

大密度比和大压力比可压缩流的数值计算

陈荣三

(上海大学 数学系, 上海 200444)

(周哲玮推荐)

摘要: 将 WENO 方法、RKDG 方法、RKDG 方法结合原来的 Ghost Fluid 方法以及 RKDG 方法结合改进的 Ghost Fluid 方法, 应用到大密度比和大压力比的单相流以及气-气、气-液两相流的数值计算, 并对计算结果进行了比较分析。结果表明, 与其它的方法相比, RKDG 方法结合改进的 Ghost Fluid 方法得到了高分辨率的计算结果, 可以捕捉到正确的激波位置, 随着网格的加密, 计算解收敛到物理解。

关键词: 改进的 Ghost Fluid 方法; 大密度比; 大压力比; RKDG 有限元方法

中图分类号: O35; O175.27 **文献标识码:** A

引 言

1973 年, Reed 和 Hill^[1]提出了间断有限元方法 (discontinuous FEM), 用于求解中子输运方程。1974 年, LeSaint 和 Raviart^[2]给出了这种方法的收敛性证明。1989 年, Cockburn 和 Shu 构造 ($k+1$) 阶的 RKDG (Runge-Kutta discontinuous Galerkin) 有限元方法求解一维标量守恒律方程, 并将该方法推广到求解高维双曲守恒律方程和方程组^[3-7]。与一般的有限元相比, 间断有限元方法具有灵活处理间断和易于处理复杂的区域边界和边值问题的优点。

处理运动界面的方法比较多, 如格子类方法、VOF 方法^[8]、Level Set 方法^[9]和波前追踪方法^[10]等。本文利用 Level Set 方法捕捉接触间断 (运动界面), Level Set 方程中的速度不象原始的那样采用流体的速度, 而是用精确的界面速度来代替。这样每个时间步后即使不对 Level Set 函数进行重新初始化也可以使其保持为到界面的符号距离, 不仅减少了计算量, 还可以减少重新初始化带来的界面质量损失。Fedkiw 等在 Level Set 方法的基础上引入了 Ghost Fluid 方法^[11], 通过定义 Ghost 流体, 将含有两种流体的流场分成只含有一种流体的两个流场, 从而避免了界面两边状态方程不同所带来的问题。当界面两边的压力和密度变化比较大时, Ghost Fluid 方法不能准确地给出界面边界条件也会产生非物理振荡, 甚至使计算进行不下去^[12]。文献^[12]对原来的 Ghost Fluid 进行了改进, 利用隐式特征方法预测界面的状态, 进而定义 Ghost 流体的各物理量的值, 实际上是在界面附近解了一个近似 Riemann 问题。陈荣三、蔚喜军在文献^[12]的基础上提出了一种 Ghost Fluid 方法^[13], 在界面处构造 Riemann 问题, Ghost 流体的状态由 Riemann 问题的精确解决定。该方法可以比较精确地定义界面的边界条件。

收稿日期: 2007-10-31; 修订日期: 2008-04-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671120)

作者简介: 陈荣三 (1979-), 男, 湖北人, 博士生 (Tel: +86-21-66743259; E-mail: rschen@yahoo.cn)。

文献[14]分别用 Godunv 格式、Roe 格式等对大密度比和大压力比同种理想气体流进行了数值计算,但是即使网格足够细也不能计算出激波和接触间断的正确位置,所以文献[14]将该问题称为公开性问题。大密度比和大压力比的多相流问题更富有挑战性,国内外在该问题上的研究工作不多。

本文将 WENO 方法、RKDG 方法、RKDG 方法结合原来的 Ghost Fluid 方法以及 RKDG 方法结合改进的 Ghost Fluid 方法,应用到大密度比和大压力比的单相流以及气-气、气-液两相流的数值计算,并对计算结果进行了比较分析。在密度比和压力比都为 1 000 时,与其它的方法相比,RKDG 方法结合改进的 Ghost Fluid 方法可以正确地捕捉到激波的位置,计算的激波宽度比较窄,计算解收敛到物理解。

1 方 程

一维可压缩流体方程组为

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u \\ u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}_x = 0, \quad (1)$$

这里 t 为时间, x 为空间变量, ρ 为密度, u 为速度, p 为压力, E 为单位体积的总能量,总能量定义为 $E = e + u^2/2$

理想气体的状态方程

$$p = (\gamma - 1) e \quad (2)$$

刚性气体的状态方程

$$p = (\gamma - 1) e - p \quad (3)$$

该状态方程可以近似为部分高温高压下的固体和液体,而当 $p = 0$ 时就是理想气体的状态方程。

2 Level Set 方法

追踪运动界面的 Level Set 方程为

$$t(x, t) + u_x(x, t) = 0, \quad (4)$$

其中 u 为流体的速度。方程(4)离散求解后, (x, t) 不再是到界面的距离函数,一般需要对 (x, t) 进行重新初始化。重新初始化会给界面带来一定的质量损失,为了避免重新初始化方法带来的质量损失,本文采用文献[15]中的方法,在求解方程(4)时用精确的界面速度 u_1 (见第3节)来代替流体速度 u ,即整个流场 Level Set 函数都以界面速度运动,Level Set 方程(4)变为

$$t(x, t) + u_1 x(x, t) = 0 \quad (5)$$

假设 t^n 时刻 (x, t_n) 是距离函数,即 $(x, t_n) = 1$,对方程(5)的时间方向用向前差分离散得

$$(x, t_{n+1}) = (x, t_n) - (\Delta t) u_1 \quad (6)$$

对方程(6)两边取梯度,则有

$$(x, t_{n+1}) = (x, t_n) - ((\Delta t) u_1) \quad (7)$$

u_1 是一个常数,显然 $((\Delta t) u_1) = 0$,所以可得

$$(x, t_{n+1}) = (x, t_n) \quad (8)$$

方程(8)意味着 t^{n+1} 时刻 (x, t_{n+1}) 也是一个距离函数 故原来的 Level Set 方程中的流体速度 u 用精确的界面速度 u_1 代替后, 如果初始时刻 Level Set 函数为到界面的符号距离, 那么 Level Set 函数始终为到界面的距离函数, 故不需要重新初始化 Level Set 函数

3 改进的 Ghost Fluid 方法

原来的 Ghost Fluid 方法^[11], Ghost 流体的速度和压力简单地用对应的真实流体的速度和压力来代替, 方法简单, 但是在处理大密度比和大压力比问题时, 该方法不能给出精确界面条件会产生比较大的误差

下面简单介绍一下改进的 Ghost Fluid 方法, 详细见文献[13] 假设 t^n 时刻接触间断(运动界面)落在节点 i 和节点 $i+1$ 之间, 将 i 点及其左边的流体记为流体 A, $i+1$ 点及其右边的流体记作流体 B 定义以下初值的 Riemann 问题

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (\rho_{i-1}^n(x), u_{i-1}^n(x), p_{i-1}^n(x)), \\ (\rho_{i+2}^n(x), u_{i+2}^n(x), p_{i+2}^n(x)), \end{cases}$$

这里, $\rho_{i-1}^n, u_{i-1}^n, p_{i-1}^n$ 分别表示节点 $i-1$ 在 t^n 时刻的密度、速度和压力, $\rho_{i+2}^n, u_{i+2}^n, p_{i+2}^n$ 分别表示节点 $i+2$ 在 t^n 时刻的密度、速度和压力 求解上述 Riemann 问题可以得到界面的压力 p_1 、速度 u_1 、界面左边的熵 S_L 以及界面右边的熵 S_R 当计算流体 A 时, 需要用到 $i+1$ 点及其右边的流体的函数值, 将 $i+1$ 点及其右边的网格定义为流体 A 的 Ghost 网格, 同理将 i 点及其左边的网格定义为流体 B 的 Ghost 网格 以计算流体 A 的各个物理量的函数值为例来说明改进的 Ghost 方法 流体 A 在 $i+1$ 点及其右边的 Ghost 网格的速度和压力的值用界面的压力 p_1 和速度 u_1 代替, 熵用界面左边的熵 S_L 来代替, 同时将 i 点的熵修改为 S_L

与原来的 Ghost Fluid 方法相比, 修改的 Ghost Fluid 方法每个时间步需要求解一个 Riemann 问题, 所以计算量有所增加

4 数值方法

对于 Euler 方程组, 时间离散采用三阶具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法, 空间离散采用三阶 DG(discontinuous Galerkin) 有限元方法^[5] Level Set 方程采用刘儒勋提出的积分平均法求解^[16]

Euler 方程组的三阶 DG 空间离散如下, 详细见文献[5] 将求解区间 R 分为单元集合, $R = \bigcup I_i$, 其中 $I_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $i = 1, 2, \dots, N$, 单元长度定义为 $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ 定义方程组(1)的近似解

$$U_h(x, t) = \sum_{i=0}^2 U_i^l(t) v_i^i(t), \quad x \in I_i, \quad (9)$$

这里

$$v_0^i = 1, \quad v_1^i = \frac{x - x_i}{\Delta x_i/2}, \quad v_2^i = \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i/2} \right)^2 - 1 \right]$$

将式(9)代入式(1), 分别用 v_0^i, v_1^i, v_2^i 去乘式(1), 并在 I_i 积分, 整理得

$$\frac{d}{dt} U_i^l(t) + \frac{1}{\Delta x_i/(2l+1)} \left[- \int_{I_i} F(U_h(x, t)) \frac{d}{dx} v_i^i(x) dx + \right.$$

$$F(U_h(x_{i+1/2}, t)) - (-1)^l F(U_h(x_{i-1/2}, t)) \Big] = 0, \quad l = 0, 1, 2 \quad (10)$$

通量 $F(U_h(x_{i+1/2}, t))$ 用一个单调的数值通量 $H(U_{i+1/2}^-, U_{i+1/2}^+)$ 来代替, 这里 $U_{i+1/2}^- = U_h(x_{i+1/2}, t)$, 得到如下格式:

$$\frac{d}{dt} U_i^l(t) + \frac{1}{x_i/(2l+1)} \left[- \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} F(U_h(x, t)) \frac{d}{dx} v_i^l(x) dx + H(U_{i+1/2}^-, U_{i+1/2}^+) - (-1)^l H(U_{i-1/2}^-, U_{i-1/2}^+) \right] = 0, \quad l = 0, 1, 2 \quad (11)$$

式(11)可以写成如下常微分方程组

$$\frac{d}{dt} U_h = L_h(U_h, t) \quad (12)$$

常微分方程组(12)用三阶 TVD Runge-Kutta 方法进行离散, 具体如下:

$$\begin{aligned} U_h^1 &= U_h^n + \tau L_h(U_h^n), \\ U_h^2 &= \frac{3}{4} U_h^n + \frac{1}{4} U_h^1 + \frac{1}{4} \tau L_h(U_h^1), \\ U_h^{n+1} &= \frac{1}{3} U_h^n + \frac{2}{3} U_h^2 + \frac{2}{3} \tau L_h(U_h^2) \end{aligned}$$

已知 t_n 时刻各物理量值, 数值求解 t_{n+1} 时刻各物理量值的主要步骤为:

- 1) 根据 (x, t_n) 确定界面的位置, 定义流体 A 和流体 B 的 Ghost 网格;
- 2) 定义和求解界面附近的 Riemann 问题;
- 3) 利用 Riemann 问题的解定义流体 A 和流体 B 的 Ghost 流体状态;
- 4) 采用三阶 RKDG 方法求解 Euler 方程组;
- 5) 用积分平均法求解 Level Set 方程得到 (x, t_{n+1})

5 数值实验

对于单相流问题, 接触间断(界面)附近不做任何处理, 只用 WENO、RKDG 就能计算, 但是这样得到的计算结果在接触间断附近的误差比较大, 分辨率低, 如果采用 Level Set 方法捕捉接触间断, 用改进的 Ghost Fluid 处理接触间断, 则可以得到高分辨率的计算结果。至于多相流问题, 由于界面两边的状态方程不同, 界面附近需要做特殊的处理。为了分析的方便, 引入以下记号, RKDG 表示只对 Euler 方程组用 RKDG 离散, 界面未做任何处理; WENO 表示只对 Euler 方程组用 WENO 离散, 界面未做任何处理; GF 表示 Euler 方程用 RKDG 方法离散, Level Set 方法捕捉运动界面, 原来的 Ghost Fluid 方法^[5]处理运动界面; MGF 表示 Euler 方程用 RKDG 方法离散, Level Set 方法捕捉运动界面, 改进的 Ghost Fluid 方法(本文第 3 节)处理运动界面。图 1~12 给出了用上述 4 种方法对大密度比和大压力比的 3 个算例的计算结果。

算例 1 大密度比大压力比单介质理想气体 Riemann 问题

该算例来自文献[14], 计算区域是 $[0, 1]$, 初始界面位于 $x = 0.3$, 计算时间为 $t = 0.15$ 。界面两边均为理想气体, 状态方程都用方程(2)。初始状态如下:

$$(\rho, u, p, \tau) = \begin{cases} (1000, 0, 0.0, 1000, 0, 1.4), & \text{如果 } 0 \leq x < 0.3, \\ (1.0, 0.0, 1.0, 1.4), & \text{如果 } 0.3 < x \leq 1 \end{cases}$$

这是一个非常困难的算例。图 1~3 分别给出了网格数为 200 时五阶 WENO 方法、三阶 RKDG 方法以及 MGF 方法的计算结果。不难看出, 五阶 WENO 方法计算的激波位置不正确, 三阶

RKDG 方法的计算结果明显优于五阶 WENO 方法, 三阶 RKDG 方法计算的激波的位置正确。为了比较 RKDG 方法和 MGF 方法, 图 4 给出了网格数为 200 时密度、压力和速度在 $0.65 < x < 0.75$ 之间(接触间断附近)的局部放大图。从图 4 可以看出, RKDG 方法在接触间断附近有比较大的耗散, 接触间断被抹平了, 界面宽度为 5 个网格宽度, 而 MGF 方法得到了绝对间断的图象, 界面宽度控制在 1 个网格宽度以内, MGF 方法在接触间断附近压力和速度误差, 比 RKDG 方法小。为了考察 MGF 方法的收敛性, 图 5 给出了网格数分别为 100、400、5 000 和 10 000 时, 密度、压力和速度在 $0.8 < x < 0.9$ 之间(激波附近)的局部放大图, 从图 5 可以看出, 激波宽度控制在 3 个网格以内, 激波附近没有出现非物理振荡, 随着网格的加密, 计算解收敛到物理解。

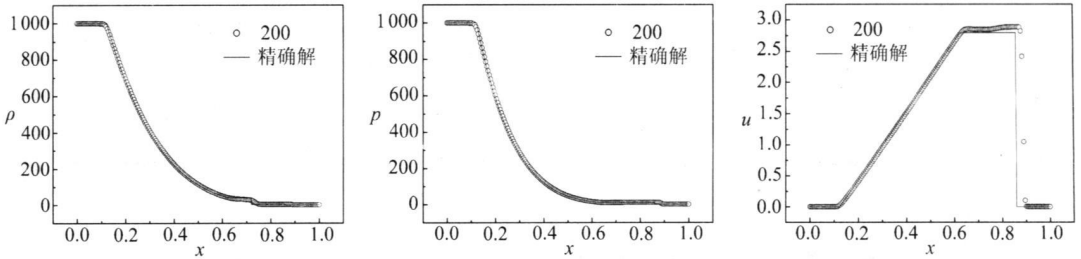


图 1 算例 1, 五阶 WENO 方法 ($t = 0.15, 200$ 网格)

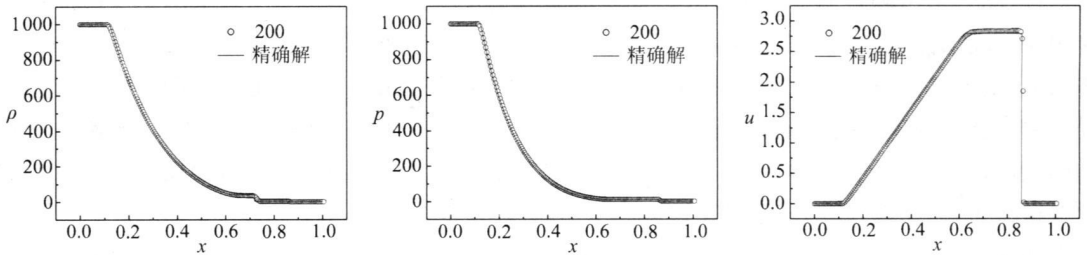


图 2 算例 1, 三阶 RKDG 方法 ($t = 0.15, 200$ 网格)

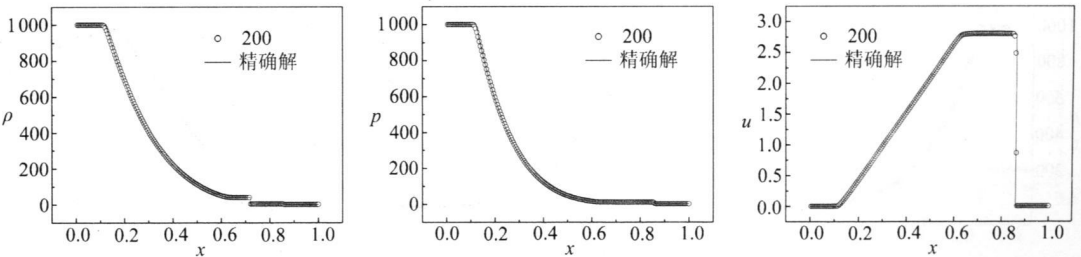


图 3 算例 1, MGF 方法 ($t = 0.15, 200$ 网格)

算例 2 大密度比大压力比气-气两相 Riemann 问题

初始界面位于 $x = 0.3$, 界面两边为不同介质的气体, 状态方程都用方程(2) 初始状态如下:

$$(\rho, u, p, \tau) = \begin{cases} (1000, 0, 0, 0, 1000, 0, 1.4), & \text{如果 } x < 0.3, \\ (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1.2), & \text{如果 } 0.3 < x \end{cases}$$

图 6~ 8 的计算区域为 $[0, 1]$, 计算时间为 $t = 0.15$ 为了检验 MGF 方法的长时间计算效果,

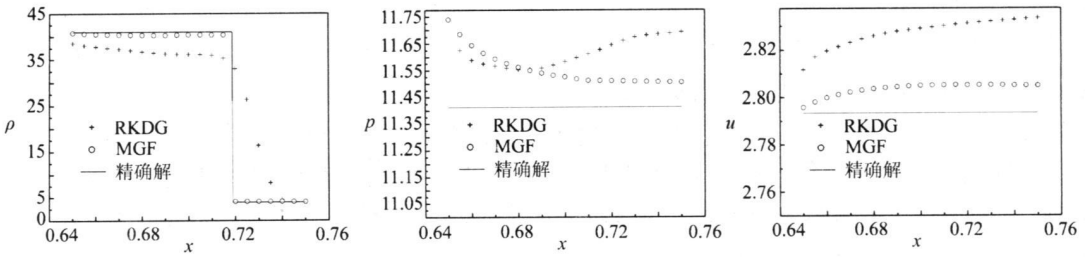


图 4 算例 1, RKDG 方法和 MGF 方法接触间断附近局部放大图比较 ($t = 0.15, 200$ 网格)

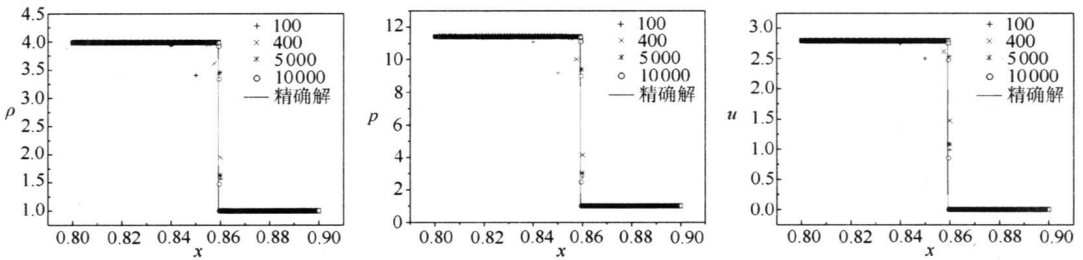


图 5 算例 1, MGF 方法激波附近局部放大图 ($t = 0.15, 200$ 网格)

图9~10 的计算区域扩大为 $[-10, 20]$, 计算时间 $t = 5$ 图 6 为网格数为 1 000 时 GF 的计算结果, 从图上可清晰地看出原来的 GF 方法计算的激波位置不正确 图 7 给出了网格数为 200 时 MGF 方法的计算结果, 得到的激波位置正确 为了检验 MGF 方法的收敛性, 图 8 给出了网格数分别为 100、400、5 000 和 10 000 时, 密度、压力和速度在 $0.8 < x < 0.9$ 之间(激波附近)的局部放大图 从图中可以看出, 激波的宽度比较窄, 随着网格的加密, 计算出的激波位置和精确解相同 图 9 为网格数为 200 计算时间 $t = 5$ 的计算结果, 从图 9 可以看出长时间计算后波形保持得很好, 激波位置正确 图 10 给出了网格数分别为 100、400、5 000 和 10 000 时, 密度、压力和速度在 $16 < x < 18$ 之间(激波附近)的局部放大图, 可以看出长时间计算 MGF 方法仍然收敛到物理解

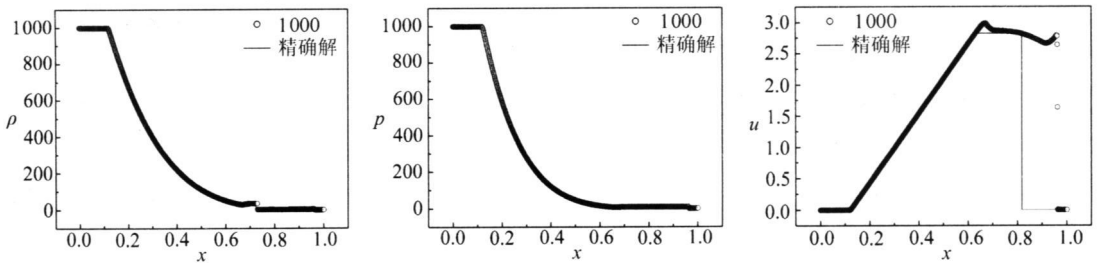


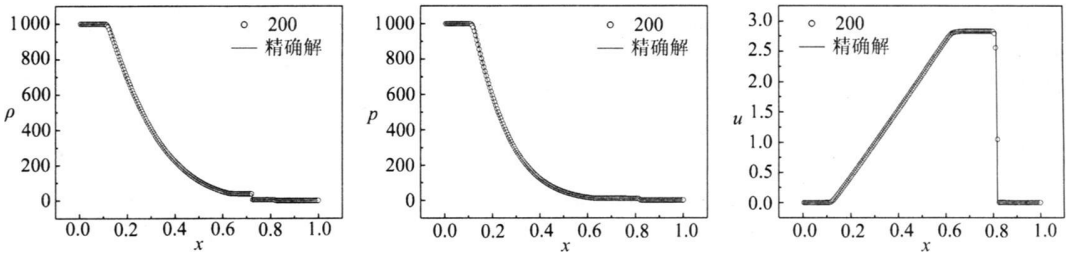
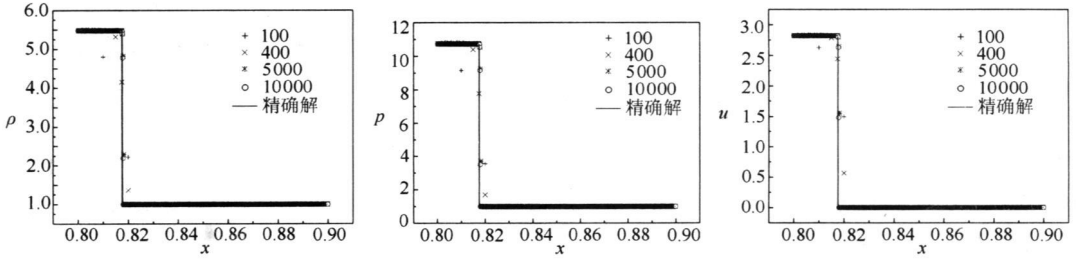
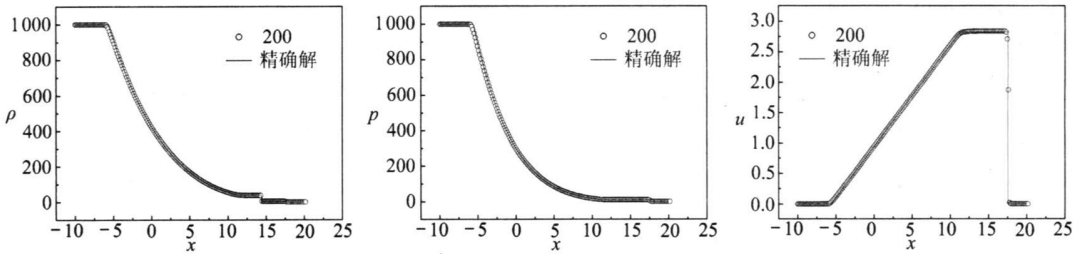
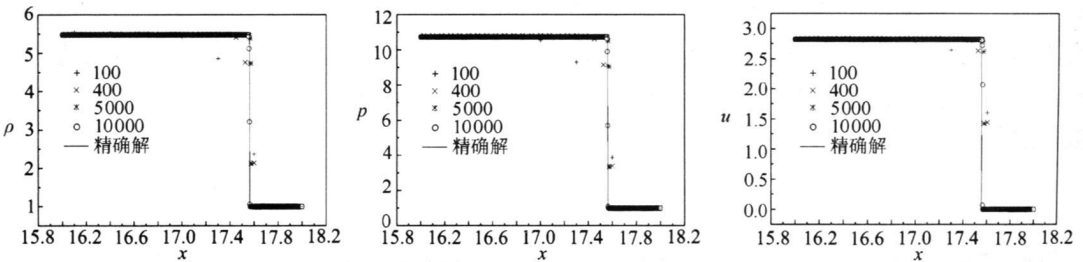
图 6 算例 2, 原来的 GF 方法 ($t = 0.15, 1000$ 网格)

算例 3 大密度比大压力比气-液两相 Riemann 问题

计算区域是 $[0, 1]$, 初始界面位于 $x = 0.6$, 计算时间为 $t = 0.02$ 界面左边为气体, 状态方程为方程(2), 右边为液体, 状态方程为方程(3) 初始状态如下:

$$(\rho, u, p, \rho, p) = \begin{cases} (1.0, 90.0, 1.0, 1.4, 0), & \text{如果 } 0 \leq x < 0.6, \\ (1000.0, 0.0, 0.0, 1000.0, 7.15, 3.309), & \text{如果 } 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$$

这是一个非常困难的算例 液体中的密度和压力均为气体中的 1 000 倍 图 11 为 200 个网格

图7 算例 2, MGF 方法 ($t = 0.15, 200$ 网格)图8 算例 2, MGF 方法激波附近局部放大图 ($t = 5, 200$ 网格)图9 算例 2, MGF 方法 ($t = 5, 200$ 网格)图10 算例 2, MGF 方法激波附近局部放大图 ($t = 5$)

点的密度、压力和速度图,图 12 给出了网格数分别为 100、400、5 000 和 10 000 时密度、压力和速度在 $0.7 < x < 0.8$ 之间的局部放大图,从图 12 可以看出,随着网格的加密,计算解收敛到物理解

6 结 论

对于大密度比和大压力比问题,不能在整个流场用统一的格式进行计算,界面(接触间断)必须做特殊的处理。正确地追踪界面的位置非常重要,界面位置的误差直接影响激波的捕

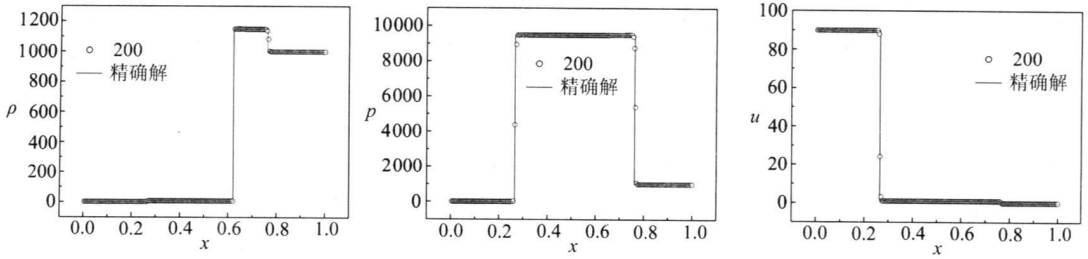


图 11 算例 3, MGF 方法 ($t = 0.02$, 200 网格)

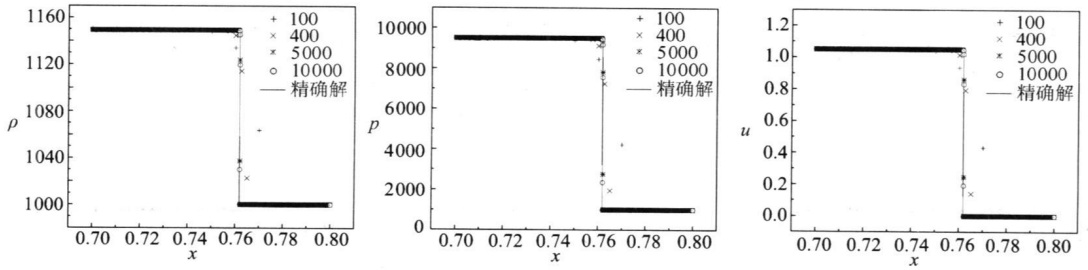


图 12 算例 3, MGF 方法激波附近局部放大图 ($t = 0.02$)

捉 本文 Level Set 方程中的速度采用界面速度来代替, 可以非常精确地计算出界面的位置。改进的 Ghost Fluid 方法, 每个时间步在界面附近定义一个 Riemann 问题, 用精确 Riemann 解定义 Ghost Fluid 的状态, 该方法的优点是可以正确地给出界面边界条件。将 WENO 方法、RKDG 方法、RKDG 方法结合原来的 Ghost Fluid 方法以及 RKDG 方法结合改进的 Ghost Fluid 方法, 应用到高密度比和大压力比的单介质流以及气-气、气-液两相流进行了数值计算, 并对计算结果进行了比较分析。比较结果表明, 当密度比和压力比均为 1 000 时, 对于单相流问题, WENO 方法不能得到正确的激波位置, RKDG 方法可以得到正确的激波位置但是接触间断附近的耗散比较大而且接触间断被抹平了, RKDG 有限元方法结合改进的 Ghost Fluid 方法可以得到正确的激波位置和绝对间断的图形; 对于多相流问题, RKDG 有限元方法结合原来的 Ghost Fluid 方法不能捕捉到正确的激波位置, RKDG 有限元方法结合改进的 Ghost Fluid 方法可以捕捉到接触间断和激波的正确位置, 在接触间断和激波附近不会产生非物理振荡, 而且经过长时间计算波形保持得很好。

[参 考 文 献]

[1] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA- UR, 1973, 73- 479.

[2] LeSaint P, Raviart P A. On a finite element methods for solving the neutron transport equation[A]. de Boor C, Ed. Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations [C]. New York Academic Press, 1974, 89- 145.

[3] Cockburn B, Gresho P- A. A priori error estimates for numerical methods for scalar conservation laws Part : The general approach[J]. Math Comp, 1996, 65(214): 533- 573.

[4] Cockburn B, Shu C- W. TVB Runge- Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws : General framework[J]. Math Comp, 1989, 52(186): 411- 435.

[5] Cockburn B, Lin S- Y, Shu C- W. TVB Runge- Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws : One dimensional systems[J]. J Comput Phys, 1989, 84

- (1): 90– 113.
- [6] Cockburn B, Hou S, Shu C– W. TVB Runge– Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws : The multidimensional case[J]. *Math Comp*, 1990, **54**(190): 541– 581.
- [7] Cockburn B, Shu C– W. TVB Runge– Kutta local projecting discontinuous Galerkin finite element methods for conservation laws : Multidimensional systems[J]. *J Comput Phys*, 1998, **141**(2): 199 – 224.
- [8] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid(VOF) method for the dynamics of free boundary[J]. *J Comput Phys*, 1981, **39**(1): 201– 225.
- [9] Mulder W, Osher S, Sethian J A. Computing interface motion in compressible gas dynamics[J]. *J Comput Phys*, 1992, **100**(2): 209– 228.
- [10] Marshall G. A front tracking method for one– dimensional moving boundary problems[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1986, **7**(1): 252– 263.
- [11] Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B, et al. A non– oscillatory Eulerian approach to interfaces in multi– material flows (the Ghost Fluid Method)[J]. *J Comput Phys*, 1999, **152**(2): 457– 492.
- [12] Liu T G, Khoo B C, Yeo K S. Ghost fluid method for strong shock– impacting on material interface [J]. *J Comput Phys*, 2003, **190**(2): 651– 681.
- [13] 陈荣三, 蔚喜军. 一维多介质可压缩流的高精度 RKDG 有限元方法[J]. *计算物理*, 2006, **23**(1): 43 – 49.
- [14] Tang H Z, Liu T G. A note on the conservative schemes for the Euler equations[J]. *J Comput Phys*, 2006, **218**(2): 451– 459.
- [15] Osher S, Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces* [M]. New York: Springer, 2003.
- [16] 刘儒勋, 刘晓平, 张磊, 等. 运动界面的追踪和重构方法[J]. *应用数学和力学*, 2004, **25**(3): 279– 290.

Computation of Compressible Flows With High Density Ratio and Pressure Ratio

CHEN Rong– san

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

Abstract: WENO method, RKDG method, RKDG method with original Ghost Fluid method and RKDG method with modified Ghost Fluid method were applied to single– medium and two– medium air– air, air– liquid compressible flow with high density and pressure ratios. Numerical comparison and analysis for the methods above were given. Numerical results show that, compared with the other methods, RKDG method with modified Ghost Fluid method can obtain high resolution and the correct position of the shock, the computed solutions are converge to physical solutions as the mesh refined.

Key words: modified Ghost Fluid method; high density ratio; high pressure ratio; RKDG finite element method