应用数学和力学, 第 29 卷 第 5 期
2008 年 5 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 5, May. 15, 2008

文章编号: 1000- 0887(2008)05- 0505- 10

椭圆型变分不等式的障碍优化控制问题*

朱　砾[1]， 李秀华[2]， 郭兴明[2]

(1. 湘潭大学 数学系, 湖南 湘潭 411105;
2. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委郭兴明来稿)

摘要: 讨论了椭圆型变分不等式的障碍优化控制问题, 获得了优化控制问题的解的存在性、唯一性和相关问题的正则性等, 并研究了优化控制问题的逼近等.

关 键 词: 障碍问题; 罚方法; 优化系统; 逼近问题

中图分类号: O178; O175.25; O224　　文献标识码: A

引　　言

本文中, 我们研究下面的优化控制问题.

问题(C)　求解 $y \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$I(y) = \inf_{y \in H_0^1(\Omega)} I(y), \tag{1}$$

这里

$$I(y) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ | T(y) - z |^2 + | \nabla y |^2 \right\} \mathrm{d}x, \qquad \forall y \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

其中 $\Omega \in R^n$ 是一有界区域, $\partial \Omega \in C^1$, $z \in L^2(\Omega)$ 为一给定的目标函数, $\varphi \stackrel{\Delta}{=} T(y)$ 为下面拟线性变分不等式(状态方程)的解:

$$\begin{cases} \varphi \in K(y) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant y,\ \text{a.e. } x \in \Omega \right\}, \\ \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla (v - \varphi) \mathrm{d}x \geqslant 0, \qquad \forall v \in K(y), \end{cases} \tag{3}$$

已知对 $\forall y \in H_0^1(\Omega)$, 式(3) 确定了一个唯一的解 $\varphi = T(y) \in H_0^1(\Omega)$, 且是 $v \mapsto \int_\Omega | \nabla v |^2 \mathrm{d}x$ 在凸闭集 $K(y)$ 上的极小值. 此时, 我们称 y 为控制变量, 而相应的 $\varphi = T(y)$ 为状态变量. 任何满足式(1) 的控制变量就称为最优控制.

变分不等式的优化控制问题许多学者曾作过研究[1-14]. Adams, Lenhart 和 Yong[3] 通过引入一族逼近问题证明了优化控制问题的存在性和唯一性. 他们还用罚方法研究了这些逼近问

---

* 收稿日期: 2007- 08-15; 修订日期: 2008-04-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472061); 教育部博士点基金资助项目(20060280015)
作者简介: 朱砾(1965—), 男, 湖南双峰人, 副教授, 博士(E- mail: zhuli@xtu.edu.cn);
郭兴明(联系人. E- mail: xmguo@shu.edu.cn).

题的诸多性质,借助 Green 势研究优化问题的解的正则性等. Adams 则采用完全不同的方法研究了优化控制问题[1],并将结果推广到包括源项、半线性和准线性椭圆算子情形[5-6].

本文主要研究优化控制问题. 目标函数 $z\in L^2(\Omega)$. 在适当的条件下, 我们获得了状态方程的一些性质, 包括 T^δ 的G可微性, 优化控制问题的解的存在性、唯一性和 $W_2^2(\Omega)$-正则性. 我们的结果改进和修正了文献[3]中的主要结果.

1 状态方程

本文中 $\|\cdot\|_2$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数, $M^+(\Omega)$ 表示所有非负支撑集包含在 Ω 中的Borel可测函数集合, 很显然, $M^+(\Omega)$ 是 $H^{-1}(\Omega)$ 的星弱闭凸集合.

定义 1.1 如果 $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\geqslant 0,\qquad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega);\ \varphi\geqslant 0;\ \text{a.e. } x\in\Omega,\tag{4}$$

则称 u 是 Ω 上的上调和函数.

让 $H^+(\Omega)$ 表示 Ω 上的所有上调和函数集合, 它是 $H_0^1(\Omega)$ 的闭凸子集,

$$H^+(\Omega)\stackrel{\Delta}{=}\left\{u\in H_0^1(\Omega)\ \middle|\ \int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\geqslant 0,\ \forall\varphi\in H_0^1(\Omega);\ \varphi\geqslant 0;\ \text{a.e. } x\in\Omega\right\}.$$

由Riesz分解定理(见文献[9]), 对每个 $y\in H^+(\Omega)$, 存在唯一的 $\mu\in H^+(\Omega)$, 满足

$$\begin{cases}-\Delta y=\mu,\\ y|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{5}$$

设 $L_+^2(\Omega)\stackrel{\Delta}{=}\left\{v\in L^2(\Omega)\mid v\geqslant 0,\ \text{a.e. }\Omega\right\}$.

引理 1.1[6] 假设 $y\in H_0^1(\Omega)$, $K(y)$ 是非空集合, 则

(i) $T(y)\in H^+(\Omega)$;

(ii) $T^2=T$, 即 $T(T(y))=T(y)$;

(iii) $T(y)=y\Leftrightarrow y\in H^+(\Omega)$.

引理 1.2 $T(H_0^1(\Omega))=H^+(\Omega)$.

证明 由引理1.1(i), 得到 $T(H_0^1(\Omega))\subseteq H^+(\Omega)$. 由引理1.1(iii), $H^+(\Omega)=T(H^+(\Omega))\subseteq T(H_0^1(\Omega))$. 因此, $T(H_0^1(\Omega))=H^+(\Omega)$.

定义

$$\beta(r)=\begin{cases}0, & r\geqslant 0,\\ -r^2, & -0.5\leqslant r\leqslant 0,\\ r+0.25, & r\leqslant -0.5,\end{cases}$$

注意到 $r\wedge 0=\min\{0,r\}\leqslant\beta(r)\leqslant 0$,

$$\beta(r)\in C^1(R),\quad \beta'(r)=\begin{cases}0, & r\geqslant 0,\\ -2r, & -0.5\leqslant r\leqslant 0,\\ 1, & r\leqslant -0.5.\end{cases}$$

引入下面的半线性椭圆方程:

$$\begin{cases}-\Delta\varphi^\delta+\dfrac{1}{\delta}\beta(\varphi^\delta-y)=0, & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \varphi^\delta|_{\partial\Omega}=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{6}$$

既然 $\beta(\varphi^\delta-y)$ 是非减的, 那么方程(6)有唯一解 $\varphi^\delta\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. 设 $\varphi^\delta=T^\delta(y)$, 那

么我们有下列结果.

定理 1.3　设 $y^\delta\in H_0^1(\Omega)$ 是一序列, 按 $H_0^1(\Omega)$ 范数强收敛到 $y(\delta\to 0)$. 那么序列 $\varphi^\delta=T^\delta(y^\delta)$ 按 $H_0^1(\Omega)$ 范数强收敛到 $\varphi=T(y)$.

证明　证明分为 4 步:

1) 对每个 $y^\delta\in H_0^1(\Omega)$, 设 $\varphi^\delta=T^\delta(y^\delta)$, 方程(6)等价于:

$$\forall v\in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta}\int_\Omega\beta(\varphi^\delta-y^\delta)v\,\mathrm{d}x=0, \tag{7}$$

取

$$v=\varphi^\delta-y^\delta,\ \int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla(\varphi^\delta-y^\delta)\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta}\int_\Omega\beta(\varphi^\delta-y^\delta)(\varphi^\delta-y^\delta)\mathrm{d}x=0.$$

很明显

$$\beta(\varphi^\delta-y^\delta)(\varphi^\delta-y^\delta)\geqslant 0,\ \text{a.e. } x\in\Omega,\ \int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla(\varphi^\delta-y^\delta)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

这即是

$$\int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla\varphi^\delta\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla y^\delta\mathrm{d}x.$$

$$\|\varphi^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant C\|y^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}\qquad(C\text{ 是一常数}). \tag{8}$$

2) 估计 $\beta(\varphi^\delta-y^\delta)$. 既然 $0\leqslant\beta'\leqslant 1$, $\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\in H_0^1(\Omega)$, 利用式(7)并取 $v=\beta(\varphi^\delta-y^\delta)$ 得到

$$\int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta}\int_\Omega\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\delta}\|\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\|_2^2=-\int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$M\|\varphi^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}\cdot\|\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\|_{H_0^1(\Omega)}\qquad(M\text{ 是常数}).$$

注意到

$$\beta(0)=0,\quad\|\beta(v)\|_2\leqslant\|v\|_2,\ \frac{\partial\beta(v)}{\partial x_i}=\beta'(v)\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

因此

$$\|\nabla\beta(v)\|_2\leqslant\|\nabla v\|_2,$$

$$\|\beta(v)\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\|\beta(\varphi^\delta-y^\delta)\|_2^2\leqslant\delta\cdot M\cdot\|\varphi^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}\cdot\|\varphi^\delta-y^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

3) 由式(8), $\left\{\varphi^\delta\right\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的弱收敛点列. 记 $\varphi^\delta=T(y^\delta)\to\varphi\in H_0^1(\Omega)$(弱). 由式(7), 对每个 $v\in H_0^1(\Omega)$, $v\geqslant 0$,

$$0\leqslant\int_\Omega-\beta(\varphi^\delta-y^\delta)v\,\mathrm{d}x=-\delta\int_\Omega\Delta\varphi^\delta\cdot v\,\mathrm{d}x=\delta\int_\Omega\nabla\varphi^\delta\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\delta\|\nabla\varphi^\delta\|_2\cdot\|\nabla v\|_2\leqslant\delta\|\nabla y^\delta\|_2\cdot\|\nabla v\|_2\to 0.$$

因此

$$\int_\Omega\beta(\varphi-y)v\,\mathrm{d}x=0,\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega);\ v\geqslant 0;\ \text{a.e. } x\in\Omega,$$

进一步, $\beta(\varphi-y)=0$, a.e. $x\in\Omega$. 这即是 $\varphi\geqslant y$, a.e. $x\in\Omega$, $\varphi\in K(y)$.

4) 证明 $\varphi=T(y)$. 已知 $\varphi=T(y)$, 即 $\forall v\in K(y)$, $\int_\Omega\nabla\varphi\cdot\nabla(v-\varphi)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 取 $v\in$

$K(y)$ 和 $v^{\delta}=\sup(v,\varphi^{\delta})$，则 $v^{\delta}\in K(\varphi^{\delta})$，序列 v^{δ} 按 $H_0^1(\Omega)$ 范数强收敛到 v. 在式(7) 中取 $v=v^{\delta}-\varphi^{\delta}$，得到

$$\int_{\Omega}\nabla\varphi^{\delta}\cdot\nabla(v^{\delta}-\varphi^{\delta})\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\delta}\int_{\Omega}\beta(\varphi^{\delta}-y^{\delta})(v^{\delta}-\varphi^{\delta})\,\mathrm{d}x.$$

既然

$$\int_{\Omega}\nabla\varphi^{\delta}\cdot\nabla(v^{\delta}-\varphi^{\delta})\,\mathrm{d}x\geqslant 0\Leftrightarrow\int_{\Omega}\nabla\varphi^{\delta}\cdot\nabla\varphi^{\delta}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}\nabla\varphi^{\delta}\cdot\nabla y^{\delta}\,\mathrm{d}x,$$

$$-\frac{1}{\delta}\int_{\Omega}\beta(\varphi^{\delta}-y^{\delta})(v^{\delta}-\varphi^{\delta})\,\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

$$\int_{\Omega}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{\delta\to 0}\int_{\Omega}\nabla\varphi^{\delta}\cdot\nabla\varphi^{\delta}\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega}\nabla\varphi^{\delta}\cdot\nabla y^{\delta}\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\nabla\varphi\cdot\nabla y\,\mathrm{d}x.$$

这即是 $\forall v\in K(y)$，$\int_{\Omega}\nabla\varphi\cdot\nabla(v-\varphi)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$，$\varphi=T(y)$.

2 存在性和唯一性

引理 1.2 暗示了问题(C) 的解 $y\in H^{+}(\Omega)$，$\varphi=T(y)=y$，$\forall y\in H^{+}(\Omega)$.

引入下面的问题:

问题(C) 寻找 $y\in H^{+}(\Omega)$，$I(y)=\inf\limits_{y\in H^{+}(\Omega)}I(y)$，

这里

$$I(y)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|y-z|^{2}+|\nabla y|^{2}\right\}\mathrm{d}x,\qquad\forall y\in H^{+}(\Omega).\tag{9}$$

由引理 1.1(iii)，$T(y)=y$ 当且仅当 $y\in H^{+}(\Omega)$. 因此，$I(y)=I(y)$，$\forall y\in H^{+}(\Omega)$.

利用引理 1.2，问题(C) 和问题(C) 是等价的.

引理 2.1 $y\in H_0^1(\Omega)$ 是问题(C) 的解当且仅当 $y\in H^{+}(\Omega)$. 进一步，如果它是问题(C) 的解，它还是问题(C) 的解. 此外，如果 $y\in H_0^1(\Omega)$ 是问题(C) 的解，则 $T(y)=y$.

证明 显然，如果 $y\in H_0^1(\Omega)$ 是问题(C) 的解，

$$I(y)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|T(y)-z|^{2}+|\nabla y|^{2}\right\}\mathrm{d}x\leqslant I(T(y))=$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|T(y)-z|^{2}+|\nabla T(y)|^{2}\right\}\mathrm{d}x.$$

因此，$\int_{\Omega}|\nabla y|^{2}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}|\nabla T(y)|^{2}\mathrm{d}x$. 由于 $v\mapsto\int_{\Omega}|\nabla v|^{2}\mathrm{d}x$ 在 $K(y)$ 的极小值是唯一的，因此，$y=T(y)\in H^{+}(\Omega)$. 进一步，$\forall y\in H^{+}(\Omega)$，

$$I(y)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|y-z|^{2}+|\nabla y|^{2}\right\}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|T(y)-z|^{2}+|\nabla y|^{2}\right\}\mathrm{d}x=I(y)\leqslant$$
$$I(y)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|T(y)-z|^{2}+|\nabla y|^{2}\right\}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|y-z|^{2}+|\nabla y|^{2}\right\}\mathrm{d}x=I(y).$$

这说明，y 是问题(C) 的优化控制变量.

定理 2.2(存在性和唯一性) $\forall z \in L^2(\Omega)$, 问题(C)有唯一解.

证明 我们只需证明问题(C)的解的存在性和唯一性.

假设$\left\{y_k\right\} \subset H^+(\Omega)$是$I$的极小化序列, $\lim\limits_{k \to \infty} I(y_k) = \inf\limits_{y \in H^+(\Omega)} I(y)$. 那么存在常数$c > 0$, $\int_\Omega |\nabla y_k|^2 \mathrm{d}x \leqslant c$. 因此存在$H_0^1(\Omega)$中子列(仍记为本身)弱收敛到$y$. 既然$H^+(\Omega)$在$H_0^1(\Omega)$中是弱闭的, 那么$y \in H^+(\Omega)$. 由$I$的下半连续性, $I(y) \leqslant \lim\limits_{k \to \infty} I(y_k) = \inf\limits_{y \in H^+(\Omega)} I(y)\mathrm{d}x$, 这就意味着$y$是问题(C)的解. 由于$H^+(\Omega)$是凸的, I是定义在$H^+(\Omega)$上的严格凸函数, 因此y是问题(C)的唯一解.

3 正则性

我们引入下列优化控制问题.

问题(C^*) $I^*(u) = \inf\limits_{u \in L_+^2(\Omega)} I^*(u)$,

这里$I^*(u) = \dfrac{1}{2}\int_\Omega \left\{|T^*(u) - z|^2 + |uT^*(u)|\right\} \mathrm{d}x$, $y = T^*(u)$是下述方程的解:

$$\begin{cases} -\Delta y = u, \\ y|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

既然: $|uT^*(u)| = |-\Delta T^*(u) \cdot T^*(u)| = |\nabla T^*(u)|^2$, 很明显, 问题($\mathrm{C}^*$)和问题(C)(或问题(C))在一定条件下是等价的.

引理 3.1 $\forall z \in L^2(\Omega)$

(i) 假设y是问题(C)的解. 记$u = -\Delta y$, 那么$u \in L_+^2(\Omega)$, 而且它是问题(C^*)的解;

(ii) 假设$u \in L_+^2(\Omega)$是问题(C^*)的解, 那么$y = T^*(u) \in H^+(\Omega)$, 而且它是问题(C)的解.

证明 (i) 假设y是问题(C)的解, 那么$u = -\Delta y \in L^2(\Omega)$. 由引理 2.1, $y \in H^+(\Omega)$, $u = -\Delta y \in L_+^2(\Omega)$. 因此, 对每个$u \in L_+^2(\Omega)$, $y = T^*(u) \in H^+(\Omega)$, 且

$$\begin{aligned} I^*(u) = & \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{|T^*(u) - z|^2 + |uT^*(u)|\right\} \mathrm{d}x = \\ & \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{|T^*(u) - z|^2 + |\nabla T^*(u)|^2\right\} \mathrm{d}x = I(T^*(u)). \end{aligned}$$

显然, $I^*(u) = I(T^*(u)) \leqslant I(T^*(u)) = I^*(u)$. 因此, u是问题(C)的解.

(ii) 假设$u \in L_+^2(\Omega)$是问题(C^*)的解, 则$I(T^*(u)) = I^*(u) \leqslant I^*(u) = I(T^*(u))$. 既然$\left\{T^*(u) \mid u \in L_+^2(\Omega)\right\}$按$H_0^1(\Omega)$范数在$H^+(\Omega)$中稠密, $T^*(u)$是I在$H^+(\Omega)$上的唯一极小点. 因此, $T^*(u)$是问题(C)的解.

定理 3.2 $\forall z \in L^2(\Omega)$, 问题(C)的解$y \in H^+(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$.

证明 由引理 2.1, $y \in H^+(\Omega)$. 下面将证明: $y \in W_2^2(\Omega)$.

由引理 3.1 知道, 问题(C)的解满足: $y \in \left\{y \in H_0^1(\Omega) \mid -\Delta y = u \in L_+^2(\Omega)\right\}$. 由 Calderon－Zygmund 定理[4], $y \in W_2^2(\Omega)$.

4 优化系统

通过上述讨论我们知道, 问题(C)有唯一的最优解, 记为y^*. 让$\varphi^* = T(y^*)$. 对任意

的 $\delta > 0$, 定义

问题 (C_δ) $\quad I_\delta(y^\delta) = \inf\limits_{y \in H_0^1(\Omega)} I_\delta(y)$,

这里

$$I_\delta(y) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \left\{ | T^\delta(y) - z |^2 + | \nabla y |^2 \right\} \mathrm{d}x \right] + \| y - y^* \|_2^2 .$$

注意到 T^δ 是半线性椭圆型方程(6)的解算子.

引理 4.1 T^δ 在任意点 $y \in H_0^1(\Omega)$ 是G－可微的, 此即, $\forall \xi \in H_0^1(\Omega)$, $\left\{[T^\delta(y + t\xi) - T^\delta(y)]/t\right\} \rightharpoonup v^\delta (t \to 0)$ (在 $H_0^1(\Omega)$). 这里 v^δ 是下述方程的解:

$$\begin{cases} -\Delta v^\delta + \dfrac{1}{\delta}\beta'(w^\delta - y) v^\delta = \dfrac{1}{\delta}\beta'(w^\delta - y) v^\delta \xi, & x \in \Omega, \\ v^\delta = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $w^\delta = T^\delta(y)$. 证明类似文献[3]中的引理5.1.

记 $A = -\Delta$. 定义问题(C)的状态的对偶函数为下列方程的解 $p^\delta \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} A^* p^\delta + \dfrac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta - y^\delta) p^\delta = \varphi^\delta - z, & x \in \Omega, \\ p^\delta = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

这里 A^* 表示 A 的共轭算子, y^δ 是问题 (C_δ) 的解. 对每个

$$y \in H_0^1(\Omega), \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_\delta(y^\delta + t(y - y^\delta)) |_{t=0} \geqslant 0,$$

$$\int_\Omega (\chi^\delta(\varphi^\delta - z)) + \Delta\varphi^\delta \cdot \Delta(\varphi - \varphi^\delta) \mathrm{d}x + \int_\Omega ((\varphi^\delta - \varphi^*)(\varphi - \varphi^\delta)) \mathrm{d}x \geqslant 0,$$

其中 $\chi^\delta \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$A\chi^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta - y^\delta)\chi^\delta = \frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta - y^\delta)(\varphi - \varphi^\delta), \qquad x \in \Omega.$$

$$a^*(p^\delta, \chi^\delta) + \int_\Omega \frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta - y^\delta) p^\delta \chi^\delta \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla y^\delta \cdot \nabla (y - y^\delta) \mathrm{d}x + \int_\Omega (y^\delta - y^*)(y - y^\delta) \mathrm{d}x \geqslant 0,$$

这里 a 是由 A 定义的双线性泛函, a^* 是其共轭形式.

$$a(p^\delta, \chi^\delta) + \int_\Omega \frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta - y^\delta) p^\delta \chi^\delta \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla y^\delta \cdot \nabla (y - y^\delta) \mathrm{d}x + \int_\Omega (y^\delta - y^*)(y - y^\delta) \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

由此得到

$$\int_\Omega \frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta - y^\delta) p^\delta (y - y^\delta) \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla y^\delta \cdot \nabla (y - y^\delta) \mathrm{d}x + \int_\Omega (y^\delta - y^*)(y - y^\delta) \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

记

$$\mu^\delta = \frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta - y^\delta) p^\delta . \tag{11}$$

定理 4.2 假设 y^δ 是问题 (C_δ) 的最优解, $\varphi^\delta = T^\delta(y^\delta)$. 则存在 $\mu \in L^2(\Omega)$, $p^\delta \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, 满足

$$A\varphi^\delta+\frac{1}{\delta}\beta(\varphi^\delta-y^\delta)=0,\quad x\in\Omega;\ \varphi^\delta=0,\quad x\in\partial\Omega,\tag{12}$$

$$A^*p^\delta+\mu^\delta=\varphi^\delta-z,\quad x\in\Omega,\tag{13}$$

$$(\mu+y^\delta-y^*,y-y^\delta)_2+(\Delta y^\delta,\Delta(y-y^\delta))_2=0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{14}$$

首先讨论 μ^δ 的性质.

引理 4.3

$$\mu^\delta=\begin{cases}\frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta-y^\delta)p^\delta, & x\in\omega^\delta,\\ 0, & x\notin\omega^\delta.\end{cases}\tag{15}$$

且 $\mu^\delta\in H_0^1(\Omega)$. 其中 $\omega^\delta\overset{\text{def}}{=}\left\{x\in\Omega\mid\varphi^\delta(x)\geqslant y^\delta(x)\right\}$.

证明 第一个结论是明显的, ω^δ 是 Ω 的开子集. 下面将计算 μ^δ 的导数. 注意到

$$\mu^\delta=\frac{1}{\delta}\eta(\varphi^\delta-y^\delta)p^\delta,\quad \eta(r)=\begin{cases}0, & r\geqslant 0,\\ -2r, & -0.5\leqslant r\leqslant 0,\\ 1, & r\leqslant 0.5,\end{cases}$$

η 可微, 其导数为

$$\eta'(r)=\begin{cases}0, & r\in(-\infty,-0.5)\cup(0,+\infty),\\ -2, & r\in[-0.5,0],\end{cases}$$

μ^δ 可微

$$\frac{\partial\mu^\delta}{\partial x_i}=\frac{1}{\delta}\eta'(\varphi^\delta-y^\delta)\frac{\partial(\varphi^\delta-y^\delta)}{\partial x_i}p^\delta+\frac{1}{\delta}\eta(\varphi^\delta-y^\delta)\frac{\partial p^\delta}{\partial x_i},$$

$$\eta(\varphi^\delta-y^\delta),\ \eta'(\varphi^\delta-y^\delta)\in L^\infty(\Omega),\ p^\delta\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\subset L^2(\Omega),$$

$$\frac{\partial(\varphi^\delta-y^\delta)}{\partial x_i},\ \frac{\partial p^\delta}{\partial x_i}\in L^2(\Omega).$$

因此, $\partial\mu^\delta/\partial x_i\in L^2(\Omega)$, $\mu^\delta\in H^2(\Omega)$. 自然地, $\mu^\delta\in H_0^1(\Omega)$.

引理 4.4[15] $\forall u\in L^2(\Omega)$, 方程(10)有唯一解.

定理 4.5 存在 $H_0^1(\Omega)$ 子集 $\left\{p^\delta\right\}$ 的某子列弱收敛到 p^* $(\delta\to 0)$. $\left\{\mu^\delta\right\}$ 是 $H^{-1}(\Omega)$ 中有界列, 因此存在某子列弱收敛到 $\mu^*\in H^{-1}(\Omega)$.

证明 式(12)等价于

$$a^*(p^\delta,p^\delta)+\int_\Omega\frac{1}{\delta}\beta'(\varphi^\delta-y^\delta)(p^\delta)^2\mathrm{d}x=(\varphi^\delta-z,p^\delta)_2,\tag{16}$$

且 $\beta'\geqslant 0$, $\alpha\|p^\delta\|_{H^2(\Omega)}^2\leqslant\|\varphi^\delta-z\|_2\cdot\|p^\delta\|_2$, 即

$$\|p^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant\frac{1}{\alpha}\|\varphi^\delta-z\|_2,\tag{17}$$

这里 α 是一只与算子 Δ 和域 Ω 相关的常数. 因此存在 $\left\{p^\delta\right\}$ 的某子列(仍表示为本身)在 $H_0^1(\Omega)$ 弱收敛到点 p^*. 这也意味着 $\left\{A^*p^\delta\right\}$ 是 $H^{-1}(\Omega)$ 中有界集, $\left\{\mu^\delta=-A^*p+\varphi^\delta-z\right\}$ 也是有界集. 因此存在 $\mu^*\in H^{-1}(\Omega)$ 以及 $\left\{\mu^\delta\right\}$ 某子列, 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中弱收敛到 μ^*.

$$A^*p^*+\mu^*=\varphi^*-z,\quad x\in\Omega;\ p^*=0,\quad x\in\partial\Omega.\tag{18}$$

让 $\chi\in H_0^1(\Omega)$, $y=y^\delta+\chi$. 很明显, $y\in H_0^1(\Omega)$. 由式(14), 我们有

$$(\mu^\delta+y^\delta-y^*,\chi)_2+(\Delta y^\delta,\Delta\chi)=0.\tag{19}$$

记 $h^\delta=\Delta y^\delta\in L^2(\Omega)$, 上面的方程可表述为

$$\begin{cases}(\mu^\delta+y^\delta-y^*,\chi)_2+(h^\delta,\Delta\chi)=0, & \forall\chi\in H_0^1(\Omega),\\ -\Delta h^\delta=\mu^\delta+y^\delta-y^*.\end{cases}\tag{20}$$

因此方程(19)等价于

$$(-\Delta h^\delta,\chi)_2+(h^\delta,\Delta\chi)=0.\tag{21}$$

由Green公式, $(h^\delta,\Delta\chi)_2=(\Delta h^\delta,\chi)_2+\int_{\partial\Omega}h^\delta\frac{\partial\chi}{\partial n}\mathrm{d}\delta$, $\forall\chi\in H_0^1(\Omega)$. 利用方程(21)得到 $\forall\chi\in H_0^1(\Omega)$, $\int_{\partial\Omega}h^\delta\frac{\partial\chi}{\partial n}\mathrm{d}\delta=0$. 这意味着 $h^\delta|_{\partial\Omega}=0$. 因此 h^δ 是下述方程的唯一解:

$$-\Delta h^\delta=\mu^\delta+y^\delta-y^*\in L^2(\Omega),\qquad x\in\Omega;\ h^\delta|_{\partial\Omega}=0.\tag{22}$$

$\forall\delta>0$, $\mu^\delta+y^\delta-y^*\in L^2(\Omega)$, 而由引理4.4, 方程(22)有唯一解 $h^\delta\in H_0^1(\Omega)$. 此外, $\{\mu^\delta\}$ 是 $H^{-1}(\Omega)$ 中有界集, 故存在某子列弱收敛到点 $\mu^*\in H^{-1}(\Omega)$, $\{y^\delta\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛到 y^*, 存在 $\{h^\delta\}$ 的某子列在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛到点 h^*, 且 $-\Delta h^*=\mu^*$. 由唯一性, $h^*=\Delta y^*$. 而由式(16)得到: $a^*(p^\delta,p^\delta)\leqslant(u^\delta-z,p^\delta)_2$. 然而, a^* 是下半连续的, 因此, $(A^*p^*,p^*)\leqslant\liminf_{\delta\to0}(u^\delta-z,p^\delta)_2=(u^*-z,p^*)_2$, 进一步有

$$\langle A^*p^*,p^*\rangle=(u^*-z,p^*)_2-\langle\mu^*,p^*\rangle\leqslant(u^*-z,p^*)_2,\ \langle\mu^*,p^*\rangle\geqslant0.$$

定理4.6 假设 y^* 是问题(C)的最优解. 则 $\Delta y^*\in H_0^1(\Omega)$, 存在 $p^*\in H_0^1(\Omega)$ 和 $\lambda^*\geqslant0$, $\lambda^*\in H^{-1}(\Omega)$, 满足

(i) $\varphi^*=T(y^*)$;

(ii) $A^*p^*=\varphi^*-z-\mu^*$, $x\in\Omega$; $p^*|_{\partial\Omega}=0$;

(iii) $\langle\mu^*,p^*\rangle\geqslant0$.

注 如本文中 Δ 是任一下半连续算子 α, 结论成立.

5 逼近问题

下面讨论逼近问题. 设 $z\in L^2(\Omega)$,

$$U_b=\left\{u:\Omega\mapsto[0,b]\mid u\in L^2(\Omega)\right\},\qquad 0<b<+\infty.$$

问题(C_b) $\quad I^*(u)=\inf\limits_{u\in U_h}I^*(u)$.

定理5.1 $\forall b\in(0,+\infty)$ 问题(C_b)有唯一最优解.

证明 让 $\{u_k\}$ 是 I^* 在 U_b 中的极小化序列, 记 $y_k=T^*(u_k)$. 则存在常数 $C_1>0$,

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)}=\left[\int_\Omega|u_k|^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}\leqslant b\left[\int_\Omega 1\mathrm{d}x\right]^{1/2}\leqslant C_1,\qquad\forall k>1.$$

故存在 $\{u_k\}$ 的子列(仍表示为自身)在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛到点 $u\in L^2(\Omega)$. 由引理4.4, 存在唯一的 y, $-\Delta y_k=u_k\to u=-\Delta y$. 易证, U_b 是 $L^2(\Omega)$ 的闭凸子集, 因此, $u\in U_b$ 且 $y\in H^+(\Omega)$,

$$\frac12\int_\Omega\left\{|y-z|^2+|u\cdot y|\right\}\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\frac12\int_\Omega\left\{|y_k-z|^2+|u_k\cdot y_k|\right\}\mathrm{d}x,$$

这表明, $I^*(u)=\inf\limits_{u\in U_b}I^*(u)$.

假设存在 u_2, $u_2\in U_b$, 满足 $I^*(u_1)=I^*(u_2)=\inf\limits_{u\in U_b}I^*(u)$. 由 U_h 的凸性质, $[(u_1+u_2)/2]\in U_b$. 因此

$$I^*\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\left|\frac{y_1-y_2}{2}\right|^2+\left|\frac{\nabla y_1-\nabla y_2}{2}\right|^2\right\}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{|y_1-z|^2+|\nabla y_1|^2\right\}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{|y_2-z|^2+|\nabla y_2|^2\right\}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}I^*(u_1)+\frac{1}{2}I^*(u_2)=I^*(u_1)\leqslant I^*\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right).$$

因而

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\left|\frac{y_1-y_2}{2}\right|^2+\left|\frac{\nabla y_1-\nabla y_2}{2}\right|^2\right\}\mathrm{d}x=0,\ \nabla y_1=\nabla y_2,\ y_1=y_2.$$

如设 $b=+\infty$, 则 $U_{+\infty}=\left\{u:\Omega\mapsto[0,+\infty)\mid u\in L^2(\Omega)\right\}=L_+^2(\Omega)$. 这说明问题 $(\mathrm{C}_{+\infty})$ 等价于问题 (C^*). 由定理 5.1, 问题 $(\mathrm{C}_{+\infty})$ 有唯一的最优解 $u\in U_{+\infty}=L_+^2(\Omega)$, $I^*(u)=\inf\limits_{u\in U_{+\infty}}I^*(u)$.

定理 5.2 $\forall b\in(0,+\infty)$, 设 u_b 是问题 (C_b) 的最优解, u 是问题 (C^*) 的最优解, 则 u_b 在 $L_+^2(\Omega)$ 中收敛到点 $u(b\to+\infty)$.

证明 假设 $I_b=\inf\limits_{u\in U_b}I^*(u)=I^*(u_b)$. 由 $L_+^2(\Omega)$ 的定义, $U_b\to L_+^2(\Omega)(b\to+\infty)$. 因此,

$$\lim_{b\to\infty}I_b=I=\inf_{u\in L_+^2(\Omega)}I^*(u)=I^*(u),\text{即}\lim_{b\to\infty}I^*(u_b)=I^*(u),$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{|T^*(u_b)-z|^2+|u_b\cdot T^*(u_b)|\right\}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{|T^*(u)-z|^2+|u\cdot T^*(u)|\right\}\mathrm{d}x\Leftrightarrow$$
$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{|T^*(u_b)-z|^2+|\nabla T^*(u_b)|^2\right\}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{|T^*(u)-z|^2+|\nabla T^*(u)|^2\right\}\mathrm{d}x,$$

$\lim\limits_{b\to\infty}I^*(T^*(u_b))=I^*(u)$. 由 I^* 的下半连续性质, $T^*(u_b)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 $T^*(u)$, u_b 在 $L_+^2(\Omega)$ 中收敛到点 u.

[参 考 文 献]

[1] Adams D R, Lenhart S. An obstacle control problem with a source term[J]. Appl Math Optim, 2008, **47**(1): 79-95.

[2] Adams D R, Lenhart S. Optimal control of the obstacle for a parabolic variational inequality[J]. J Math Anal Appl, 2002, **268**: 602-614.

[3] Adams D R, Lenhart S, Yong J. Optimal control of the obstacle for an elliptic variational inequality [J]. Appl Math Optim, 1998, **38**: 121-140.

[4] Barbu V. Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems[M]. Math Sci Engrg. 190. San Diego: Academic Press, 1993.

[5] Chen Q. Indirect obstacle control problem for semilinear elliptic variational inequalities[J]. SIAM J Control Optim, 1999, **38**: 138-158.

[6] LOU Hong-wei. An optimal control problem governed by quasi-linear variational inequalities[J]. SIAM J Control Optim, 2003, **41**(4): 1229-1253.

[7] Chen Q. Optimal control for semilinear evolutionary variational bilateral problems[J]. J Math Anal Appl, 2003, **277**(1): 303- 323.

[8] Duvaunt G, Lions J L. Les Inequations en Mecanique et en Pysique[M]. Paris: Dunod, 1972.

[9] Bergounioux M, Kunisch K. Augmented Lagrangian techniques for elliptic state constrained optimal control problems[J]. SIAM J Control Optim, 1997, **35**: 1524- 1543.

[10] Bergounioux M. Optimal control of semilinear elliptic obstacle problems[J]. J Nonlinear Convex Anal, 2002, **3**(1): 25- 39.

[11] Chipot M. Variational Inequalities and Flow in Porous Media[M]. New York: Springer- Verlag, 1984.

[12] Bergounioux M, Lenhart S. Optimal control of bilateral obstacle problems[J]. SIAM J Control Optim, 2004, **43**(1): 240- 255.

[13] Bucur D, Buttazzo G, Trabeschi P. An existence result for optimal obstacles[J]. J Funct Anal, 1999, **162**(1): 96- 119.

[14] Buttazzo G, Wagner A. On the optimal shape of a rigid body supported by an elastic membrane[J]. Nonlinear Anal, 2000, **39**(1): 47- 63.

[15] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003, 85.

Optimal Obstacle Control Problem

ZHU Li[1], LI Xiu- hua[2], GOU Xing- ming[2]

(1. Department of Mathematics, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, P. R. China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract: Some properties of the state operators of the optimal obstacle control problem for elliptic variational inequality was discussed, and the existence, uniqueness and regularity of the optimal control problem were established. In addition, the approximate problem of the optimal obstacle problem also was studied.

Key words: obstacle problem; penalized method; optimality system; approximate problem