

重构高阶导数的磨光方法^{*}

赵振宇^{1,2}, 贺国强¹

(1. 上海大学 理学院, 上海 200444;

2. 广东海洋大学 理学院, 广东 湛江 524088)

(郭兴明推荐)

摘要: 考虑由扰动数据重构原函数的导数问题. 基于 L - 广义解正则化理论, 提出了一个新的磨光方法的框架. 给出一个具体的求解前 3 阶导数的算法, 其中正则化策略选择了一种改进的 TSVD (truncated singular value decomposition) 方法(典则 TSVD 方法). 数值结果进一步验证了理论结果及新方法的有效性.

关键词: 不适定问题; 数值微分; 磨光方法; L - 广义解; 典则 TSVD 方法

中图分类号: O241 **文献标识码:** A

引 言

数值微分就是由原函数的扰动数据来求其导数, 它产生于很多实际问题当中, 比如, Abel 积分方程的求解问题^[1], 图象处理中的边界识别问题^[2] 以及一些数学物理反问题当中^[3]. 数值微分的主要困难在于它是一个不适定问题, 即对于测量中微小的误差可能造成计算中巨大误差. 现在已经有很多数值微分的方法被提出(参见文献[3-9]). 数值微分可以看作一个无界算子 T 的求值问题:

$$u = Tg^\delta, \quad (1)$$

其中 g^δ 为精确函数 g 的扰动数据. 本文将讨论的方法属于一种磨光方法.

Manselli, Miller^[10] 以及 Murio^[11] 应用 Weierstrass 核构造磨光算子来求解某些热流方程的不适定问题. 在文献[4]中, Mourio 给出了一个磨光方法的一般框架, 并探讨了它在一些问题中的应用. Hao^[12] 进一步讨论了这些磨光方法, 并将其拓展到 Banach 空间. 近来, Elden 等人^[13] 提出了一种基于小波及 Fourier 变换的磨光方法. 然而, 所有这些提到的方法有一个共同的缺陷: 磨光参数的选取一般是基于先验准则, 这在实际应用中会受到很大限制. Hanke 及 Scherzer^[3] 基于 Tikhonov 正则化提出一种求解一阶导数的方法, 它也可以看作一种磨光方法. Wang, Hon 等人^[8] 推广这种方法到求解任意阶导数, 但他们的方法对边界有附加要求.

本文将从一个新的角度引入磨光思想. 首先引入辅助方程

$$\mathcal{A}f = g,$$

* 收稿日期: 2007-09-24; 修订日期: 2008-03-24

作者简介: 赵振宇(1977—), 男, 河北唐山人, 博士(E-mail: wozitianshanglai@163.com);
贺国强(1946—), 男, 浙江镇海人, 教授(联系人, Tel: + 86-21-66134464; E-mail: gqhe@staff.shu.edu.cn).

通过上述方程我们将搭建起磨光方法与 L - 广义解正则化方法的桥梁. 由于 L - 广义解正则化方法理论已经相当完善, 因此我们能够非常容易地获得理论结果, 并且针对不同的边界情况, 我们可以构造不同的求解算子.

本文安排如下. 第 1 节, 我们将针对数值微分提出一种磨光方法的一般框架, 第 2 节我们将应用一种新的正则化方法——典则奇异值分解方法^[14] 求解第 1 节中引入的问题. 一个具体求解前 3 阶导数的算法将在第 3 节给出. 第 4 节, 我们将给出两个数值例子来验证前面的理论结果及方法的有效性. 一些结论及注记将在第 5 节给出.

1 磨光方法的框架

设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 为 Hilbert 空间, $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 为一无界线性算子, 计算

$$u = Tg, \quad g \in D(T). \quad (2)$$

实际问题中, 我们通常只能得到 g 的近似数据 $g^\delta \in \mathcal{X}$. 一般来说, $g^\delta \notin D(T)$ 且满足

$$\|g^\delta - g\| \leq \delta, \quad (3)$$

其中 δ 为已知误差水平, 上述求值问题是不适定的. 磨光方法的思想就是将问题的求解分为两步:

- 1) 重构一个新的逼近函数 $f^\delta \in D(T)$, 它在某种意义上逼近原函数 g ;
- 2) 计算 $u^\delta = Tf^\delta$.

一个自然的要求就是 $\|u^\delta - Tg\|$ 足够小, 且

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u^\delta - Tg\| = 0.$$

选取 f^δ 的不同方法对应不同的磨光方法. 下面我们基于 L - 广义解正则化方法针对数值微分问题给出一类新的磨光框架.

问题 1.1 给定 $g(x) \in H^n[0, 1]$ 的扰动数据 $g^\delta(x) \in L^2[0, 1] =: \mathcal{X}$. 假设条件(3) 满足, 其中 $\delta > 0$ 已知, 我们希望找到一个函数 $f^\delta(x)$ 逼近 $g(x)$, 使得

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|(f^\delta)^{(j)} - g^{(j)}\| = 0, \quad \forall 0 \leq j \leq n. \quad (4)$$

首先我们引入辅助方程

$$If = g, \quad (5)$$

其中 $I: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 为单位算子. 取 $L = L_n$ 为 n 阶微分算子:

$$(Lf)(x) = (L_n f)(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad f \in D(L), \quad (6)$$

$D(L)$ 待定(可由具体问题给出). 在 $D(L)$ 中引入新的内积:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_* = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle Lf_1, Lf_2 \rangle, \quad f_1, f_2 \in D(L). \quad (7)$$

显然, 装备了新的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ 的空间 $D(L)$ 为一 Hilbert 空间, 记其为 \mathcal{X} , 它是通常的 Sobolev 空间 H^n 的某一子空间. 相应的范数为

$$\|f\|_* = \langle f, f \rangle_*^{1/2}, \quad f \in \mathcal{X}.$$

算子 I 现在也可看作 \mathcal{X} 到 \mathcal{X} 的算子, 为了区别, 记为 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_n$. 我们重写方程(5) 为

$$\mathcal{I}f = g, \quad (8)$$

方程(8) 的扰动方程为

$$\mathcal{I}f = g^\delta. \quad (9)$$

方程(8) 的 Moore-Penrose 广义解恰为方程(5) 的 L - 广义解^[15]. 接下来的一步是应用某种正则

化方法求解方程(9)以获得逼近函数 f^δ . 本文将采用一种改进 TSVD 方法——典则 TSVD 方法来求解方程^[14], 因为它具有很好的理论结果并且对于本文中算子的奇异系是相对容易求出的.

2 cTSVD 的求解方法

我们容易得到如下性质:

1) L_n 的共轭算子 L_n^* 为

$$(L_n^* h)(x) = (-1)^n \frac{d^n h(x)}{dx^n}, \quad \forall h \in D(L_n^*), \quad (10)$$

其中 $D(L_n^*)$ 由 $D(L_n)$ 决定;

2) \mathcal{I}_n 为 \mathcal{B}^* 到 \mathcal{B} 的紧嵌入算子, 且^[15]

$$\|\mathcal{I}_n\| \leq 1; \quad (11)$$

3) $\mathcal{H}_n^* = (I^* I + L_n^* L_n)^{-1} I^*$ ^[3].

下面我们考虑算子 \mathcal{I}_n 的奇异系^[3]. 特征问题 $\mathcal{I}_n^* \mathcal{I}_n \phi = \lambda \phi$ 等价于

$$I^* I \phi = \lambda (I^* I + L_n^* L_n) \phi,$$

重写上述方程为

$$\forall I^* I \phi = L_n^* L_n \phi, \quad (12)$$

其中

$$\gamma = \frac{1-\lambda}{\lambda}. \quad (13)$$

由式(11), $0 < \lambda \leq 1$, 因此 $\gamma \geq 0$. 由式(10), 问题(12)可转化为如下问题

$$\begin{cases} \phi^{(2n)} = (-1)^n \frac{1-\lambda}{\lambda} \phi, \\ \phi \in D(L_n^* L_n). \end{cases} \quad (14)$$

如果 $\lambda \neq 1$, 我们知道方程

$$r^{2n} = (-1)^n \frac{1-\lambda}{\lambda} \quad (15)$$

的根为

$$r_j = \begin{cases} \sqrt[2n]{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \left(\cos \frac{j\pi}{n} + i \sin \frac{j\pi}{n} \right), & j = 0, 1, 2, \dots, 2n-1, \text{ 如果 } n \text{ 为偶数,} \\ \sqrt[2n]{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2j+1)\pi}{2n} \right), & j = 0, 1, 2, \dots, 2n-1, \text{ 如果 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

此时方程(14)的通解为

$$\phi = \sum_{j=1}^{2n} C_j e^{r_j t}. \quad (16)$$

如果 $\lambda = 1$, 方程(15)有一个 $2n$ 重根 0, 方程(14)的通解为

$$\phi = \sum_{j=1}^{2n} C_j t^{j-1}. \quad (17)$$

将式(16)或式(17)代入式(14)中边界条件, 就可以获得算子 $\mathcal{I}_n^* \mathcal{I}_n$ 的特征函数. 假设

$\{\lambda_i; \phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为算子 $\mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_n$ 所有的不同特征对, 排列为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \geq 0$, 那么算子 \mathcal{A}_n 的奇异系 $\{\sigma_i; v_i, u_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可以给出为^[11]

$$\sigma_i = \lambda_i^{1/2}, \quad v_i = \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|_*}, \quad u_i = \sigma_i^{-1} \mathcal{A}_n^* v_i = \sigma_i^{-1} v_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (18)$$

下面我们描述方程(9)的 cTSVD 解^[14].

1) 设 $\sigma_0 = \infty$ 及 $Qy^\delta \neq 0$, 其中 $\delta \geq 0$ 为已知误差水平, Q 是 $\mathcal{R}^n \rightarrow \overline{R(\mathcal{A}_n)}$ 的正交投影算子. 若存在非负整数 m 满足下面条件:

$$\sigma_m > \sigma_{m+1} = \sigma_{m+2} = \dots = \sigma_{m+k} > \sigma_{m+k+1}, \quad (19)$$

$$\sum_{i=m+k+1}^{\infty} \langle g^\delta, u_i \rangle^2 \leq \tau^2 \delta^2 < \sum_{i=m+1}^{\infty} \langle g^\delta, u_i \rangle^2, \quad (20)$$

这里 $\tau > 0$, 那么定义方程(9)的 cTSVD 解如下:

$$f^\delta = f_{m,\xi}^\delta = \sum_{i=1}^m \sigma_i^{-1} \langle g^\delta, u_i \rangle v_i + \xi \sum_{i=m+1}^{m+k} \sigma_i^{-1} \langle g^\delta, u_i \rangle v_i, \quad (21)$$

其中 $\xi = \xi(\delta, y^\delta) > 0$ 由如下残差准则确定:

$$\|\mathcal{A}_n f_{m,\xi}^\delta - Qg^\delta\| = \|f_{m,\xi}^\delta - Qg^\delta\| = \tau\delta. \quad (22)$$

2) 当这样的 m 不存在时, 定义 $f^\delta = 0$.

定理 2.1^[14] 设函数 $g = ((\mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_n)^{\nu} h) \in R((\mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_n)^{\nu})$, $\nu \geq 0$, 其扰动数据 g^δ 满足条件(3), f^δ 为方程(9)的 cTSVD 解, 其中 $\tau > 1$, 那么

$$\sup_{\|g^\delta - g\| \leq \delta} \|f^\delta - g\|_* = o(\delta^{2\nu/(2\nu+1)}), \quad \text{当 } \delta \rightarrow 0. \quad (23)$$

由 Sobolev 空间理论, 我们有如下引理^[6]:

引理 2.2 设 ε_0 是有限正数, 则存在常数 $K = K(\varepsilon_0, m, p)$, 使对任意的 $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, 任意整数 $j, 0 \leq j \leq m-1$, 以及任意的 $f \in W^{m,p}[0, 1]$, 有

$$\|f^{(j)}\|_p \leq K\varepsilon \|f^{(m)}\|_p + K\varepsilon^{j/(m-j)} \|f\|_p. \quad (24)$$

我们可以有如下理论结果:

定理 2.3 设定理 2.1 的条件满足, 则对任意 $0 \leq j \leq n$, 我们有

$$\|(f^\delta)^{(j)} - g^{(j)}\| = o(\delta^{(n(2\nu+1)-j)/(n(2\nu+1))}), \quad \text{当 } \delta \rightarrow 0. \quad (25)$$

证明 因为 $g \in R((\mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_n)^{\nu})$, $\nu \geq 0$, 所以由定理 2.1 可得

$$\|f^\delta - g\|_* = o(\delta^{2\nu/(2\nu+1)}), \quad (26)$$

这表明

$$\|(f^\delta)^{(n)} - g^{(n)}\| = o(\delta^{2\nu/(2\nu+1)}), \quad (27)$$

$j = n$ 的情形得证. 另一方面, 由式(3)及式(22)我们有

$$\|f^\delta - g\| \leq \|f^\delta - g^\delta\| + \|g^\delta - g\| \leq (1 + \tau)\delta. \quad (28)$$

令式(24)中 $p = 2, m = n$ 以及

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta) = \left[\frac{\delta}{\|(f^\delta)^{(n)} - g^{(n)}\|} \right]^{(n-j)/n}, \quad (29)$$

因为当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon \rightarrow 0$, 因此可以应用引理 2.2. 于是由式(24)、式(27)~(29)即可得到结论. \square

作为 $\nu = 0$ 的特殊情况, 我们有如下推论:

推论 2.4 如果 $g \in D(L_n)$, g^δ 满足式(3), f^δ 为方程(9)的 cTSVD 解, 其中 $\tau > 1$, 则对任

意 $0 \leq j \leq n$, 我们有

$$\| (f^\delta)^{(j)} - g^{(j)} \| = o(\delta^{(n-j)/n}), \quad \text{当 } \delta \rightarrow 0. \quad (30)$$

3 求前三阶导数的一个算法

下面我们考虑 $n = 3$ 的情形, 假设 $g(x)$ 满足齐次边界条件:

$$g(0) = g(1) = 0, \quad (31)$$

其它情况可类似讨论. 此时我们可以令

$$D(L_3) = \{ f(x) \mid f \in H^3[0, 1], f(0) = f(1) = 0 \}, \quad (32)$$

因此

$$D(L_3^*) = \{ h(x) \mid h \in H^3[0, 1], h(0) = h(1) = 0, h'(0) = h'(1) = 0 \}. \quad (33)$$

现在特征问题(14)变为

$$\begin{cases} \phi^{(6)}(y) + \lambda \phi(y) = 0, \\ \phi(0) = \phi(1) = 0, \\ \phi^{(2)}(0) = \phi^{(2)}(1) = 0, \\ \phi^{(4)}(0) = \phi^{(4)}(1) = 0, \end{cases} \quad (34)$$

$\lambda = \lambda_1 = 0$ 为式(34)的一个特征值, 相应的特征函数为

$$\phi_1(t) = \frac{t(1-t)}{\sqrt{30}}. \quad (35)$$

对于非零特征值 λ , 令 $\lambda = \beta^6$, 其中 β 为正数. 那么相应的特征函数有如下形式:

$$\phi(t) = C_1 e^{r_1 \beta t} + C_2 e^{r_2 \beta t} + C_3 e^{r_3 \beta t} + C_4 e^{r_4 \beta t} + C_5 e^{r_5 \beta t} + C_6 e^{r_6 \beta t}, \quad (36)$$

其中 C_k 为待定常数, r_k 为方程 $r^6 = -1$ 的根, 可得

$$r_1 = i, \quad r_2 = -i, \quad r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad r_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$r_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad r_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

将式(36)代入式(34)中边界条件, 可导出 $\beta = \beta_j$ 及 $C_k = C_{kj}$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 = 0, \\ -C_1 + C_2 + C_3 - C_4 + C_5 - C_6 = 0, \\ C_1 + C_2 - ir_3 C_3 - ir_4 C_4 - ir_5 C_5 - ir_6 C_6 = 0, \\ C_1 e^{r_1 \beta} + C_2 e^{r_2 \beta} + C_3 e^{r_3 \beta} + C_4 e^{r_4 \beta} + C_5 e^{r_5 \beta} + C_6 e^{r_6 \beta} = 0, \\ -C_1 e^{r_1 \beta} + C_2 e^{r_2 \beta} + C_3 e^{r_3 \beta} - C_4 e^{r_4 \beta} + C_5 e^{r_5 \beta} - C_6 e^{r_6 \beta} = 0, \\ C_1 e^{r_1 \beta} + C_2 e^{r_2 \beta} - ir_3 C_3 e^{r_3 \beta} - ir_4 C_4 e^{r_4 \beta} - ir_5 C_5 e^{r_5 \beta} - ir_6 C_6 e^{r_6 \beta} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

在上述方程中消去 C_k 可得 β 需满足的方程为

$$\begin{aligned} & e^{\sqrt{3}\beta} \sin\left[\beta + \frac{\pi}{3}\right] + e^{-\sqrt{3}\beta} \sin\left[\beta - \frac{\pi}{3}\right] - 2\sin\beta(1 - \cos\beta) - \\ & 2e^{\sqrt{3}\beta/2} \sin\left[\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{3}\right] - 2e^{-\sqrt{3}\beta/2} \sin\left[\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right] = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

因此我们可以得到可列个正值 $0 < \beta_2 < \beta_3 < \dots < \beta_j < \dots$ 相应的特征函数为

$$\begin{aligned} \phi_j(t) = & C_{1j} e^{r_1 \beta_j t} + C_{2j} e^{r_2 \beta_j t} + C_{3j} e^{r_3 \beta_j t} + C_{4j} e^{r_4 \beta_j t} + \\ & C_{5j} e^{r_5 \beta_j t} + C_{6j} e^{r_6 \beta_j t}, \quad j = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\begin{cases} C_{1j} = K_2(e^{r_{6j}^\beta} - e^{r_{4j}^\beta}), & C_{2j} = K_1(e^{r_{5j}^\beta} - e^{r_{3j}^\beta}), \\ C_{3j} = K_1(e^{r_{2j}^\beta} - e^{r_{5j}^\beta}), & C_{4j} = K_2(e^{r_{1j}^\beta} - e^{r_{6j}^\beta}), \\ C_{5j} = K_1(e^{r_{3j}^\beta} - e^{r_{2j}^\beta}), & C_{6j} = K_2(e^{r_{4j}^\beta} - e^{r_{1j}^\beta}) \end{cases} \quad (40)$$

及

$$\begin{cases} K_1 = (-2e^{r_{1j}^\beta} + e^{r_{6j}^\beta} + e^{r_{4j}^\beta}) - \sqrt{3}(e^{r_{4j}^\beta} - e^{r_{6j}^\beta})i \\ K_2 = (-2e^{r_{2j}^\beta} + e^{r_{3j}^\beta} + e^{r_{5j}^\beta}) - \sqrt{3}(e^{r_{5j}^\beta} - e^{r_{3j}^\beta})i. \end{cases} \quad (41)$$

令

$$\begin{aligned} \phi(\beta) &= e^{\sqrt{3}\beta} \sin\left[\beta + \frac{\pi}{3}\right] + e^{-\sqrt{3}\beta} \sin\left[\beta - \frac{\pi}{3}\right] - 2\sin\beta(1 - \cos\beta) - \\ &\quad 2e^{\sqrt{3}\beta/2} \sin\left[\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{3}\right] - 2e^{-\sqrt{3}\beta/2} \sin\left[\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right], \\ \phi_1(\beta) &= \sin\left[\beta + \frac{\pi}{3}\right], \quad \phi_2(\beta) = \frac{e^{\sqrt{3}\beta}\phi_1(\beta) - \phi(\beta)}{e^{\sqrt{3}\beta}}. \end{aligned}$$

图 1 展示了方程 (38) 根的分布情况 (竖线所处的位置为 $(j - 1/3)\pi, j = 2, 3, \dots, 8$). 容易验证

$$\beta_j = \left[j - \frac{1}{3}\right]\pi + o(1), \quad \text{当 } j \rightarrow \infty. \quad (42)$$

由上述讨论, 我们可以给出 \mathcal{S}_3 奇异系如下

$$\begin{cases} \sigma_j = \frac{1}{\sqrt{\beta_j^6 + 1}}, & v_j = \frac{\phi_j(t)}{\|\phi_j(t)\|_*}, \\ u_j = \sigma_j^{-1} v_j = \frac{\phi_j(t)}{\|\phi_j(t)\|}, \\ j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (43)$$

由奇异系我们可给出方程 (9) 相应的 ϵ TSVD 解.

由推论 2.4, 我们有如下理论结果:

定理 3.1 若 $g(x) \in H^3[0, 1]$ 且满足式 (31), g^δ 满足式 (3), f^δ 为方程 (9) 由上述奇异系定义的 ϵ TSVD 解, 其中 $\tau > 1$, 那么 $\delta \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$\|(f^\delta)' - g'\| = o(\delta^{2/3}), \quad \|(f^\delta)'' - g''\| = o(\delta^{1/3}), \quad \|(f^\delta) \ominus g \ominus\| = o(1). \quad (44)$$

4 数值结果

这一节将给出一些例子来检验本文方法的有效性. 所有例子中离散节点取为 $t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; N = 1024, h = 1/N$. 扰动数据按如下方式给出:

$$g^\delta(t_i) = g(t_i) + \varepsilon_i, \quad |\varepsilon_i| < \delta_1,$$

其中 $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^N$ 由 Matlab 函数 $(2 \times \text{rand}(N + 1, 1) - 1) \times \delta_1$ 生成.

计算过程中我们主要要计算如下积分:

$$\langle g^\delta, u_j \rangle = \int_0^1 g^\delta(t) u_j(t) dt.$$

对于较大的 j 而言, 奇异函数 $u_j(t)$ 是高震荡的. 我们采用如下方式处理: 首先我们获得扰动

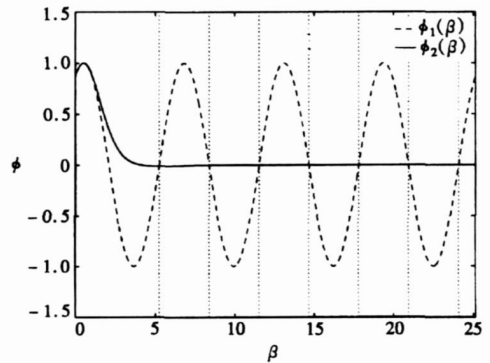


图 1 方程 (38) 根的分布示意图

数据 $g^\delta(t)$ 的 3 次样条插值函数 $s(t)$, 插值边界条件取为 $s''(t_0) = s''(t_N) = 0$. 并令

$$\langle g^\delta, u_j \rangle \approx \int_0^1 s(t) u_j(t) dt,$$

上述右端积分可以精确获得. 由于例子中误差 ε 满足均匀分布, 因此停止准则中取

$$\delta = \sqrt{3} \varepsilon / 3.$$

例 1 此例产生于脉冲函数的指数逼近模型, 右端函数给出为^[3]

$$g(t) = \exp(-40(t - 0.5)^2).$$

计算解逼近性态随误差水平的变化情况在表 1 中给出, 图 2~ 4 展示了计算解与真解之间各阶导数的逼近效果. 所有图形中, 实线代表真解, 虚线代表计算解.

表 1 例 1 数值结果

δ_1	m	ξ	$\frac{\ (f^\delta)' - g'\ }{\ g'\ }$	$\frac{\ (f^\delta)' - g'\ }{\delta^{2/3}}$	$\frac{\ (f^\delta)'' - g''\ }{\ g''\ }$	$\frac{\ (f^\delta)'' - g''\ }{\delta^{1/3}}$	$\frac{\ (f^\delta) \ominus - g \ominus\ }{\ g \ominus\ }$
1E-1	9	0.9867	0.0375	0.7422	0.0529	4.3509	0.0782
1E-2	9	0.9985	0.0059	0.5434	0.0152	2.6862	0.0304
1E-3	11	1.0000	0.0007	0.2800	0.0020	0.7729	0.0054

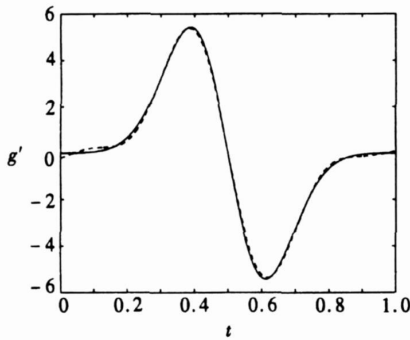


图 2 $g', \delta_1 = 0.1$

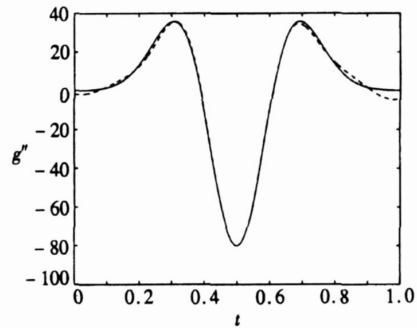


图 3 $g'', \delta_1 = 0.1$

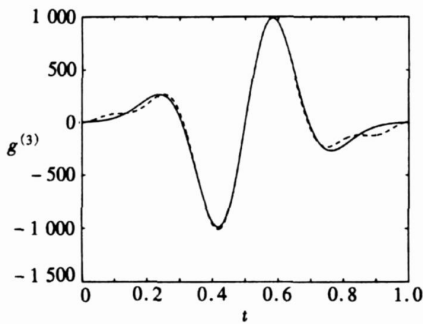


图 4 $g^{(3)}, \delta_1 = 0.1$

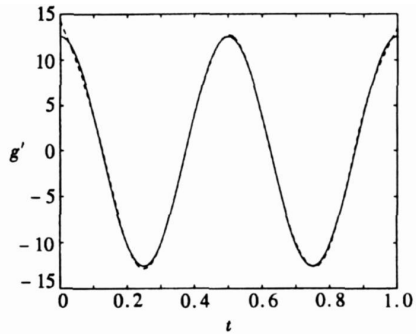


图 5 $g', \delta_1 = 0.1$

例 2 我们再来看 1 个三角函数

$$g(t) = \sin(4\pi t).$$

计算解逼近性态随误差水平的变化情况在表 2 中给出, 图 5~ 7 展示了计算解与真解之间各阶导数的逼近效果.

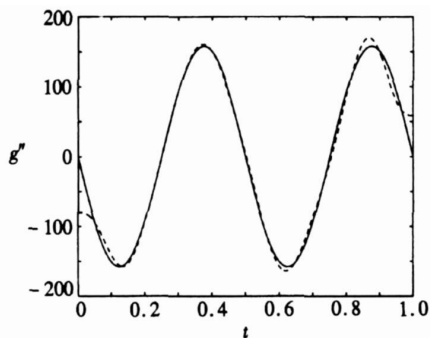


图 6 g'' , $\delta_1 = 0.1$

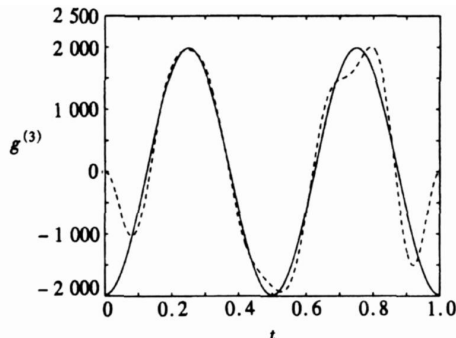


图 7 $g^{(3)}$, $\delta_1 = 0.1$

表 2

例 2 数值结果

δ_1	m	ξ	$\frac{\ (f^\delta)' - g'\ }{\ g'\ }$	$\frac{\ (f^\delta)' - g'\ }{\delta^{2/3}}$	$\frac{\ (f^\delta)'' - g''\ }{\ g''\ }$	$\frac{\ (f^\delta)'' - g''\ }{\delta^{1/3}}$	$\frac{\ (f^\delta) \ominus g \ominus\ }{\ g \ominus\ }$
1E-1	12	0.153 7	0.030 6	1.936 9	0.117 1	34.852 1	0.392 9
1E-2	18	0.422 4	0.008 8	2.572 1	0.061 6	39.481 3	0.318 0
1E-3	36	0.262 1	0.001 7	2.347 2	0.024 6	33.963 1	0.229 9

5 结论及注记

1) 本文中我们针对数值微分问题提出一个新的磨光方法框架, 并给出一个具体的算法. 数值结果显示新方法是十分有效的, 并且数值结果和理论分析相吻合.

2) 因为新的方法是基于 L - 广义解正则化方法的, 因此它的理论结果可以相当容易并完整地给出. 另一方面我们可以应用其他正则化方法来解方程(9), 而正则化参数的选取都可以采用后验策略. 这使得方法具有相当大的灵活性.

3) 以后的研究中我们将进一步指出, 本文的磨光框架可以进一步用来求解多维函数的数值微分乃至一般的无界算子求值问题.

[参 考 文 献]

[1] Gorenflo R, Vessella S. Abel Integral Equations, Analysis and Application, Lecture Notes in Mathematics [M]. Berlin: Springer-verlag, 1991.

[2] Dears S R. Radon Transform and Its Applications [M]. New York: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc, 1983.

[3] Hanke M, Scherzer O. Inverse problems light: numerical differentiation [J]. Amer Math Monthly, 2001, 108(6): 512-521.

[4] Murio D A. The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems [M]. New York A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc, 1993.

[5] Murio D A, Mejia C E, Zhan S. Discrete mollification and automatic numerical differentiation [J]. Compute Math Appl, 1998, 35(5): 1-16.

[6] Heinz W, Hanke M, Neubauer A. Regularization of Inverse Problems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[7] Khan I R, Ohba R. New finite difference formulas for numerical differentiation [J]. J Compu Appl

- Math, 2000, **126**(1/2): 269-276.
- [8] Wang Y B, Hon Y C, Cheng J. Reconstruction of high order derivatives from input data[J]. J Inverse Ill-Posed Probl, 2006, **14**(1): 205-218.
- [9] Wei T, Li M. High order numerical derivatives for one-dimensional scattered noisy data[J]. Appl Math Comput, 2006, **175**(2): 1744-1759.
- [10] Manselli P, Miller K. Calculation of the surface temperature and heat flux on one side of a wall from measurements on the opposite side[J]. Ann Mat Pura Appl, 1980, **123**(4): 161-183.
- [11] Murio D A. Numerical method for inverse transient heat conduction problems[J]. Revista de la Union Mathematic Argentina, 1981, **30**(1): 25-36.
- [12] Hao D N. A mollification method for ill-posed problems[J]. Numer Math, 1994, **68**(4): 469-506.
- [13] Elden L, Berntsson F, Reginska T. Wavelet and Fourier method for solving the sideways heat equation[J]. SIAM J Scient Comp, 2000, **21**(6): 2187-2205.
- [14] He G Q. A TSVD form for ill-posed equations leading to optimal convergence rates[A]. In: ICM 2002, Abstracts of Short Communication and Poster Sessions [C]. Beijing: Higher Edu Press, 2002, 328.
- [15] Locker J, Prenter P M. Regularization with differential operators—I general theory[J]. J Math Anal Appl, 1980, **74**(2): 504-529.
- [16] Adams R A. Sobolev Spaces [M]. Pure and Applied Mathematics. Vol 65. New York-London: Academic Press, 1975.

Reconstruction of High Order Derivatives by New Mollification Methods

ZHAO Zhen-yu^{1,2}, HE Guo-qiang¹

(1. College of Science, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;

2. College of Science, Guangdong Ocean University,

Zhanjiang, Guangdong 524088, P. R. China)

Abstract: The problem of reconstructing numerical derivatives from noisy data is considered. A new framework of mollification methods based on L -generalized solution regularization methods was proposed. A concrete algorithm for the first three derivatives was presented, in which a modification of TSVD (called cTSVD (canonical truncated singular value decomposition)) is chosen as the needed regularization technique. The numerical examples given verify the theoretical results and show the efficiency of the new method.

Key words: ill-posed problem; numerical differentiation; mollification method; L -generalized solution; cTSVD method