

堆浸浸出率灰色动态 GDM(1, 1) 预测研究^{*}

刘金枝¹, 吴爱祥²

(1. 上海水产大学 信息学院, 上海 200090;
2. 北京科技大学 土木与环境工程学院, 北京 100083)

(陈立群推荐)

摘要: 基于灰色系统理论扩展了 GM(1, 1) 模型建模方法. 给出了一些既改善原始数据列的光滑度, 又减少还原误差的变换函数构造条件. 首次将灰色动态模型结合变换函数应用于堆浸过程浸出率的预测. 结果表明: 该方法预测精度高, 为实现浸出动力学未来行为的预测和控制提供了一种新的方法.

关键词: 堆浸; 预测; 灰色理论; 动态模型

中图分类号: TD953 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 溶浸采矿技术在中国已得到广泛的研究和应用^[1-3]. 浸出率是矿山企业的主要技术经济指标之一, 因堆浸过程是一个复杂的非线性动力学过程, 该过程包含大量的非确定性因素, 目前还难以从浸出机理出发建立准确的理论模型^[4].

预测是根据对过去的讨论推测和了解未来行为, 其中邓聚龙教授于 1982 年发明的灰色系统理论可避免传统的统计方法的不足, 而只需要有限个数据就可预测不确定系统的未来行为^[5]. 近几十年来, 灰色系统理论已成功应用于某些多数据输入、离散数据以及少数据的不确定系统^[6-9]. 灰色系统理论建模的前提是原始数据序列经累加生成后呈现明显的指数规律^[10]. 然而若原始数据序列错乱分布, GM(1, 1) 模型将会产生很大的误差. 因此, 很多学者对 GM(1, 1) 模型的条件做了深入的研究^[11-13].

本文从分析数据中的偏差入手, 给出了构造变换函数的一些优化条件, 结合灰色动态预测 GDM(1, 1) 模型, 对浸出过程中浸出率的动态变化进行了预测研究, 以期实现对浸出动力学未来行为的准确预测和控制.

1 建模方法

1.1 数据处理的原则与机理

设

* 收稿日期: 2007-09-17; 修订日期: 2008-02-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50574099); 国家创新群体基金资助项目(50321402); 湖南省自然科学基金资助项目(06JJ30024)

作者简介: 刘金枝(1971—), 女, 湖南益阳人, 副教授, 博士(联系人, E-mail: liu0619@mail.csu.edu.cn).

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(n)), \quad x(k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

则 $\Delta_x(k) = |x(k) - x(k-1)|$ ($k = 2, 3, \dots, n$) 称为序列 x 在 k 处的偏差; $\alpha_x(k) = x(k-1)/x(k)$ 称为 x 的级比; $\delta_x(k) = |1 - \alpha_x(k)|$ 称为级比偏差; $\Gamma_x(k) = 1/(\delta_x(k))$ 称为光滑度.

邓聚龙教授指出: 当且仅当级比 $\alpha_x(k) \in (e^{-2/(n+1)}, e^{2/(n+1)})$ 时, GM(1, 1) 模型才有意义, 且精度较高, 即: $\delta_x(k)$ 应尽可能小^[14]. 而

$$\delta_x(k) = \frac{\Delta_x(k)}{x(k)}.$$

因此数据处理的机理是: 选择合适的处理序列, 使得其差异信息 $\Delta_x(k)$ 与变换数据 $x(k)$ 之比尽可能小.

1.2 GM(1, 1)模型建模条件

引理 1 设 $\{x_i\}$ 非负递增, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f(x) > 0$, $xf'(x) - f(x) < 0$. 则当 n 充分大时 ($x_i \neq x_j, 1 \leq i, j \leq n$),

$$\frac{f(x_n)}{\sum_{i=1}^n f(x_i)} < \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (1)$$

证明 因为 $\{x_i\}$ 单调递增, 若 $1 \leq i \leq n$, 则 $x_i \leq x_n$, 且

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0,$$

故 $f(x)/x$ 递减, 从而

$$f(x_n)/x_n \leq f(x_i)/x_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

即
$$xif(x_n) \leq xnf(x_i), \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

将以上各不等式相加, 注意到 x_i 和 $f(x_i)$ 的非负性得

$$\frac{f(x_n)}{\sum_{i=1}^n f(x_i)} \leq \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (2)$$

当 n 充分大时, 总有 $x_i \neq x_j, 1 \leq i, j \leq n$. 以上不等式中, 至少有一个是严格的, (1) 式得证.

引理 1 表明: 满足条件的变换函数能减少级比偏差, 改善光滑度.

定理 1 设 $\{x_i\}$ 非负递增, $f(x) > 0, f''(x) < 0, x \in (0, +\infty)$. 则函数 $y = f(x)$ 能提高序列 $\{x_i\}$ 的光滑度.

证明 令 $F(x) = xf'(x) - f(x)$, 则 $F'(x) = xf''(x) < 0$, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $F(0) = -f(0) < 0, F(x) < 0, x \in (0, +\infty)$. 引理 1 的条件满足, 结论成立.

令 $y_i = f(x_i), \hat{y}_i$ 为 GM(1, 1) 模型的拟合值, $\hat{x}_i = f^{-1}(\hat{y}_i)$ 为还原拟合值, 则

$$y_i - \hat{y}_i = f(x_i) - f(\hat{x}_i) = f'(\xi)(x_i - \hat{x}_i), \quad (3)$$

式中, ξ 位于 x_i 与 \hat{x}_i 之间.

还原误差与拟合误差之间的关系如下:

- (a) 当 $|f'(\xi)| < 1$ 时, 还原误差放大;
- (b) 当 $|f'(\xi)| = 1$ 时, 还原误差等于拟合误差;
- (c) 当 $|f'(\xi)| > 1$ 时, 还原误差小于拟合误差.

根据以上讨论、引理 1 及定理 1, 有以下结论:

定理 2 设 $\{x_i\}$ 非负递增, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f'(x) > 0$. 若 $1 < f'(x) < f(x)/x$ 或 $f'(x) > 1, f''(x) < 0$, 则变换 $y = f(x)$ 不仅能改善 $\{x_i\}$ 的光滑度, 还可减少还原误差.

1.3 变换函数的构造

考虑 $1 < f'(x) < f(x)/x$, 由右侧不等式 $f(x) > xf'(x)$, 记 $f(x) = xf'(x) + \varphi(x)$, 显然 $\varphi(x) > 0$. 解关于 $f(x)$ 的一阶常微分方程

$$f'(x) = \frac{f(x) - \varphi(x)}{x},$$

得 $f(x) = x \left[C - \int \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right]$, 其中 C 为任意常数.

通常, 将序列 $\{x_i\}$ 初始化后, 可取 $x_1 = 1$, 取 $f(1) = a$, 则

$$f(x) = x \left[a - \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right].$$

根据 $f(x)$ 满足的条件, 可选择 $\varphi(x)$ 如下:

$$\varphi(x) > 0, f'(x) = a - \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{\varphi(x)}{x} > 1,$$

容易验证文献[12-13]为定理 1 的一种特殊情形.

显然, 线性变换 $y = bx + c$ ($b > 1, c > 0$) 满足定理 2, 以下讨论怎样选择参数以获得最高精度.

(i) 参数 b

根据表达式(3), b 越大, 拟合误差越小; 另一方面, b 越小, 光滑性越好, 这是因为

$$g(b) = \frac{y_n}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{bx_n + c}{b \sum_{i=1}^n x_i + nc},$$

则
$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{c \left[nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]}{\left[b \sum_{i=1}^n x_i + nc \right]^2} > 0,$$

g 关于参数 b 单调递增. 因此 b 应在 $b = 1$ 的右侧邻域内取值.

(ii) 参数 c

记 $\{x(k)\}$ 为原始序列, $\{y(k)\}$ 为变化序列,

$$y(k) = bx(k) + c(k).$$

记 $\delta_y(k)$ 为序列 y 的级比偏差, 则

$$\begin{aligned} \delta_y(k) &= \frac{\Delta_y(k)}{y(k)} = \frac{|y(k) - y(k-1)|}{y(k)} = \\ &= \frac{b|x(k) - x(k-1)|}{bx(k) + c(k)} = \frac{b\Delta_x(k)}{bx(k) + c(k)}, \end{aligned}$$

于是
$$c(k) = \frac{b\Delta_x(k)}{\delta_y(k)} - bx(k).$$

事先取定 $\delta_y(k)$ 为 ε , 则

$$c(k) = \frac{b\Delta_x(k)}{\varepsilon} - bx(k).$$

因此, $c^* = \max_k c(k) = \max_k \left\{ b\Delta_x(k)/\varepsilon - bx(k) \right\}$, 从而变换 $y(k) = bx(k) + c^*$ 能保证变换序列 y 的级比偏差为 ε .

1.4 灰预测步骤

设有一组等时间间隔的原始数据序列:

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)).$$

首先检验级比是否落在可容区间内, 否则, 要对原始数据做变换处理. 然后, 经一次累加生成(I-AGO)得序列: $X^{(1)} = \text{AGO}X^{(0)}$,

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)),$$

其中

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

建立微分方程模型

$$dx^{(1)}/dt + ax^{(1)} = b, \quad (4)$$

其中, a 为发展系数, b 为灰作用量. 利用最小二乘法求解参数

$$\mu = (a, b)^T = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}_n,$$

式中

$$\mathbf{Y}_n = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))^T.$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.5(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)) & 1 \\ -0.5(x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(1)}(n) + x^{(1)}(n-1)) & 1 \end{pmatrix}.$$

解方程(4), 得

$$x^{(1)}(t) = Ce^{-at} + b/a. \quad (5)$$

令初始值 $t = 1: C = (x^{(1)}(1) - b/a)e^a$, 则

$$\hat{x}^{(1)}(t) = (x^{(0)}(1) - b/a)e^{-a(t-1)} + b/a. \quad (6)$$

当 $\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$ 时, 经一阶反累加生成(I-AGO)得白化方程时间响应函数

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1) = (1 - e^a)(x^{(0)}(1) - b/a)e^{-at}. \quad (7)$$

为了验证预测模型的有效性, 有必要进一步检验预测值与实际值之间的误差. 通常, 灰色模型 GM(1, 1) 的精度一般用“残差大小检验法”、“均方差比值检验法”等进行技术精度检验^[5]. 关于 GM(1, 1) 建模及其精度检验可通过 MATLAB 编程实现.

2 堆浸浸出率灰色预测

堆浸的浸出初期, 金属主要从矿石碎块表面和靠近表面的部分浸出, 浸出速率快, 浸出率增幅大; 浸出中后期, 金属主要从与溶浸液难接触的矿石碎块内部浸出, 此时浸出速率慢, 浸出率的增幅小. 同时, 布液制度也将随着浸出情况随时进行调整. 这说明在整个浸出过程中, 一方面, 随着时间的推移, 未来一些人为控制或外部干扰因素将不断进入系统, 影响浸出速率; 另一方面, 老数据将越来越不适应新情况, 其信息意义随着时间的推移而逐渐降低. 因此, 仅仅根据生产初期取得的一些数据建立的单个预测模型不能对浸出周期内各个时段的浸出率进行全程预测, 宜采用等维灰数递补的动态预测模型.

此处选取某铀矿石室内模拟实验进行预测, 浸出周期为 51 d^[15], 所得浸出率数据见表 1.

表 1 浸出率实验数据

时间 t/d	3	6	9	12	15	18
浸出率 $a/(%)$	19.08	39.92	52.02	61.11	67.27	71.87
时间 t/d	21	24	27	30	33	36
浸出率 $a/(%)$	75.80	77.54	78.96	80.03	81.03	81.85
时间 t/d	39	42	45	48	51	
浸出率 $a/(%)$	82.69	83.36	83.87	84.48	85.04	

以上数据表明, 浸出前期和中后期浸出率相差较大, 因此要利用前期数据进行长期预测, 就必须对原始数据进行弱化处理, 以消除其对预测精度的干扰。此处先选取前 10 个数据(前 30 d) 建立灰色预测 GM(1, 1) 模型, 利用该模型预测前期浸出率的变化情形; 从第 33 d 开始, 浸出率的增幅减小, 可直接建立 GM(1, 1) 预测模型进行预测, 得第 54 d 的浸出率数值, 同时将该预测值补充到原始数据序列中, 去掉第 1 个最老的数据, 再次建立 GM(1, 1) 模型, 预测下 1 个值, 重复以上步骤, 直到浸出过程结束。

取级比偏差 $\varepsilon = 0.035$, 根据定理 2 得变换函数

$$y = 3x/2 + 833.263,$$

相应的 GM(1, 1) 模型为

$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = 153\,825.25e^{0.0059k} - 152\,963.37$$

$$\hat{y}^{(0)}(k) = 904.8969e^{0.0059(k-1)}.$$

变换序列预测拟合结果见表 2。

表 2 浸出率变换数据预测拟合结果

实际值 y	预测值 \hat{y}	残差 r	相对误差 $R/(%)$
861.883 0	861.883 0	0	0
893.143 0	910.303 4	- 17.160 4	1.92
911.293 0	915.726 3	- 4.433 3	0.49
924.928 0	921.181 5	3.746 5	0.41
934.168 0	926.669 1	7.498 9	0.80
941.068 0	932.189 5	8.878 5	0.94
946.963 0	937.742 7	9.220 3	0.97
949.573 0	943.329 0	6.244 0	0.66
951.703 0	948.948 6	2.754 4	0.29
953.308 0	954.601 7	- 1.293 7	0.14

表 3 浸出序列预测结果

实际值 $x/(%)$	预测值 $\hat{x}/(%)$	残差 r	相对误差 $R/(%)$
19.08	19.080 0	0	0
39.92	41.360 3	- 1.440 0	3.61
52.02	54.975 5	- 2.955 5	5.68
61.11	58.612 3	2.497 7	4.09
67.27	62.270 7	4.999 3	7.43
71.87	65.951 0	5.919 0	8.24
75.80	69.653 1	6.146 9	8.11
77.54	73.377 3	4.162 7	5.37
78.96	77.123 7	1.836 3	2.33
80.03	80.892 5	- 0.862 5	1.08

其中, 均方差比值为 0.277 0; 平均相对误差为 0.75%, 平均精度为 99.25%, 预测模型

合格. 经数据还原, 由此可得前 30 d 浸出率预测结果及相应的拟合精度, 如表 3 所示.

对于后一阶段, 容易验证原始数据列满足 GM(1, 1) 模型建模条件的要求, 即可直接进行 I-AGO 生成.

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 10\,892.74e^{0.0075k} - 10\,811.707,$$

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 81.39e^{0.0075(k-1)}.$$

预测结果见表 4.

表 4 33 d 到 51 d 浸出率预测结果

实际值 $x/(%)$	预测值 $\hat{x}/(%)$	残差 r	相对误差 $R/(%)$
81.03	81.030 0	0	0
81.85	81.997 7	- 0.147 7	0.18
82.69	82.611 6	0.078 4	0.09
83.36	83.230 2	0.129 8	0.16
83.87	83.853 3	0.016 7	0.02
84.48	84.481 2	- 0.001 2	0
85.04	85.113 7	- 0.073 7	0.09

其中, 均方差比值为 0.064 1; 平均相对误差为 8.982 1E- 002, 平均精度为 99.911%. 以上结果表明: 所建模型预测精度非常高, 可利用此模型进行未来行为的预测. 首先可测得第 54 d 的浸出率, 接着加入这一数据, 同时去掉第 33 d 的数据, 建立预测模型, 对第 57 d 的浸出率进行预测. 重复以上步骤, 直到浸出过程结束. 预测结果见表 5.

表 5 浸出率动态预测结果

实际值 t/d	预测值 $\hat{x}/(%)$	预测模型 GM	模型精度 A
54	85.777 1	$\hat{x}^{(0)}(k) = 81.39e^{0.0075(k-1)}$	$c = 0.064\,1, p = 99.91$
57	86.360 1	$\hat{x}^{(0)}(k) = 82.115\,4e^{0.0072(k-1)}$	$c = 0.034\,2, p = 99.95$
...

关于浸出率预测值与实测值的比较见图 1.

3 结 论

1) 结合数据处理的原则与机理, 以及 GM(1, 1) 模型的建模可行性判定, 从理论上拓展了灰色系统建模的方法, 给出了一类既改变原始数据列的光滑性, 又缩小还原误差的变换函数的构造条件, 使灰色系统建模在原有基础上作了很大的拓展.

2) 针对线性变换 $y = bx + c$ 的情况, 分析了应怎样合理选取其参数, 才能提高 GM(1, 1) 模型的预测精度.

3) 首次将等维递补的灰色动态模型结合变换函数应用于堆浸过程浸出率的预测. 结果表明: 本文的方法预测精度高, 为实现浸出动力学未来行为的预测和控制提供了一种新的途径.

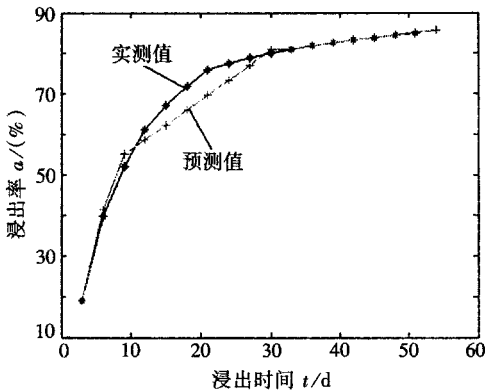


图 1 浸出率预测值与实测值比较

[参 考 文 献]

- [1] 李壮阔, 桂斌旺, 段希祥. 德兴铜矿堆浸厂的生产实践及技术研究[J]. 矿冶工程, 2002, **22**(1): 46-48.
- [2] 刘汉钊, 张永奎. 难处理低品位金矿细菌堆浸的现状和前景[J]. 四川地质学报, 1998, **18**(3): 234-240.
- [3] 田原, 关自斌, 高仁喜. 铀、金矿石的堆浸技术进展[J]. 铀矿冶, 1998, **17**(2): 121-126.
- [4] 谭凯旋, 王清良, 伍衡山. 溶浸采矿热力学和动力学[M]. 长沙: 中南大学出版社, 2003, 102-135.
- [5] 邓聚龙. 灰色系统理论导论[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990, 329-380.
- [6] Xu Q Y, Wen Y H. The application of Grey model on the forecast of passenger of international air transportation[J]. Transp Plann J Q, 1997, **26**(3): 525-555.
- [7] ZHAO Kui, DENG Hui, JIN Jie-fang. Predicted model and application of ore grade based on the Grey system theory[J]. System Engineering, 2004, **28**(11): 43-45.
- [8] TIEN Tzæ-li. A research on the prediction of machining accuracy by the deterministic grey dynamic model DGDM(1, 1, 1)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, **161**(11): 923-945.
- [9] LIN Chin-tsai, YANG Shih-yu. Forecast of the output value of Taiwan's opto-electronics industry using the grey forecasting model[J]. Technological Forecasting and Social Change, 2003, **70**(3): 177-186.
- [10] WU Wan-yih, CHEN Shuo-pei. A prediction method using the grey model GMC(1, n) combined with the grey relational analysis: a case study on internet access population forecast[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, **169**(4): 198-217.
- [11] Deng J L. GM model in Grey system theory[J]. Fuzzy Mathematics, 1985, **12**(2): 23-32.
- [12] CHEN Tao-jie. The extend of grey prediction model[J]. System Engineering, 1990, **16**(4): 52-55.
- [13] YU De-jiang. Discussion on method of grey system model[J]. System Engineering, 1991, **17**(5): 9-12.
- [14] Deng J L. On judging the admissibility of grey modeling via class ratio[J]. Journal of Grey System, 1993, **21**(4): 244-249.
- [15] 王清良. 大布矿床矿石室内浸出实验研究报告[R]. 衡阳: 核工业第六研究所, 2002.

Research on the Prediction of Leaching Rate in Heap Leaching Process by the Grey Dynamic Model GDM(1, 1)

LIU Jin zhi¹, WU Ai xiang²

(1. College of Information Technology, Shanghai Fisheries University, Shanghai 200090, P. R. China;

2. School of Civil and Environment Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: The method of developing GM(1, 1) model is extended on the basis of grey system theory. Some conditions of the transfer function, which not only improve the smooth degree of original data sequence but also decrease the revert error, were given. The grey dynamic model was first combined with the transfer function to predict the leaching rate in heap leaching process. The results show that high accuracy of prediction can be expected by the method used. This provides a new approach to realize the prediction and control of the future behavior of leaching kinetics.

Key words: leaching rate; prediction; grey theory; dynamic model