375, \lambda_4 = 0.5, \lambda_5 = 1.67, \lambda_6 = 0.33, \nu_{12} = 0.3, \\ B_0 &= 0.07, k_d = 3.64, \alpha = 0.6, c = 2K/3. \end{aligned}$$

4.1 正交各向异性板的弹塑性屈曲分析

由于板屈曲时,其应力状态为 $\alpha_x = \sigma_{11}^{cr}$, $\alpha_y = \sigma_{22}^{cr} = k \sigma_{11}^{cr}$, $\tau_{xy} = 0$,且有 $P_{cr} = \sigma_{cr}$.在不考虑损伤效应的情况下,具几何线性的正交各向异性板的增量型压屈平衡方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \lambda_1^4 dW_{,\xi\xi\xi\xi} + (D_{12} + 4D_{66} + D_{21}) \lambda_1^2 \lambda_2^2 dW_{,\xi\xi\eta\eta} + D_{22} \lambda_2^4 dW_{,\eta\eta\eta\eta} + \\ \sigma_{cr} (\lambda_1^2 dW_{,\xi\xi} + k \lambda_2^2 dW_{,\eta\eta}) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

相应的在四边简支条件下板的无量纲边界条件为

$$\xi = 0, 1: W = 0, W_{,\xi\xi} = 0; \eta = 0, 1: W = 0, W_{,\eta\eta} = 0. \quad (56)$$

设满足边界条件(56)的位移可取为如下的分离变量形式:

$$W(\xi, \eta) = W_0 \sin \pi \xi \sin \pi \eta. \quad (57)$$

上式相应的增量形式为

$$dW(\xi, \eta) = dW_0 \sin \pi \xi \sin \pi \eta. \quad (58)$$

将式(58)代入式(55),可得到方程

$$[D_{11}\pi^4\lambda_1^4 + (D_{12} + 4D_{66} + D_{21})\pi^4\lambda_1^2\lambda_2^2 + D_{22}\pi^4\lambda_2^4 - \sigma_{cr}(\pi^2\lambda_1^2 + k\pi^2\lambda_2^2)]dW_0 = 0. \quad (59)$$

为使 $dW(\xi, \eta)$ 有非零解, dW_0 前的系数必须为 0, 从而可求得板屈曲时的无量纲临界荷载 P_{cr} 及相应的无量纲临界应力 σ_{cr} . 在板的弹塑性屈曲问题的求解中, 需要判断正交各向异性薄板的屈曲性质, 首先按照弹性本构关系计算板的弹性屈曲临界应力 σ_{cr}^e , 若 σ_{cr}^e 小于使板在 x 方向产生塑性屈服的应力, 则表示板在达到其屈服极限以前已发生屈曲, 即发生弹性屈曲, 计算所得结果即为板的弹性屈曲临界应力; 若 σ_{cr}^e 大于使板在 x 方向产生塑性屈服的应力, 则表示板在超过其屈服极限后才屈曲, 即发生了弹塑性屈曲, 此时, 要按照弹塑性本构关系计算板的屈曲临界应力. 由于弹塑性应力-应变关系与当前应力水平和变形的历史有关, 必须进行迭代运算, 以确定弹塑性屈曲临界应力. 本文将等效塑性应变 ε^p 作为内变量, 计算产生该等效塑性应变的外荷载和对应的弹塑性屈曲临界荷载, 若两者相等, 则当前外荷载即为所求的弹塑性屈曲临界荷载.

在不考虑损伤的情况下, 将本文各方程退化到各向同性板的弹塑性屈曲问题, 且取材料参数与文献[17]的相同, 表 1 给出了不同几何参数下各向同性板弹塑性屈曲临界荷载的比较. 从表中可以看出本文的计算结果与文献[17]的结果相差很小, 说明本文方法的正确性.

表 1 不同几何参数下各向同性板弹塑性屈曲临界荷载的比较

几何参数	$\lambda_1 = 1/30$	$\lambda_1 = 1/25$	$\lambda_1 = 1/20$	$\lambda_1 = 1/15$
	$\lambda_2 = 1/20$	$\lambda_2 = 1/20$	$\lambda_2 = 1/20$	$\lambda_2 = 1/20$
P_{cr} 文献[17]解	1.822 24	1.576 81	1.394 34	1.298 18
本文解	1.838 12	1.592 35	1.410 85	1.318 47

4.2 正交各向异性板的弹塑性后屈曲分析

为了进一步验证本文分析方法的正确性和计算程序的可靠性, 在不考虑损伤与塑性变形的情况下, 退化本文各方程, 使之用于具初始挠度单向受压各向同性矩形板的后屈曲分析. 取四边夹支面内可动边界条件, 且几何参数和材料参数与文献[16]的相同, 其后屈曲响应曲线与文献[16]所得结果比较如图 2 所示, 图中 W_0 表示板中点的附加挠度值, 由图可见两者吻合很好, 可以说明本文算法的可靠性.

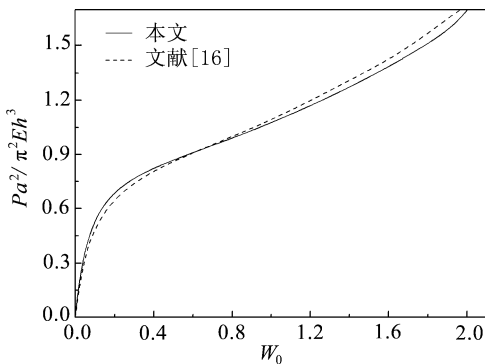


图 2 具初始挠度各向同性板后屈曲响应曲线的比较

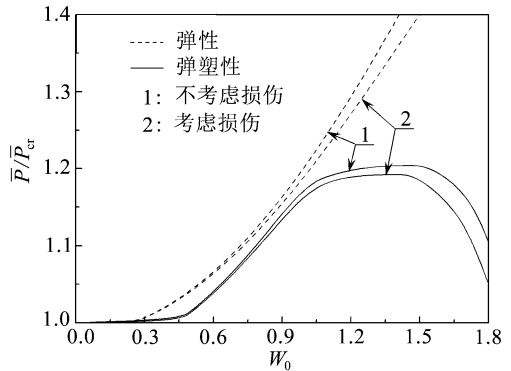


图 3 正交各向异性板弹性后屈曲与弹塑性后屈曲行为的比较

图 3 所示为无初始缺陷时, 单向受压正交各向异性板的弹性后屈曲和弹塑性后屈曲的比较. 此时取正交各向异性板的几何参数为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/28$, 单向受压即 $k = 0$ 时, 相应的不考

虑损伤的弹塑性屈曲临界荷载为 $P_{cr} = 1.17540$, 不考虑损伤和塑性变形的弹性屈曲临界荷载为 $P_{cr} = 1.36945$. 从图中可以看出, 板的弹塑性后屈曲不同于弹性后屈曲的性态, 前者存在一个最大承载荷载, 当外荷载超过最大承载荷载时, 板的横向位移将发生失稳扩展, 且损伤会导致板的承载能力下降.

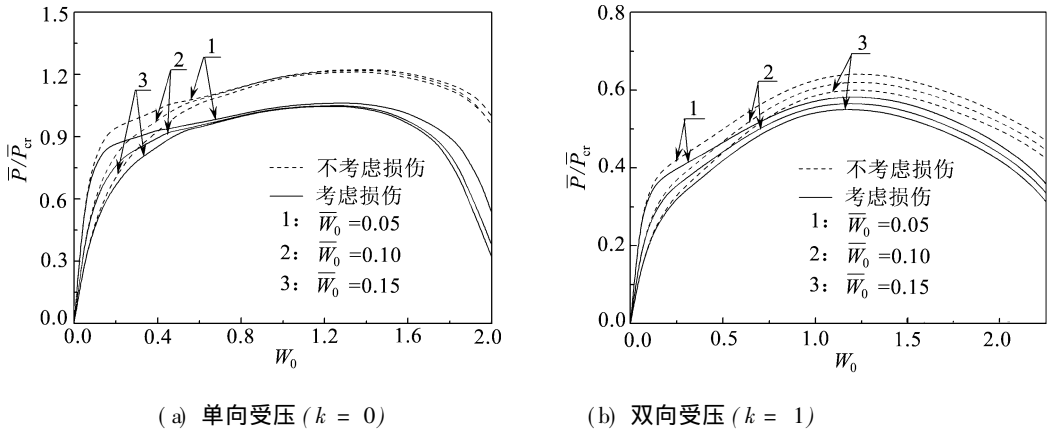


图4 初始缺陷对正交各向异性板弹塑性后屈曲行为的影响

图4所示为初始缺陷对正交各向异性板的弹塑性后屈曲行为的影响. 此时取正交各向异性板的几何参数为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/30$, 相应的不考虑损伤的无初始缺陷单向受压板 ($k = 0$) 的弹塑性屈曲临界荷载为 $P_{cr} = 1.17540$, 无初始缺陷双向受压板 ($k = 1$) 的弹塑性屈曲临界荷载为 $P_{cr} = 0.596472$. 从图中可以看出, 不论考虑损伤与否, 在相同的外荷载作用下, 随着初始几何缺陷 W_0 的增加, 板的中点挠度也随之增加, 但由于初始缺陷的存在, 使板的承载能力降低, 甚至可能在未达到其屈曲临界荷载时就已失稳, 由此说明, 初始几何缺陷对结构后屈曲变形的影响不可忽略. 比较图4(a)和图4(b), 可以看出, 在双向受压的情况下板的承载能力大大降低; 且由于损伤的出现, 板的刚度削弱, 使板的最大承载能力较无损板要低很多, 损伤对板变形的影响不可忽略.

5 结 论

本文建立了混合硬化正交各向异性材料的增量型弹塑性损伤本构方程和损伤演化方程, 对正交各向异性板的弹塑性后屈曲行为进行了分析. 由数值算例的结果分析得知, 板的弹塑性后屈曲不同于弹性后屈曲的性态, 前者存在一个最大承载荷载, 当外荷载超过最大承载荷载时, 板的横向位移将发生失稳扩展; 随着初始缺陷的增加, 板的中点挠度也随之增加, 但初始缺陷会使板的承载能力降低, 甚至可能在未达到其屈曲荷载时就已失稳. 考虑损伤效应时, 随着损伤逐渐累积, 使得结构的刚度不断削弱, 进而使有损板与无损板的后屈曲变形差异逐渐增大, 且使板的最大承载能力降低.

[参 考 文 献]

- [1] 袁祖培, 郑耀. 对于正交异性材料屈服与流动的探讨[J]. 应用数学和力学, 1990, 11(3): 233-238.
- [2] Shi G Y, Voyiadjis G Z. A new free energy for plastic damage analysis[J]. Mechanics Research Communications, 1997, 24(4): 377-383.
- [3] Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture[J]. J Eng Mater Tech, 1985, 107(1): 83-89.

- [4] Hayakawa K, Murakami S, Liu Y. An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic damage materials[J]. *Eur J Mech A/ Solids*, 1998, **17**(1): 13-32.
- [5] Voyiadjis G Z, Deliktas B. A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2000, **183**(3/4): 159-199.
- [6] Hutchinson J W. Post-bifurcation behavior in the plastic range[J]. *J Mech Phys Solids*, 1973, **21**(3): 163-190.
- [7] Hutchinson J W. Plastic buckling[J]. *Advances in Appl Mech*, 1974, **14**: 67-141.
- [8] Needleman A, Tvergaard V. An analysis of the imperfection sensitivity of square elastic-plastic plates under axial compression[J]. *Internat J Solids and Structure*, 1976, **12**(3): 185-201.
- [9] Nguyen Q S. Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture[J]. *J Mech Phys Solids*, 1987, **35**(3): 303-324.
- [10] Nguyen Q S, Triantafyllidis N. Plastic bifurcation and post-bifurcation analysis for generalized standard continua[J]. *J Mech Phys Solids*, 1989, **37**(5): 545-566.
- [11] Cimetiere A, Leger A. Some problems about elastic-plastic post-buckling[J]. *Internat J Solids and Structures*, 1996, **30**(10): 1519-1533.
- [12] Pi Y L, Bradford M A. Elastic-plastic buckling and postbuckling of arches subjected to a central load[J]. *Computers and Structures*, 2003, **81**(18/19): 1811-1825.
- [13] Lemaitre J. *A Course on Damage Mechanics* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [14] Chow C L, Wang J. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics[J]. *Engrg Fracture Mech*, 1987, **33**(1): 3-16.
- [15] Sidoroff F. Description of anisotropic damage application to elasticity[A]. In: *Proceedings of IUTAM Colloquium. Physical Nonlinearities in Structural Analysis* [C]. Berlin: Springer, 1981, 237-240.
- [16] Chia C Y. *Nonlinear Analysis of Plates* [M]. New York: McGraw-Hill International Book Company, 1980.
- [17] Wang C M, Xiang Y, Chakrabarty J. Elastic/Plastic buckling of thick plates[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2001, **38**(48/49): 8617-8640.

Elasto-Plastic Postbuckling Analysis of Orthotropic Plates Including Damage Effects

TIAN Yan-ping, FU Yi-ming

(College of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: Based on the elasto-plastic mechanics and continuum damage theory, a yield criterion which is related to the spherical tensor of stress was proposed to describe the mixed hardening of damaged orthotropic materials, and the dimensionless form of which is isomorphic with the Mises criterion for isotropic materials. Furthermore, the incremental elasto-plastic damage constitutive equations and damage evolution equations were established. Based on the classical nonlinear plate theory, the incremental nonlinear equilibrium equations of orthotropic thin plates including damage effect were obtained, and the equations were solved by the finite difference method and iteration method. In the numerical examples, the effects of damage evolution and initial deflection on the elasto-plastic post-buckling of orthotropic plates are discussed in detail.

Key words: orthotropic plates; elasto-plastic damage; elasto-plastic postbuckling; mixed hardening; incremental theory