应用数学和力学, 第 29 卷 第 5 期
2008 年 5 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 5, May. 15, 2008

文章编号: 1000- 0887(2008) 05- 0618- 13

一类具年龄结构 n 维食物链模型的最优收获控制*

雒志学[1,2], 杜明银[1]

(1. 兰州交通大学 数学系, 兰州 730070;
2. 杭州电子科技大学 理学院, 杭州 310018)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究一类具有年龄结构 n 维食物链模型的最优收获控制. 利用不动点定理, 证明了系统非负解的存在性和唯一性. 由 Mazur 定理, 证明了最优控制策略的存在性, 同时由法锥概念的特征刻画, 还得到了控制问题最优解存在的必要条件.

关 键 词: 食物链; 年龄结构; 最优控制; 最大值原理
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

引 言

具有年龄结构单种群模型的最优收获控制问题被广泛研究[1-7]. 文献[8-10] 讨论了多种群的控制问题, 他们所得的结论中没有考虑年龄因素. Meng 等人[11] 讨论了一类具有扰动脉冲和时滞的年龄阶段捕食- 食饵模型. 他们得到了食饵'绝灭'('根除') 周期解全局吸引的条件和种群永久生存依赖时滞的条件. 据我们所知, 关于相互作用且具年龄结构多种群模型最优控制问题方面的结论还没有. 为了弥补这方面的不足之处, 于是我们研究一类具有年龄结构的 n 种群捕食- 食饵系统的最优收获控制问题.

在文献[12] 中, Chen 和 Guo 研究了如下 Mckendrick 模型最优出生率控制问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial a} = -\mu(a,t)p(a,t), & 0 < a \leqslant a_+;\ t \geqslant 0, \\ p(a,0) = p_0(a), & 0 < a \leqslant a_+, \\ p(0,t) = \beta(t)\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} k(a)h(a)p(a,t)\,\mathrm{d}a, & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{$*$}$$

其中 $p(a,t)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的种群密度, a_+ 为种群所能存活的最大年龄. $\beta(t)$ 为控制变量, 表示 t 时刻种群雌性个体的平均生育力, $k(a)$、$h(a)$ 分别表示种群中雌性个体的比例和生育方式, $[a_1, a_2]$ 表示种群雌性个体生育区间, 且 $\int_{a_1}^{a_2} h(a)\,\mathrm{d}a = 1$. 在模型($*$) 的研究中作

* 收稿日期: 2007- 09-02; 修订日期: 2008-03-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771048)
作者简介: 雒志学(1963—), 男, 甘肃宁县人, 博士, 副教授(联系人. Tel: + 86- 931- 4956559; E- mail: luozhix@263.net).

者利用 Duboviskii- Milyutin 的抽象极值原理, 分别得到了终端自由问题、时间最优问题、无穷时间问题以及具有目标约束集问题的极大值原理.

本文受到文献[12] 的启发, 利用法锥方法研究最优控制问题解的存在性和最优性一阶必要条件. 特别地, 我们的结论推广了文献[7] 的结论.

本文其余的工作组织如下: 在第 1 节, 我们引入基本模型, 并讨论了其适定性; 第 2 节研究了最优控制问题解的存在性; 最后, 推导出了控制问题的最优性条件.

1 基本模型及其适定性

在文献[13] 中, Webb 研究了如下模型(1) 的非平凡平衡解的稳定性问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial l_i}{\partial t}+\dfrac{\partial l_i}{\partial a}=-\left[\mu_{i1}(p_{l_1(\cdot,t)})+\mu_{i2}(p_{l_2(\cdot,t)})\right]l_i(a,t), & i=1,2,\\
l_i(0,t)=\displaystyle\int_0^\infty \beta_i(1-e^{\alpha_i a})l_i(a,t)\,\mathrm{d}a, & i=1,2,\\
l_i(a,0)=\varphi_i(a), \quad i=1,2,\\
p_{l_i(\cdot,t)}=\displaystyle\int_0^\infty l_i(a,t)\,\mathrm{d}a, \quad i=1,2;\ (a,t)\in(0,\infty)\times(0,\infty),
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $l_i(a,t)(i=1,2)$ 分别表示 t 时刻年龄为 a 的第 i 个种群密度; α_1、α_2、β_1、β_2 均为正常数; $\mu_{ij}(i,j=1,2)$ 为 R 到 $(0,\infty)$ 上二阶连续可微的有界函数. 在本文中, 我们考虑具有年龄结构的相互作用多种群控制问题. 为此, 受到文献[13] 建模思想的启发, 我们建立如下刻画具有年龄结构和收获努力度的 n 种群食物链模型.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p_1}{\partial t}+\dfrac{\partial p_1}{\partial a}=f_1(a,t)-\mu_1(a,t)p_1-\lambda_1(a,t)P_2(t)p_1-u_1(a,t)p_1,\\
\dfrac{\partial p_j}{\partial t}+\dfrac{\partial p_j}{\partial a}=f_j(a,t)-\mu_j(a,t)p_j+\lambda_{2j-2}(a,t)P_{j-1}(t)p_j-\\
\qquad \lambda_{2j-1}(a,t)P_{j+1}(t)p_j-u_j(a,t)p_j, \qquad j=2,3,\cdots,n-1,\\
\dfrac{\partial p_n}{\partial t}+\dfrac{\partial p_n}{\partial a}=f_n(a,t)-\mu_n(a,t)p_n+\lambda_{2n-2}(a,t)P_{n-1}(t)p_n-u_n(a,t)p_n,\\
p_i(0,t)=\beta_i(t)\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} m_i(a,t)p_i(a,t)\,\mathrm{d}a,\\
p_i(a,0)=p_{i0}(a),\ P_i(t)=\displaystyle\int_0^{a_+} p_i(a,t)\,\mathrm{d}a, \qquad i=1,2,\cdots,n;\ (a,t)\in Q,
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中 $Q=(0,a_+)\times(0,T)$, $[a_1,a_2]$ 表示生育区间, 其它参数含义如下:

$p_i(a,t)$: t 时刻年龄为 a 的第 i 个种群密度; $\mu_i(a,t)$: 第 i 个种群的个体平均死亡率; $\beta_i(t)$: 第 i 个种群的个体平均出生率; $\lambda_k(a,t)$: 两种群之间相互作用因子$(k=1,2,\cdots,2n-2)$; $m_i(a,t)$: 第 i 个种群中雌性个体的比例; $f_i(a,t)$: 第 i 个种群的输入率; $p_{i0}(a)$: 第 i 个种群的初始年龄分布; a_+: 种群个体的最高寿命, $0<a_+<+\infty$. 这里, 不失一般性, 可假设 n 种群个体有相同的寿命; $u_i(a,t)$: 收获努力度函数, 为模型中控制变量且满足: $u_i\in\mathscr{U}_i:=\left\{h_i\in L^\infty(Q): 0\leqslant\zeta_{i1}(a,t)\leqslant h_i(a,t)\leqslant\zeta_{i2}(a,t).\ \text{a. e.}(a,t)\in Q\right\}$, $\mathscr{U}=\prod_{i=1}^n\mathscr{U}_i$, 其中 $\zeta_{ij}\in L^\infty(Q), j=1,2$.

在本文中, 我们假设:

(A_1) $\mu_i \in L^1_{loc}(Q)$, $\mu_i(a,t) \geqslant 0$, $\int_0^{a_+} \mu_i(a, t+a-a_+)\mathrm{d}a = +\infty$, $(a,t) \in Q$;

(A_2) $0 \leqslant \lambda_k(a,t) \leqslant A_k$, $(a,t) \in Q$, A_k 为常数($k = 1, 2, \cdots, 2n-2$);

(A_3) $0 \leqslant m_i(a,t) \leqslant M_i$, $0 \leqslant f_i(a,t) \leqslant K_i$, $(a,t) \in Q$, M_i、K_i 为常数, 且 $m_i(a,t) \equiv 0$, 当 $a < a_1$ 或 $a > a_2$;

(A_4) $0 \leqslant \beta_0 \leqslant \beta_i(t) \leqslant \beta^0$, $\forall t > 0$, β_0、β^0 为常数;

(A_5) $p_{i0} \in L^\infty(0, a_+)$, $p_{i0}(a) \geqslant 0$, $\forall a \in (0, a_+)$.

对任意固定的 $T > 0$ 和 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in L^2(Q; R^n)$, $v \geqslant 0$, 定义

$$V_i(t) = \int_0^{a_+} v_i(a,t)\mathrm{d}a.$$

考虑系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} + \dfrac{\partial p_1}{\partial a} = f_1(a,t) - \mu_1(a,t)p_1 - \lambda_1(a,t)V_2(t)p_1 - u_1(a,t)p_1, \\ \dfrac{\partial p_j}{\partial t} + \dfrac{\partial p_j}{\partial a} = f_j(a,t) - \mu_j(a,t)p_j + \lambda_{2j-2}(a,t)V_{j-1}(t)p_j - \\ \qquad \lambda_{2j-1}(a,t)V_{j+1}(t)p_j - u_j(a,t)p_j, \qquad j = 2, 3, \cdots, n-1, \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial t} + \dfrac{\partial p_n}{\partial a} = f_n(a,t) - \mu_n(a,t)p_n + \lambda_{2n-2}(a,t)V_{n-1}(t)p_n - u_n(a,t)p_n, \\ p_i(0,t) = \beta_i(t)\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} m_i(a,t)p_i(a,t)\mathrm{d}a, \\ p_i(a,0) = p_{i0}(a), \qquad (a,t) \in Q;\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{3}$$

由文献[7, 14]知, 上述系统(3)有唯一非负解

$$p^v = (p_1^v, p_2^v, \cdots, p_n^v) \in C(0, T; L^2(0, a_+; R^n)) \cap L^\infty(Q; R^n),$$

并且

$$p_i^v(a_+, t) = 0, \qquad \forall t \in [0, T];\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

利用线性系统的比较原理[7], 可得 $p_1^v(a,t) \leqslant p_1(a,t)$, $(a,t) \in Q$, 这里 p_1 是下列系统唯一有界非负解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} + \dfrac{\partial y_1}{\partial a} = f_1(a,t) - \mu_1(a,t)y_1, \\ y_1(0,t) = \beta_1(t)\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} m_1(a,t)y_1(a,t)\mathrm{d}a, \\ y_1(a,0) = p_{10}(a), \qquad (a,t) \in Q. \end{cases}$$

类似地, 如果 $v_{k-1}(a,t) \leqslant p_{k-1}(a,t)$, $\forall (a,t) \in Q$, 则 $p_k^v(a,t) \leqslant p_k(a,t)$, $(a,t) \in Q$, 其中 $p_k(k = 2, 3, \cdots, n)$ 是下列系统的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_k}{\partial t} + \dfrac{\partial y_k}{\partial a} = f_k(a,t) - \mu_k(a,t)y_k + \lambda_{2k-2}(a,t)y_k\displaystyle\int_0^{a_+} p_{k-1}(a,t)\mathrm{d}a, \\ y_k(0,t) = \beta_k(t)\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} m_k(a,t)y_k(a,t)\mathrm{d}a, \\ y_k(a,0) = p_{k0}(a), \qquad k = 2, 3, \cdots, n;\ (a,t) \in Q. \end{cases}$$

对任意 $v^k = (v_1^k, v_2^k, \cdots, v_n^k) \in L^2(Q; R^n)$, $0 \leqslant v_i^k \leqslant p_i$, 记相应的状态为 $p^k = (p_1^k, p_2^k, \cdots, p_n^k)$ (k

$= 1, 2), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) := p^1 - p^2$. 由系统(3)可得

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial a} = -(\mu_1 + u_1)x_1 - \lambda_1 V_2^1(t)x_1 - [V_2^1(t) - V_2^2(t)]\lambda_1 p_1^2,\\
&\frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial a} = -(\mu_j + u_j)x_j + \lambda_{2j-2}V_{j-1}^1(t)x_j - \lambda_{2j-1}V_{j+1}^1(t)x_j +\\
&\qquad [V_{j-1}^1(t) - V_{j-1}^2(t)]\lambda_{2j-2}p_j^2 - [V_{j+1}^1(t) - V_{j+1}^2(t)]\lambda_{2j-1}p_j^2,\\
&\qquad\qquad j = 2, 3, \cdots, n-1,\\
&\frac{\partial x_n}{\partial t} + \frac{\partial x_n}{\partial a} = -(\mu_n + u_n)x_n + \lambda_{2n-2}V_{n-1}^1(t)x_n +\\
&\qquad [V_{n-1}^1(t) - V_{n-1}^2(t)]\lambda_{2n-2}p_n^2,\\
&x_i(0, t) = \beta_i(t)\int_{a_1}^{a_2} m_i(a, t)x_i(a, t)\,\mathrm{d}a,\\
&x_i(a, 0) = 0,\\
&V_i^k(t) = \int_0^{a_+} v_i^k(a, t)\,\mathrm{d}a, \qquad k = 1, 2; i = 1, 2, \cdots, n; (a, t) \in Q.
\end{aligned}
\right.
\tag{4}
$$

将系统$(4)_i$(即系统(4)中的第i个等式)两边乘以x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 并在$(0, a_+) \times (0, t)$上积分能够导出

$$\| x_1(\cdot, t) \|^2 \leqslant c\int_0^t \| v_2^1(\cdot, s) - v_2^2(\cdot, s) \|^2 \mathrm{d}s, \tag{5}$$

$$\| x_j(\cdot, t) \|^2 \leqslant c\int_0^t \left\{ \| v_{j-1}^1(\cdot, s) - v_{j-1}^2(\cdot, s) \|^2 + \| v_{j+1}^1(\cdot, s) - v_{j+1}^2(\cdot, s) \|^2 \right\} \mathrm{d}s, \qquad j = 2, 3, \cdots, n-1 \tag{6}$$

和

$$\| x_n(\cdot, t) \|^2 \leqslant c\int_0^t \| v_{n-1}^1(\cdot, s) - v_{n-1}^2(\cdot, s) \|^2 \mathrm{d}s, \tag{7}$$

其中c是一个与$v^k (k = 1, 2)$无关的常数, $\| \cdot \|$是空间$L^2(0, a_+)$中的通常范数.

考虑闭集

$$I := \left\{ v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in L^2(Q; R^n) : 0 \leqslant v_i(a, t) \leqslant p_i(a, t), \forall (a, t) \in Q \right\}.$$

定义映射$G: I \to I$,

$$(Gv)(a, t) = p^v(a, t), \qquad \forall (a, t) \in Q,$$

以及一个等价范数$\| v \|_* = \left\{ \sum_{i=1}^n \| v_i \|_*^2 \right\}^{1/2}$,

$$\| v_i \|_*^2 = \int_0^T \| v_i(\cdot, t) \|^2 \mathrm{e}^{-4ct}\mathrm{d}t, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

利用式(5)~(7), 不难得到

$$
\begin{aligned}
\| Gv^1 - Gv^2 \|_* &= \| p^1 - p^2 \|_* = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^T \| x_i(\cdot, t) \|^2 \exp(-4ct)\mathrm{d}t \right\}^{1/2} \leqslant \\
&\left\{ \int_0^T\int_0^t c[\| v_1^1(\cdot, s) - v_1^2(\cdot, s) \|^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} \| v_i^1(\cdot, s) - v_i^2(\cdot, s) \|^2 + \right.\\
&\left. \| v_n^1(\cdot, s) - v_n^2(\cdot, s) \|^2] \exp(-4ct)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \right\}^{1/2} \leqslant
\end{aligned}
$$

$$\left\{\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n\|v_i^1(\cdot,s)-v_i^2(\cdot,s)\|^2\right)\int_s^T 2c\exp(-4ct)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right\}^{1/2}\leqslant$$
$$\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\left(\sum_{i=1}^n\|v_i^1(\cdot,s)-v_i^2(\cdot,s)\|^2\right)\exp(-4cs)\,\mathrm{d}s\right\}^{1/2}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|v^1-v^2\|_*.$$

因此, G 是完备空间$(I,\|\cdot\|_*)$ 上的压缩映射, 于是存在唯一不动点 v^*, 它就是系统(2) 的解.

下面, 我们证明系统(2) 的解关于 u 的连续性.

设 $u^k=(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_n^k)\in\mathscr{U}$, $k=1,2$; $x_i(a,t)=p_i^{u^1}(a,t)-p_i^{u^2}(a,t)$. 由系统(2) 可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1}{\partial t}+\dfrac{\partial x_1}{\partial a}=-(\mu_1+u_1^1)x_1-p_1^{u^2}(u_1^1-u_1^2)-\\ \qquad\lambda_1\left[x_1\displaystyle\int_0^{a_+}p_2^{u^1}(a,t)\,\mathrm{d}a+p_1^{u^2}\int_0^{a_+}x_2(a,t)\,\mathrm{d}a\right],\\ \dfrac{\partial x_j}{\partial t}+\dfrac{\partial x_j}{\partial a}=-(\mu_j+u_j^1)x_j-p_j^{u^2}(u_j^1-u_j^2)+\\ \qquad\lambda_{2j-2}\left[x_j\displaystyle\int_0^{a_+}p_{j-1}^{u^1}(a,t)\,\mathrm{d}a+p_j^{u^2}\int_0^{a_+}x_{j-1}(a,t)\,\mathrm{d}a\right]-\\ \qquad\lambda_{2j-1}\left[x_j\displaystyle\int_0^{a_+}p_{j+1}^{u^1}(a,t)\,\mathrm{d}a+p_j^{u^2}\int_0^{a_+}x_{j+1}(a,t)\,\mathrm{d}a\right],\\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t}+\dfrac{\partial x_n}{\partial a}=-(\mu_n+u_n^1)x_n-p_n^{u^2}(u_n^1-u_n^2)+\\ \qquad\lambda_{2n-2}\left[x_n\displaystyle\int_0^{a_+}p_{n-1}^{u^1}(a,t)\,\mathrm{d}a+p_n^{u^2}\int_0^{a_+}x_{n-1}(a,t)\,\mathrm{d}a\right],\\ x_i(0,t)=\beta_i(t)\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}m_i(a,t)x_i(a,t)\,\mathrm{d}a,\\ x_i(a,0)=0,\qquad (a,t)\in Q;\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{8}$$

类似于推导式(5)~(7) 的方法, 可推得

$$\|x_1(\cdot,s)\|^2\leqslant c_1\left\{\int_0^t\|x_1(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|x_2(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\int_0^t\|u_1^1(\cdot,s)-u_1^2(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\right\},\tag{9}$$
$$\|x_j(\cdot,s)\|^2\leqslant c_j\left\{\int_0^t\|x_{j-1}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|x_j(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|x_{j+1}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\int_0^t\|u_j^1(\cdot,s)-u_j^2(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\right\},\qquad j=2,3,\cdots,n-1,\tag{10}$$
$$\|x_n(\cdot,s)\|^2\leqslant c_n\left\{\int_0^t\|x_{n-1}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|x_n(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\int_0^t\|u_n^1(\cdot,s)-u_n^2(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\right\},\tag{11}$$

其中 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是不依赖于 u^k 的常数.

由不等式(9)~(11), 并利用 Gronwall 不等式得

$$\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_0^{a_+}x_i^2(a,s)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}s\leqslant K\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_0^{a_+}[u_i^1(a,s)-u_i^2(a,s)]^2\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}s,\tag{12}$$

其中 K 是一个不依赖 $u_i^k(k=1,2)$ 的常数. 由不等式(12) 可推出 p^u 关于 u 连续.

因此, 有下述结论成立.

定理 1.1 对任意给定的 $u\in\mathscr{U}$, 系统(2) 存在唯一解 p^u, 满足

(i) $p^u\in C(0,T;L^2(0,a_+))$;

(ii) $0\leqslant p_i^u(a,t)\leqslant p_i(a,t),\qquad \forall(a,t)\in Q;\ i=1,2,\cdots,n$;

(iii) p^u 连续依赖于 u.

2 最优控制的存在性

考虑下面控制问题:

$$\max\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^{a_+} g_i(a,t)u_i(a,t)p_i^u(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t, \tag{13}$$

这里 $u\in\mathscr{U}$, $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 满足系统(2), 非负函数 $g_i(a,t)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的第 i 种群个体的重量, $g_i\in L^1(Q)$, $g_i(a,t)>0$, $\forall(a,t)\in Q$.

积分

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^{a_+} g_i(a,t)u_i(a,t)p_i^u(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t$$

表示在时间区间 $[0,T]$ 上收获种群的总重量.

本节我们将讨论最优控制问题(13) 解的存在性.

定理 2.1 若条件(A_1)~(A_5) 成立, 则最优控制问题(13) 至少存在一个解.

证明 设

$$J(u)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^{a_+} g_i(a,t)u_i(a,t)p_i^u(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\qquad u\in\mathscr{U}$$

及

$$d=\sup_{u\in\mathscr{U}}J(u).$$

由定理 1.1 知,

$$0\leqslant J(u)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^{a_+}\|\zeta_{i2}\|_{L^\infty(Q)}g_i(a,t)p_i(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t.$$

因此有 $d\in[0,\infty)$. 取控制列 $\{u^n\}_{n\in N}\subset\mathscr{U}$ 使得

$$d-\frac{1}{n}\leqslant J(u^n)\leqslant d. \tag{14}$$

同理, 由定理 1.1 可得

$$0\leqslant p_i^{u^n}(a,t)\leqslant p_i(a,t)\qquad \text{a.e. 在 } Q \text{ 中},$$

于是存在 $\{p_i^{u^n}\}$ 的子列, 我们仍记为 $\{p_i^{u^n}\}$, 使得

$$p_i^{u^n}\ \text{在} L^2(Q) \text{中弱收敛于}\ p_i^*,$$

即

$$p^{u^n}\ \text{在} L^2(Q;R^n) \text{中弱收敛于}\ p^*.$$

由 Mazur 定理及其推论[15], 我们得到序列 $\{(p_1^n,p_2^n,\cdots,p_n^n)\}$ 满足

$$p_i^n=\sum_{j=n+1}^{k_n}\lambda_j^n p_i^{u^j},\qquad \lambda_j^n\geqslant 0,\ \sum_{j=n+1}^{k_n}\lambda_j^n=1, \tag{15}$$

$k_n \geqslant n+1$, 且有

$$p_i^n \text{ 在} L^2(Q) \text{ 中收敛于 } p_i^* . \tag{16}$$

因此有

$$p^n \text{ 在} L^2(Q; R^n) \text{ 中收敛于 } p^* . \tag{17}$$

设 $P_i^u(t) = \int_0^{a_+} p_i^u(a, t)\mathrm{d}a$, $t \in (0, T)$, $u \in \mathscr{U}$, $P^u = (P_1^u, P_2^u, \cdots, P_n^u)$. 由文献[7] 中的引理 5. 1. 1, 存在序列$\{u^n\}$的一个子列, 仍记为$\{u^n\}$, 使得

$$\begin{cases} \text{在空间 } L^2(0, T; R^n) \text{ 中}, \quad P^{u^n} \to P^*, \\ \text{对}(0, T) \text{ 中几乎所有 } t, \quad P^{u^n}(t) \to P^*(t), \end{cases} \tag{18}$$

设控制序列 $(u_1^n, u_2^n, \cdots, u_n^n)$ 定义如下:

$$u_i^n(a, t) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_i^{u^j}(a, t) u_i^j(a, t)}{\sum\limits_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_i^{u^j}(a, t)}, & \text{如果} \sum\limits_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_i^{u^j}(a, t) \neq 0, \\ \zeta_{i1}(a, t), & \text{如果} \sum\limits_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_i^{u^j}(a, t) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

于是容易得到

$$p_i^n = p_i^{u^n}. \tag{20}$$

易证明: $(u_1^n, u_2^n, \cdots, u_n^n) \in \mathscr{U}$. 由 $p_i^{u^n}$ 在$L^2(Q)$ 中弱收敛于 p_i^* 可知,

$$\int_0^{a_+} p_i^{u^n}(a, \cdot)\mathrm{d}a \text{ 在} L^2(0, T) \text{ 中弱收敛于} \int_0^{a_+} p_i^*(a, \cdot)\mathrm{d}a .$$

从而由式(18) 知

$$P_i^*(t) = \int_0^{a_+} p_i^*(a, t)\mathrm{d}a,$$

再利用空间 $L^2(Q; R^n)$ 中有界序列的弱紧性可以得出: 存在序列$\{(u_1^n, u_2^n, \cdots, u_n^n)\}$的子序列(仍记为$\{(u_1^n, u_2^n, \cdots, u_n^n)\}$ 使得

$$u_i^n \text{ 在} L^2(Q) \text{ 中若收敛于 } u_i^*,$$

即

$$u^n \text{ 在} L^2(Q; R^n) \text{ 中若收敛于 } u^* .$$

显然有 $(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*) \in \mathscr{U}$, 且$p^n = (p_1^n, p_2^n, \cdots, p_n^n)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1^n}{\partial t} + \dfrac{\partial p_1^n}{\partial a} = f_1(a, t) - [\mu_1(a, t) + u_1^n(a, t)]p_1^n - \lambda_1(a, t)\sum\limits_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n P_2^{u^j}(t) p_1^{u^j}, \\ \dfrac{\partial p_k^n}{\partial t} + \dfrac{\partial p_k^n}{\partial a} = f_k(a, t) - [\mu_k(a, t) + u_k^n(a, t)]p_k^n + \lambda_{2k-2}(a, t)\sum\limits_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n P_{k-1}^{u^j}(t) p_k^{u^j} - \\ \qquad \lambda_{2k-1}(a, t)\sum\limits_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n P_{k+1}^{u^j}(t) p_k^{u^j}, \qquad k = 2, 3, \cdots, n-1, \end{cases} \tag{21a}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p_n^n}{\partial t} + \dfrac{\partial p_n^n}{\partial a} = f_n(a,t) - [\mu_n(a,t) + u_n^n(a,t)] p_n^n + \\
\qquad \lambda_{2n-2}(a,t) \displaystyle\sum_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n P_{n-1}^{u^j}(t) p_n^{u^j}, \\
p_i^n(0,t) = \beta_i(t) \displaystyle\int_{a_1}^{a_2} m_i(a,t) p_i^n(a,t)\,\mathrm{d}a, \\
p_i^n(a,0) = p_{i0}(a), \\
P_i^{u^j}(t) = \displaystyle\int_0^{a_+} p_i^{u^j}(a,t)\,\mathrm{d}a, \qquad i = 1,2,\cdots,n;\ (a,t) \in Q.
\end{cases}
\tag{21b}
$$

由式(16)和(18)可推得

$$\sum_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_1^{u^j}(a,t) P_2^{u^j}(t) \to p_1^*(a,t) P_2^*(t), \qquad \text{a.e. } Q,$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_k^{u^j}(a,t) P_{k-1}^{u^j}(t) \to p_k^*(a,t) P_{k-1}^*(t), \qquad k = 2,3,\cdots,n-1;\ \text{a.e. } Q,$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_k^{u^j}(a,t) P_{k+1}^{u^j}(t) \to p_k^*(a,t) P_{k+1}^*(t), \qquad k = 2,3,\cdots,n-1;\ \text{a.e. } Q,$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n p_n^{u^j}(a,t) P_{n-1}^{u^j}(t) \to p_n^*(a,t) P_{n-1}^*(t), \qquad \text{a.e. } Q.$$

通过对式(21)式取极限, 同文献[7], 我们可得 $(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_n^*)$ 是系统(2) 对应于 $u := u^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$ 的解, 即 $p^* = p^{u^*}$.

由于 $J(u^n) \to d$, 因此由式(15)、(19)、(20)得

$$J(u^n) = \sum_{j=n+1}^{k_n} \lambda_j^n J(u^n) \to d, \qquad \text{当 } n \to \infty.$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
J(u^n) = &\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_0^{a_+} (g_i u_i^n p_i^{u^n})(a,t)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t = \\
&\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_0^{a_+} (g_i u_i^n p_i^n)(a,t)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t \to \\
&\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \int_0^{a_+} (g_i u_i^* p_i^{u^*})(a,t)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t = \\
&J(u^*) \qquad (\text{当 } n \to \infty).
\end{aligned}
$$

因此, $J(u^*) = d = \sup\limits_{u \in \mathscr{U}} J(u)$. 定理证毕.

3　极大值原理

在讨论主要结论之前, 首先证明下列有用引理.

引理 3.1　设 (u^*, p^{u^*}) 是最优控制问题(13) 的最优对, 对任意 $\varepsilon > 0$, 且足够小, 对任意 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in L^\infty(Q; R^n)$ $(v_i > 0)$, 有 $u^* + \varepsilon v \in \mathscr{U}$, 则在 $L^\infty(Q; R^n)$ 中有下列极限成立:

$$\frac{1}{\varepsilon}(p^{u^* + \varepsilon v} - p^{u^*}) \to z, \qquad \text{当 } \varepsilon \to 0^+,$$

其中

$$p^{u^*} = (p_1^{u^*}, p_2^{u^*}, \cdots, p_n^{u^*}), \quad u^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*), z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

是下列系统的解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} + \dfrac{\partial z_1}{\partial a} = -\mu_1 z_1 - u_1^* z_1 - v_1 p_1^{u^*} - \lambda_1 [p_1^{u^*} Z_2(t) + P_2^{u^*}(t) z_1], \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial t} + \dfrac{\partial z_j}{\partial a} = -\mu_j z_j - u_j^* z_j - v_j p_j^{u^*} + \lambda_{2j-2}[p_j^{u^*} Z_{j-1}(t) + P_{j-1}^{u^*}(t) z_j] - \\ \qquad \lambda_{2j-1}[p_j^{u^*} Z_{j+1}(t) + P_{j+1}^{u^*}(t) z_j], \qquad j = 2, 3, \cdots, n-1, \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial t} + \dfrac{\partial z_n}{\partial a} = -\mu_n z_n - u_n^* z_n - v_n p_n^{u^*} + \lambda_{2n-2}[p_n^{u^*} Z_{n-1}(t) + P_{n-1}^{u^*}(t) z_n], \\ z_i(0, t) = \beta_i(t) \int_{a_1}^{a_2} m_i(a, t) z_i(a, t) \mathrm{d}a, \\ z_i(a, 0) = 0, \\ P_i^{u^*}(t) = \int_0^{a_+} p_i^{u^*}(a, t) \mathrm{d}a, \\ Z_i(t) = \int_0^{a_+} z_i(a, t) \mathrm{d}a, \qquad i = 1, 2, \cdots, n; \ (a, t) \in Q. \end{cases} \tag{22}$$

证明　系统(22)解的存在唯一性可由定理 1.1 证得.

令

$$z_\varepsilon(a, t) = \frac{1}{\varepsilon}[p^{u^* + \varepsilon v}(a, t) - p^{u^*}(a, t)], \qquad (a, t) \in Q.$$

显然 z_ε 是下列方程的解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_{1\varepsilon}}{\partial t} + \dfrac{\partial z_{1\varepsilon}}{\partial a} = -\mu_1 z_{1\varepsilon} - u_1^* z_{1\varepsilon} - v_1 p_1^{u^* + \varepsilon v} - \lambda_1 [p_1^{u^* + \varepsilon v} Z_{2\varepsilon}(t) + P_2^{u^*}(t) z_{1\varepsilon}], \\ \dfrac{\partial z_{j\varepsilon}}{\partial t} + \dfrac{\partial z_{j\varepsilon}}{\partial a} = -\mu_j z_{j\varepsilon} - u_j^* z_{j\varepsilon} - v_j p_j^{u^* + \varepsilon v} + \\ \qquad \lambda_{2j-2}[p_j^{u^* + \varepsilon v} Z_{(j-1)\varepsilon}(t) + P_{j-1}^{u^*}(t) z_{j\varepsilon}] - \\ \qquad \lambda_{2j-1}[p_j^{u^* + \varepsilon v} Z_{(j+1)\varepsilon}(t) + P_{j+1}^{u^*}(t) z_{j\varepsilon}], \qquad j = 2, 3, \cdots, n-1, \\ \dfrac{\partial z_{n\varepsilon}}{\partial t} + \dfrac{\partial z_{n\varepsilon}}{\partial a} = -\mu_n z_{n\varepsilon} - u_n^* z_{n\varepsilon} - v_n p_n^{u^* + \varepsilon v} + \\ \qquad \lambda_{2n-2}[p_n^{u^* + \varepsilon v} Z_{(n-1)\varepsilon}(t) + P_{n-1}^{u^*}(t) z_{n\varepsilon}], \\ z_{i\varepsilon}(0, t) = \beta_i(t) \int_{a_1}^{a_2} m_i(a, t) z_{i\varepsilon}(a, t) \mathrm{d}a, \\ z_{i\varepsilon}(a, 0) = 0, \\ Z_{i\varepsilon}(t) = \int_0^{a_+} z_{i\varepsilon}(a, t) \mathrm{d}a, \qquad i = 1, 2, \cdots, n; \ (a, t) \in Q. \end{cases} \tag{23}$$

定义

$$w_\varepsilon = \varepsilon z_\varepsilon,$$

于是易知 w_ε 是下列方程的解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_{1\varepsilon}}{\partial t}+\dfrac{\partial w_{1\varepsilon}}{\partial a}=-\mu_1 w_{1\varepsilon}-u_1^* w_{1\varepsilon}-\varepsilon v_1 p_1^{u^*+\varepsilon v}- \\ \qquad \lambda_1[p_1^{u^*+\varepsilon v}W_{2\varepsilon}(t)+P_2^{u^*}(t)w_{1\varepsilon}], \\ \dfrac{\partial w_{j\varepsilon}}{\partial t}+\dfrac{\partial w_{j\varepsilon}}{\partial a}=-\mu_j w_{j\varepsilon}-u_j^* w_{j\varepsilon}-\varepsilon v_j p_j^{u^*+\varepsilon v}+ \\ \qquad \lambda_{2j-2}[p_j^{u^*+\varepsilon v}W_{(j-1)\varepsilon}(t)+P_{j-1}^{u^*}(t)w_{j\varepsilon}]- \\ \qquad \lambda_{2j-1}[p_j^{u^*+\varepsilon v}W_{(j+1)\varepsilon}(t)+P_{j+1}^{u^*}(t)w_{j\varepsilon}], \qquad j=2,3,\cdots,n-1, \\ \dfrac{\partial w_{n\varepsilon}}{\partial t}+\dfrac{\partial w_{n\varepsilon}}{\partial a}=-\mu_n w_{n\varepsilon}-u_n^* w_{n\varepsilon}-\varepsilon v_n p_n^{u^*+\varepsilon v}+ \\ \qquad \lambda_{2n-2}[p_n^{u^*+\varepsilon v}W_{(n-1)\varepsilon}(t)+P_{n-1}^{u^*}(t)w_{n\varepsilon}], \\ w_{i\varepsilon}(0,t)=\beta_i(t)\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} m_i(a,t)w_{i\varepsilon}(a,t)\mathrm{d}a, \\ w_{i\varepsilon}(a,0)=0, \\ W_{i\varepsilon}(t)=\displaystyle\int_0^{a_+} w_{i\varepsilon}(a,t)\mathrm{d}a, \qquad i=1,2,\cdots,n;\ (a,t)\in Q. \end{cases} \tag{24}$$

将系统 $(24)_i$ 两边乘以 $w_{i\varepsilon}$, $i=1,2,\cdots,n$, 并且在 $(0,a_+)\times(0,t)$ 积分可推得

$$\|w_{1\varepsilon}(\cdot,t)\|^2 \leqslant c_1\left\{\int_0^t \|w_{1\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t \|w_{2\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+ \varepsilon\int_0^t \|v_1(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\right\}, \tag{25}$$

$$\|w_{k\varepsilon}(\cdot,t)\|^2 \leqslant c_k\left\{\int_0^t \|w_{(k-1)\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t \|w_{k\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+ \int_0^t \|w_{(k+1)\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\varepsilon\int_0^t \|v_k(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\right\}, \qquad k=2,3,\cdots,n-1 \tag{26}$$

及

$$\|w_{n\varepsilon}(\cdot,t)\|^2 \leqslant c_n\left\{\int_0^t \|w_{(n-1)\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t \|w_{n\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+ \varepsilon\int_0^t \|v_n(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\right\}, \tag{27}$$

其中 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是不依赖于 v 的常量.

对 3 个不等式(25)~(27)相加得,

$$\sum_{i=1}^n \|w_{i\varepsilon}(\cdot,t)\|^2 \leqslant c_{n+1}\left\{\sum_{i=1}^n\int_0^t \|w_{i\varepsilon}(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int_0^t \|v_i(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\right\}.$$

由 Gronwall 不等式得

$$\sum_{i=1}^n \|w_{i\varepsilon}(\cdot,t)\|^2 \leqslant \varepsilon c\sum_{i=1}^n\int_0^t \|v_i(\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s,$$

其中 c 是不依赖于 v 的常数, 于是在空间 $L^\infty(Q;R^n)$ 中, $w_\varepsilon\to 0$(当 $\varepsilon\to 0^+$). 采用上述同样的方法及当 $w_\varepsilon\to 0$, 容易推出

$$\text{在 } L^\infty(Q;R^n) \text{ 中}, \qquad z_\varepsilon \to z \text{ 当 } \varepsilon\to 0^+,$$

其中 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是系统(22)的解. 于是本定理证毕.

现考虑控制问题的最优性条件, 下列结论成立.

定理 3. 1　设条件$(A_1)\sim(A_5)$成立, 如果(u^*, p^{u^*})是控制问题(13) 的最优对, q 是下列方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial q_1}{\partial t}+\dfrac{\partial q_1}{\partial a}=[\mu_1+u_1^*+\lambda_1 P_2^{u^*}(t)]q_1-\beta_1(t)m_1(a,t)q_1(0,t)+\\
\qquad g_1u_1^*-\displaystyle\int_0^{a_+}(\lambda_2 p_2^{u^*}q_2)(a,t)\mathrm{d}a,\\
\dfrac{\partial q_j}{\partial t}+\dfrac{\partial q_j}{\partial a}=[\mu_j+u_j^*-\lambda_{2j-2}P_{j-1}^{u^*}(t)+\lambda_{2j-1}P_{j+1}^{u^*}(t)]q_j-\\
\qquad \beta_j(t)m_j(a,t)q_j(0,t)+g_ju_j^*+\displaystyle\int_0^{a_+}(\lambda_{2j-3}p_{j-1}^{u^*}q_{j-1}-\\
\qquad \lambda_{2j}p_{j+1}^{u^*}q_{j+1})(a,t)\mathrm{d}a,\qquad j=2,3,\cdots,n-1,\\
\dfrac{\partial q_n}{\partial t}+\dfrac{\partial q_n}{\partial a}=[\mu_n+u_n^*-\lambda_{2n-2}P_{n-1}^{u^*}(t)]q_n-\beta_n(t)m_n(a,t)q_n(0,t)+\\
\qquad g_nu_n^*+\displaystyle\int_0^{a_+}(\lambda_{2n-3}p_{n-1}^{u^*}q_{n-1})(a,t)\mathrm{d}a,\\
q_i(a,T)=q_i(a_+,t)=0,\qquad i=1,2,\cdots,n;\ (a,t)\in Q
\end{cases}
\tag{28}
$$

的解, 则有

$$
u_i^*(a,t)=\begin{cases}\zeta_{i1}(a,t), & \text{当 } q_i(a,t)<-1,\\ \zeta_{i2}(a,t), & \text{当 } q_i(a,t)>-1.\end{cases}\tag{29}
$$

证明　系统(28) 的解 q 存在唯一性可由定理1. 1 推得. 用$\mathcal{N}_{\mathcal{U}_i}(u_i^*)$表示$\mathcal{U}_i$在$u_i^*$处的法锥(在$L^\infty(Q)$中).

对任意 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in L^\infty(Q;R^n)$, 且$u^*+\varepsilon v\in\mathcal{U}$, 对充分小 $\varepsilon>0$, 由于u^*是最优控制问题(13) 的解, 从而有

$$
\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^{a_+}g_i(a,t)u_i^*p_i^{u^*}\mathrm{d}a\mathrm{d}t\geqslant\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^{a_+}g_i(a,t)(u_i^*+\varepsilon v_i)p_i^{u^*+\varepsilon v}\mathrm{d}a\mathrm{d}t.
$$

因此有

$$
\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^{a_+}g_i(a,t)\left(u_i^*\frac{p_i^{u^*+\varepsilon v}-p_i^{u^*}}{\varepsilon}+v_ip_i^{u^*+\varepsilon v}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}t\leqslant 0.\tag{30}
$$

由定理1. 1 立即可推出: 在$L^\infty(Q)$中有$p_i^{u^*+\varepsilon v}\to p_i^{u^*}\ (\varepsilon\to 0^+)$. 对式(30) 取极限, 并由引理3. 1, 我们得

$$
\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^{a_+}g_i(a,t)(u_iz_i+v_ip_i^{u^*})\mathrm{d}a\mathrm{d}t\leqslant 0,\tag{31}
$$

对系统$(28)_i$两边乘以z_i, 并在 Q 上积分得

$$
\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^{a_+}(g_iz_iu_i^*)(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^{a^+}(g_iq_iv_ip_i^{u^*})(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t.\tag{32}
$$

利用式(31) 和(32) 易得

$$
\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^{u_+}[(1+q_i)g_ip_i^{u^*}v_i](a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t\leqslant 0,\tag{33}
$$

即

$$
(1+q_i)g_ip_i^{u^*}\in\mathcal{N}_{\mathcal{U}_i}(u_i^*),
$$

于是可推得

$$u_i^*(a,t)=\begin{cases}\zeta_{i1}(a,t), & 当\ g_i(a,t)[1+q_i(a,t)]p_i^{u^*}(a,t)<0,\\ \zeta_{i2}(a,t), & 当\ g_i(a,t)[1+q_i(a,t)]p_i^{u^*}(a,t)>0.\end{cases}$$

由于 $g_i(a,t)>0$ 几乎确定 $(a,t)\in Q$, 并注意到定理 1.1, 立即可推得 $p_i^{u^*}(a,t)>0$ 几乎确定 $(a,t)\in Q$. 因此式(29)成立. 定理证毕.

4 讨　论

Meng 等人[11]讨论了一类具有扰动脉冲和时滞的年龄阶段的捕食- 食饵模型. 他们得到了食饵'绝灭'('根除')周期解全局吸引的条件和种群永久生存依赖时滞的条件. 在文献[12]中, Chen 和 Guo 研究了 Mckendrick 模型(*)单种群最优出生率控制问题. $\beta(t)$ 为控制变量, 表示种群雌性个体的平均生育力. 在模型(*)的研究中, 作者利用了 Duboviskii- Milyutin 的抽象极值原理, 分别得到了终端自由问题、时间最优问题、无穷时间问题以及具有目标约束集问题的极大值原理. 在文献[13]中, Webb 研究了模型(1)的非平凡平衡解的稳定性问题. 在本文中, 我们考虑具有年龄结构的相互作用多种群控制问题. 为此, 受 Webb[13]建模思想的启发, 我们建立了刻画具有年龄结构和收获努力度的 n 种群食物链模型(2). 在模型(2)中, 收获努力度函数为控制变量. 在这里, 利用不动点定理, 证明了系统非负解的存在性和唯一性; 由 Mazur 定理, 证明了最优控制策略的存在性; 同时由法锥概念的特征刻画, 我们还得到了控制问题最优解存在的必要条件.

特别地, 当 $\lambda_k(a,t)\equiv 0$, $k=1,2,\cdots,2n-2$, $\forall(a,t)\in Q$, 我们的结论就简化为文献[7]的结论. 于是我们的结论推广了某些已有的结果.

致谢　本文得到兰州交通大学"青蓝"人才工程基金资助计划(QL- 05- 18A)的资助, 在此表示感谢.

[参　考　文　献]

[1] Brokate M. Pontryagin's principle for control problems in age- dependent population dynamics[J]. J Math Biol, 1985, **23**: 75- 101.

[2] Murphy L F, Smith S J. Optimal harvesting of an age- structured population[J]. J Math Biol, 1990, **29**: 77- 90.

[3] Clark C W. Mathematical Bioeconomics: the Optimal Management of Renewable Resouces[M]. 2Ed. New York: John Wiley and Sons Inc, 1990.

[4] Busoni G, Matucci S. A problem of optimal harvesting policy in two- stage age- dependent population[J]. Math Biosci, 1997, **143**: 1- 33.

[5] Anita S. Optimal harvesting for a nonlinear age- dependent population dynamics[J]. J Math Anal Appl, 1998, **226**: 6- 22.

[6] Anita S, Iannelli M, Kim M Y, et al. Optimal harvesting for periodic age- dependent population dynamics[J]. SIAM J Appl Math, 1998, **58**(5): 1648- 1666.

[7] Anita S. Analysis and Control of Age- Dependent Population Dynamics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] Albrecht F, Gatzke H, Haddad A, et al. On the control of certain interacting populations[J]. J Math Anal Appl, 1976, **53**: 578- 603.

[9] Lenhart S, Liang M, Protopopescu V. Optimal control of boundary habitat hostility for interacting species[J]. Math Mech Appl Sci, 1999, **22**: 1061- 1077.

[10] Crespo L G, Sun J Q. Optimal control of populations of competing species[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, **27**: 197- 210.

[11] MENG Xin- zhu, JIAO Jian- jun, CHEN Lan- sun. The dynamics of an age structured predator- prey model with disturbing pulse and time delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, **9**(2): 547- 561.

[12] Chan W L, Guo B Z. Optimal birth control of population dynamics[J]. J Math Anal Appl, 1989, **144**: 532- 552.

[13] Webb G F. Theory of Nonlinear Age- dependent Population Dynamics[M]. N Y: Marcel Dekker, 1985.

[14] Iannelli M. Mathematical Theory of Age- Structured Population Dynamics[M]. Pisa: E Stampatori, 1994.

[15] Barbu V, Precupanu T. Convexity and Optimization in Banach Spaces[M]. Dordrecht- Boston: D. Reidel Publishing Company, 1986.

[16] 孟新柱, 陈兰荪, 宋治涛. 一类新的含有垂直传染与脉冲免疫的时滞 SEIR 传染病模型的全局动力学行为[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(9): 1123- 1134.

Optimal Harvesting for an Age- Dependent *n*- Dimensional Food Chain Model

LUO Zhi- xue, DU Ming- yin

(1. Department of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University,
Lanzhou 730070, P. R. China;
2. Faculty of Science, Hangzhou Institute of Electronic Engineering, Hangzhou 310018, P. R. China)

Abstract: Optimal harvesting policy for an age- dependent n- dimensional food chain model is studied. The existence and uniqueness of non- negative solution of the system were proved using the fixed point theorem. By Mazur's theorem, the existence of optimal control strategy was demonstrated and optimality conditions were derived by means of normal cone.

Key words: food chain; age- dependence; optimal control; the maximum principle