应用数学和力学, 第 29 卷 第 4 期
2008 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 4, Apr. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008)04-0432-07

多值一般混合隐似平衡问题解的迭代算法*

臧小燕, 邓 磊

(西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

(协平推荐)

摘要: 引入和研究了多值一般混合隐似平衡问题. 运用辅助原则的技巧提出和分析了求解多值一般混合隐似平衡问题的预测校正迭代算法,并在较弱的条件下证明了算法的收敛性.

关 键 词: 多值一般混合隐似平衡问题; 局部松弛 N-eta-g- 强单调; g- 局部松弛强单调
中图分类号: O177.91; O177.92 文献标识码: A

引 言

在纯理论和应用科学的广泛应用中,平衡问题理论已经成为应用数学非常有趣的一个分支,如文献[1-3]. 平衡问题已被推广和延伸到许多方向,如文献[4-7]. 近年来, Noor[8-12]和Ding[13-14]利用辅助原理的方法,提出了一些为解决广义混合变分不等式和一般混合变分不等式问题的预测校正迭代算法.

本文引入了新的多值一般混合隐似平衡问题,它包含了广义混合隐似平衡问题、多值一般混合变分不等式问题、广义似变分不等式问题、广义混合隐似变分不等式问题和广义集值强非线性隐变分不等式问题等等. 为求解多值一般混合隐似平衡问题,作者运用辅助原则的技巧提出和分析了新的预测校正迭代算法,并且在证明算法收敛性时,只要映射满足连续性,局部松弛 N-η-g 强单调和g- 局部松弛强单调即可.

1 预备知识

假设 H 是具有范数 $\|\cdot\|$和内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$的Hilbert 空间, $CB(H)$ 为H 中所有的非空有界闭子集族. $T, A: H \to CB(H)$ 为集值映象, $N_1, N_2, \eta: H\times H \to H$ 和$g: H \to H$ 为单值映象, $\varphi, F: H\times H \to (-\infty, +\infty]$ 为单值函数, K 为H 中的非空闭凸子集.

考虑下面的多值一般混合隐似平衡问题: 求 $x \in H, g(x) \in K, u \in T(x), v \in A(x)$ 使得

$$F(N_1(u,v), \eta(g(y), g(x))) + \varphi(g(y), g(x)) - \varphi(g(x), g(x)) \geqslant \langle N_2(u,u), g(x) - g(y)\rangle, \quad \forall g(y) \in K. \tag{1}$$

如果 $N_2(u,u) \equiv 0$, 问题(1) 等价于广义混合隐似平衡问题: 求 $x \in H, g(x) \in K, u \in$

* 收稿日期: 2007-11-13; 修订日期: 2008-02-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771173); 重庆市科委自然科学基金资助项目(CSTC, 2005BB2097)
作者简介: 臧小燕(1985—),河南临颍人,硕士研究生;
邓磊,教授(联系人.Tel: +86-23-68388606; E-mail: denglei@swu.edu.cn).

$T(x), v \in A(x)$ 使得

$$F(N_1(u,v), \eta(g(y), g(x))) + \varphi(g(y), g(x)) - \varphi(g(x), g(x)) \geqslant 0, \quad \forall g(y) \in K. \tag{2}$$

问题(2)和它的特殊情况已经被 Ding[4] 引入和研究.

如果 $K = H$, $F(u,v) = \langle u, v\rangle$, g 是恒等映射, $\varphi \equiv 0$, 问题(2) 等价于求 $x \in H$, $u \in T(x)$, $v \in A(x)$ 使得

$$\langle N_1(u,v), \eta(y,x)\rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in H. \tag{3}$$

问题(3)在 Noor 的文献[15]中被称为广义似变分不等式. 根据广义似变分不等式(3), 可以解决结构分析中出现的非凸非单调和集值问题, 如文献[16].

如果对任意的 $u, v \in H$, $F(u,v) = \langle u, v\rangle$, 问题(2) 等价于广义混合隐似变分不等式问题: 求 $x \in H$, $g(x) \in K$, $u \in T(x)$, $v \in A(x)$, 使得

$$\langle N_1(u,v), \eta(g(y), g(x))\rangle + \varphi(g(y), g(x)) - \varphi(g(x), g(x)) \geqslant 0, \quad \forall g(y) \in K. \tag{4}$$

问题(4)和它的特殊情况已经被许多人分析和研究过, 如文献[8-14].

如果 $K = H$, 对任意的 $x \in H$, $\varphi(g(x), \cdot) = f(x)$, 其中 $f: H \to \mathbf{R}$, $\eta(u,v) = u - v$, 问题(4) 等价于: 求 $x \in H$, $u \in T(x)$, $v \in A(x)$ 使得

$$\langle N_1(u,v), g(y) - g(x)\rangle + f(y) - f(x) \geqslant 0, \quad \forall y \in H. \tag{5}$$

该问题在 Huang 等人的文献[17]中被称为广义集值强非线性隐变分不等式问题.

如果 $K = H$, $F(u,v) \equiv 0$, 对任意的 $x, y \in H$, $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)$, 其中 $\varphi_1: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, 问题(1) 等价于多值一般混合变分不等式: 求 $x \in H$, $u \in T(x)$

$$\langle N_2(u,u), g(y) - g(x)\rangle + \varphi_1(g(y)) - \varphi_1(g(x)) \geqslant 0, \quad \forall g(y) \in H, \tag{6}$$

该问题已经被 Noor[10] 引入和研究.

定义 1 　设 K 是 H 中的非空闭凸子集, $T, A: H \to CB(H)$ 为集值映像, $g: H \to H$, $\eta: H \times H \to H$ 和 $N: H \times H \to CB(H)$ 为单值映像, $\varphi, F: K \times K \to (-\infty, +\infty]$ 为两个函数.

1) $F(\cdot, \cdot)$ 是与 T 和 A 相关的局部松弛的 N-η-g- 强单调的, 如果存在常数 $\alpha > 0$, 对任意的 $g(x), g(y), g(z) \in K$, $(u_1, v_1) \in T(x) \times A(x)$ 和 $(u_2, v_2) \in T(y) \times A(y)$ 都有

$$F(N(u_1,v_1), \eta(g(y), g(z))) + F(N(u_2,v_2), \eta(g(z), g(y))) \leqslant \alpha \| g(x) - g(z) \|^2.$$

2) $F(\cdot, \cdot)$ 是与 T 和 A 相关的 N-η-g- 强单调的, 如果对任意的 $g(x), g(y) \in K$, $(u_1, v_1) \in T(x) \times A(x)$ 和 $(u_2, v_2) \in T(y) \times A(y)$ 都有

$$F(N(u_1,v_1), \eta(g(y), g(x))) + F(N(u_2,v_2), \eta(g(x), g(y))) \leqslant 0.$$

3) $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是斜对称的, 如果对任意的 $x, y \in K$ 都有

$$\varphi(x,x) + \varphi(y,y) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) \geqslant 0.$$

4) $N(\cdot, \cdot)$ 是 g- 局部松弛强单调的, 如果存在常数 $\alpha > 0$, 对任意的 $u_1, u_2, z \in H$, $w_1 \in T(u_1)$ 和 $w_2 \in T(u_2)$ 都有

$$\langle N(w_1,w_1) - N(w_2,w_2), g(z) - g(u_2)\rangle \geqslant -\alpha \| g(u_1) - g(z) \|^2.$$

5) $N(\cdot, \cdot)$ 是 g- 强制的, 如果存在常数 $\mu > 0$, 对任意的 $u_1, u_2 \in H$, $w_1 \in T(u_1)$ 和 $w_2 \in T(u_2)$ 都有

$$\langle N(w_1,w_1) - N(w_2,w_2), g(u_1) - g(u_2)\rangle \geqslant \mu \| N(w_1,w_1) - N(w_2,w_2) \|^2.$$

6) T 是 M-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\delta>0$ 使得

$$M(T(u_1),T(u_2))\leqslant\delta\|u_1-u_1\|,$$

其中 $M(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $C(H)$ 上 Hausdorff 度量.

2 迭代算法和收敛定理

为解决多值一般混合隐似平衡问题, 该部分利用辅助原理的技巧, 提出新的预解校正算法, 并证明了算法的收敛性.

给定 $x\in H$, $g(x)\in K$, $u\in T(x)$, $v\in A(x)$, 考虑辅助变分不等式问题: 求 $\hat{x}\in H$, $g(\hat{x})\in K$, 使得

$$\begin{aligned}&\langle g(\hat{x})-g(x),g(y)-g(\hat{x})\rangle+\rho F(N_1(u,v),\eta(g(y),g(\hat{x})))+\\&\quad\rho\varphi(g(y),g(\hat{x}))-\rho\varphi(g(\hat{x}),g(\hat{x}))\geqslant\\&\quad\rho\langle N_2(u,u),g(\hat{x})-g(y)\rangle,\qquad\forall g(y)\in K,\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $\rho>0$ 是一个常数.

显然, 如果 $\hat{x}=x$, 则 $(\hat{x},u,v)$ 是多值一般混合隐似平衡问题(1)的一个解. 由此提出如下的预解矫正迭代算法.

算法 1 给定 $x_0\in H$ 使得 $g(x_0)\in K$, $u_0\in T(x_0)$, $v_0\in A(x_0)$, 利用下面的迭代算法, 得到问题(1)的逼近解 (x_n,u_n,v_n).

$$\begin{aligned}&\langle g(y_n)-g(x_n),g(y)-g(y_n)\rangle+\mu F(N_1(u_n,v_n),\eta(g(y),g(y_n)))+\\&\quad\mu\varphi(g(y),g(y_n))-\mu\varphi(g(y_n),g(y_n))\geqslant\\&\quad\mu\langle N_2(u_n,u_n),g(y_n)-g(y)\rangle,\qquad\forall g(y)\in K,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\langle g(z_n)-g(y_n),g(y)-g(z_n)\rangle+\beta F(N_1(c_n,d_n),\eta(g(y),g(z_n)))+\\&\quad\beta\varphi(g(y),g(z_n))-\beta\varphi(g(z_n),g(z_n))\geqslant\\&\quad\beta\langle N_2(c_n,c_n),g(z_n)-g(y)\rangle,\qquad\forall g(y)\in K,\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\langle g(x_{n+1})-g(z_n),g(y)-g(x_{n+1})\rangle+\rho F(N_1(e_n,f_n),\eta(g(y),\\&\quad g(x_{n+1})))+\rho\varphi(g(y),g(x_{n+1}))-\rho\varphi(g(x_{n+1}),g(x_{n+1}))\geqslant\\&\quad\rho\langle N_2(e_n,e_n),g(x_{n+1})-g(y)\rangle,\qquad\forall g(y)\in K,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{cases}u_n\in T(x_n);\ \|u_{n+1}-u_n\|\leqslant(1+1/(n+1))M(T(x_{n+1}),T(x_n)),\\v_n\in A(x_n);\ \|v_{n+1}-v_n\|\leqslant(1+1/(n+1))M(A(x_{n+1}),A(x_n)),\\c_n\in T(y_n);\ \|c_{n+1}-c_n\|\leqslant(1+1/(n+1))M(T(y_{n+1}),T(y_n)),\\d_n\in A(y_n);\ \|d_{n+1}-d_n\|\leqslant(1+1/(n+1))M(A(y_{n+1}),A(y_n)),\\e_n\in T(z_n);\ \|e_{n+1}-e_n\|\leqslant(1+1/(n+1))M(T(z_{n+1}),T(z_n)),\\f_n\in A(z_n);\ \|f_{n+1}-f_n\|\leqslant(1+1/(n+1))M(A(z_{n+1}),A(z_n)),\\\qquad\qquad\qquad n=0,1,2,\cdots,\end{cases}\tag{11}$$

其中 $\mu,\beta,\rho>0$ 是常数, M 是定义在 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 度量.

引理 1 设 (x,u,v) 是多值一般混合隐似平衡问题(1)的精确解, $\{(x_n,u_n,v_n)\}$ 是由算法 1 生成的问题(1)的逼近解列, $F(\cdot,\cdot)$ 是与 T 和 A 相关的关于常数 $\alpha>0$ 局部松弛的 N_1-η-g-强单调的, $N_2(\cdot,\cdot)$ 是关于常数 $\tau>0$ 的 g-局部松弛的强单调的, $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是斜对称的. 则有

$$\begin{aligned}&\|g(x_{n+1})-g(x)\|^2\leqslant\|g(x_n)-g(x)\|^2-\\&\quad[1-2\rho(\alpha+\tau)]\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\|g(z_n)-g(x)\|^2 \leqslant \|g(z_{n-1})-g(x)\|^2 - [1-2\beta(\alpha+\tau)]\|g(z_n)-g(y_n)\|^2, \tag{13}$$

$$\|g(y_n)-g(x)\|^2 \leqslant \|g(y_{n-1})-g(x)\|^2 - [1-2\mu(\alpha+\tau)]\|g(y_n)-g(x_n)\|^2. \tag{14}$$

证明　令 (x, u, v) 为多值一般混合隐似平衡问题(1) 的精确解, 则有 $g(x) \in K$, $u \in T(x)$, $v \in A(x)$ 且

$$\mu F(N_1(u, v), \eta(g(y), g(x))) + \mu\varphi(g(y), g(x)) - \mu\varphi(g(x), g(x)) \geqslant \mu\langle N_2(u, u), g(x)-g(y)\rangle, \quad \forall g(y) \in K, \tag{15}$$

$$\beta F(N_1(u, v), \eta(g(y), g(x))) + \beta\varphi(g(y), g(x)) - \beta\varphi(g(x), g(x)) \geqslant \beta\langle N_2(u, u), g(x)-g(y)\rangle, \quad \forall g(y) \in K, \tag{16}$$

$$\rho F(N_1(u, v), \eta(g(y), g(x))) + \rho\varphi(g(y), g(x)) - \rho\varphi(g(x), g(x)) \geqslant \rho\langle N_2(u, u), g(x)-g(y)\rangle, \quad \forall g(y) \in K, \tag{17}$$

其中 $\mu > 0$, $\beta > 0$, $\rho > 0$ 为常数.

在(17) 式中取 $y = x_{n+1}$, (10) 式中取 $y = x$, 可得

$$\rho F(N_1(u, v), \eta(g(x_{n+1}), g(x))) + \rho\varphi(g(x_{n+1}), g(x)) - \rho\varphi(g(x), g(x)) \geqslant \rho\langle N_2(u, u), g(x)-g(x_{n+1})\rangle, \tag{18}$$

$$\langle g(x_{n+1})-g(z_n), g(x)-g(x_{n+1})\rangle + \rho F(N_1(e_n, f_n), \eta(g(x), g(x_{n+1}))) + \rho\varphi(g(x), g(x_{n+1})) - \rho\varphi(g(x_{n+1}), g(x_{n+1})) \geqslant \rho\langle N_2(e_n, e_n), g(x_{n+1})-g(x)\rangle. \tag{19}$$

在(16) 式中取 $y = z_n$, (9) 式中取 $y = x$, 可得

$$\beta F(N_1(u, v), \eta(g(z_n), g(x))) + \beta\varphi(g(z_n), g(x)) - \beta\varphi(g(x), g(x)) \geqslant \beta\langle N_2(u, u), g(x)-g(z_n)\rangle, \tag{20}$$

$$\langle g(z_n)-g(y_n), g(x)-g(z_n)\rangle + \beta F(N_1(c_n, d_n), \eta(g(x), g(z_n))) + \beta\varphi(g(x), g(z_n)) - \beta\varphi(g(z_n), g(z_n)) \geqslant \beta\langle N_2(c_n, c_n), g(z_n)-g(x)\rangle. \tag{21}$$

在(15) 式中取 $y = y_n$, (8) 式中取 $y = x$, 可得

$$\mu F(N_1(u, v), \eta(g(y_n), g(x))) + \mu\varphi(g(y_n), g(x)) - \mu\varphi(g(x), g(x)) \geqslant \mu\langle N_2(u, u), g(x)-g(y_n)\rangle, \tag{22}$$

$$\langle g(y_n)-g(x_n), g(x)-g(y_n)\rangle + \mu F(N_1(u_n, v_n), \eta(g(x), g(y_n))) + \mu\varphi(g(x), g(y_n)) - \mu\varphi(g(y_n), g(y_n)) \geqslant \mu\langle N_2(u_n, u_n), g(y_n)-g(x)\rangle. \tag{23}$$

由 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是斜对称的, $F(\cdot, \cdot)$ 是与 T 和 A 相关的, 关于常数 $\alpha > 0$ 局部松弛的 N_1-η-g-强单调的, 且 $N_2(\cdot, \cdot)$ 是关于常数 $\tau > 0$ 的 g- 局部松弛强单调的, 可得

$$\begin{aligned}
&\langle g(x_{n+1})-g(z_n), g(x)-g(x_{n+1})\rangle \geqslant \\
&\quad -\rho[F(N_1(e_n, f_n), \eta(g(x), g(x_{n+1}))) + F(N_1(u, v), \eta(g(x_{n+1}), \\
&\quad g(x)))] + \rho\langle N_2(e_n, e_n) - N_2(u, u), g(x_{n+1}) - g(x)\rangle + \\
&\quad \rho[\varphi(g(x_{n+1}), g(x_{n+1})) + \varphi(g(x), g(x)) - \\
&\quad \varphi(g(x_{n+1}), g(x)) - \varphi(g(x), g(x_{n+1}))] \geqslant \\
&\quad -\rho\alpha\|g(z_n)-g(x_{n+1})\|^2 - \rho\tau\|g(z_n)-g(x_{n+1})\|^2 \geqslant
\end{aligned}$$

$$-\rho(\alpha+\tau)\|g(z_n)-g(x_{n+1})\|^2. \tag{24}$$

由于

$$\begin{aligned}&\|g(x)-g(z_n)\|^2=\\&\quad\|g(x)-g(x_{n+1})+g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2=\\&\quad\|g(x)-g(x_{n+1})\|^2+\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2+\\&\quad 2\langle g(x_{n+1})-g(z_n),g(x)-g(x_{n+1})\rangle,\end{aligned}$$

由(24)式可得

$$\begin{aligned}&\langle g(x_{n+1})-g(z_n),g(x)-g(x_{n+1})\rangle=\\&\quad\frac{1}{2}[\|g(x)-g(z_n)\|^2-\|g(x)-g(x_{n+1})\|^2-\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2]\geqslant\\&\quad-\rho(\alpha+\tau)\|g(z_n)-g(x_{n+1})\|^2.\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\|g(x_{n+1})-g(x)\|^2\leqslant\\&\quad\|g(z_n)-g(x)\|^2-[1-2\rho(\alpha+\tau)]\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2\leqslant\\&\quad\|g(z_n)-g(x)\|^2,\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\rho<1/(2(\alpha+\tau))$. 同理, 由(20)式加(21)式可得

$$\begin{aligned}&\|g(z_n)-g(x)\|^2\leqslant\\&\quad\|g(y_n)-g(x)\|^2-[1-2\beta(\alpha+\tau)]\|g(z_n)-g(y_n)\|^2\leqslant\\&\quad\|g(y_n)-g(x)\|^2,\end{aligned}\tag{26}$$

其中 $\beta<1/(2(\alpha+\tau))$. 由(22)式加(23)式可得

$$\begin{aligned}&\|g(y_n)-g(x)\|^2\leqslant\\&\quad\|g(x_n)-g(x)\|^2-[1-2\mu(\alpha+\tau)]\|g(y_n)-g(x_n)\|^2\leqslant\\&\quad\|g(x_n)-g(x)\|^2,\end{aligned}\tag{27}$$

其中 $\mu<1/(2(\alpha+\tau))$. 由式(25)、(26)、(27)可知, 不等式(12)、(13)和(14)成立.

把多值一般混合隐似平衡问题(1)的解集记为 Ω:

$$\begin{aligned}\Omega=\Big\{&(x,u,v)\in H\times H\times H: g(x)\in K,\ u\in T(x),\ v\in A(x)\ \text{和}\\&F(N_1(u,v),\eta(g(y),g(x)))+\varphi(g(y),g(x))-\varphi(g(x),g(x)))\geqslant\\&\langle N_2(u,u),g(x)-g(y)\rangle,\ \forall g(y)\in K\Big\}.\end{aligned}$$

定理 1 设 H 是有限维的 Hilbert 空间, K 为 H 中的非空闭凸子集. $T, A: H\to CB(H)$ 是 M- 连续的集值映像, $N_1, N_2, \eta: H\times H\to H$ 和 $g: H\to H$ 是连续单值映像, 其中 g 是内射, $N_2(\cdot,\cdot)$ 是关于常数 $\tau>0$ 的 g- 局部松弛的强单调算子, $F, \varphi: H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是连续二元函数, 其中 $F(\cdot,\cdot)$ 是与 T 和 A 相关的关于常数 $\alpha>0$ 的局部松弛的 N-η-g- 强单调算子, φ 在 $K\times K$ 上是斜对称的. 假设多值一般混合隐类等问题(1)的解集 Ω 非空. 则对任意给定的 $x_0\in H, g(x_0)\in K, u_0\in T(x_0)$ 和 $v_0\in A(x_0)$, 由算法 1 产生的迭代序列 $\{(x_n,u_n,v_n)\}$ 强收敛于多值一般混合隐似平衡问题(1)的解 $(\hat{x},\hat{u},\hat{v})$, 其中 $0<\rho,\mu,\beta<1/(2(\alpha+\tau))$.

证明 任意的 $(x,u,v)\in\Omega$, 由引理1的(12)~(14)式, 得到序列 $\{\|g(x_n)-g(x)\|\}$、$\{\|g(z_n)-g(x)\|\}$ 和 $\{\|g(y_n)-g(x)\|\}$ 是非增的. 由 g 是内射, 可知 $\{x_n\}$、$\{z_n\}$、$\{y_n\}$ 是有界的, 进一步可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[1-2\rho(\alpha+\tau)]\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2\leqslant\|g(x_0)-g(x)\|^2,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[1-2\beta(\alpha+\tau)]\|g(y_n)-g(z_n)\|^2\leqslant\|g(z_0)-g(x)\|^2,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[1-2\mu(\alpha+\tau)]\|g(y_n)-g(x_n)\|^2\leqslant\|g(y_0)-g(x)\|^2,$$

则当 $n\to\infty$时, $\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2\to 0$, $\|g(y_n)-g(z_n)\|^2\to 0$, $\|g(y_n)-g(x_n)\|^2\to 0$. 从而 $n\to\infty$时, $\|g(x_{n+1})-g(x_n)\|\leqslant\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|+\|g(z_n)-g(y_n)\|+\|g(y_n)-g(x_n)\|\to 0$.

因为$\{x_n\}$是有界的, 故存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_i}\}$满足$x_{n_i}\to\hat{x}$, $g(x_{n_i})\to g(\hat{x})$, 且 $g(\hat{x})\in K$. 又由 g 是内射, 可得$y_{n_i}\to\hat{x}$ 和$g(y_{n_i})\to g(\hat{x})$. T 和A 为H 上的M- 连续函数, 由 Aubin 和 Cellina 的文献[18] 命题 1.5.2 可知 T 和A 在H 上上半连续, 又因为 $u_n\in T(x_n)$ 和$v_n\in A(x_n)$, $n=0,1,2,\cdots$, 由 Border 的文献[19] 命题 11.11 可知存在$\{u_{n_i}\}$的子列$\{u_{n_{i_j}}\}$和$\{v_{n_i}\}$的子列$\{v_{n_{i_j}}\}$满足$u_{n_{i_j}}\to\hat{u}$, $v_{n_{i_j}}\to\hat{v}$, $\hat{u}\in T(\hat{x})$ 和 $\hat{v}\in A(\hat{x})$. 由(8)式可得

$$\begin{aligned}&\langle g(y_{n_{i_j}})-g(x_{n_{i_j}}),g(y)-g(y_{n_{i_j}})\rangle+\mu F(N_1(u_{n_{i_j}},v_{n_{i_j}}),\eta(g(y),g(y_{n_{i_j}})))+\\&\quad\mu\varphi(g(y),g(y_{n_{i_j}}))-\mu\varphi(g(y_{n_{i_j}}),g(y_{n_{i_j}}))\geqslant\\&\quad\mu\langle N_2(u_{n_{i_j}},u_{n_{i_j}}),g(y_{n_{i_j}})-g(y)\rangle,\qquad\forall g(y)\in K.\end{aligned}$$

因为 $F(\cdot,\cdot)$、$N(\cdot,\cdot)$、$\eta(\cdot,\cdot)$、g 和 φ 是连续的, 所以当 $j\to\infty$时,

$$\begin{aligned}&F(N_1(\hat{u},\hat{v}),\eta(g(y),g(\hat{x})))+\varphi(g(y),g(\hat{x}))-\varphi(g(\hat{x}),g(\hat{x}))\geqslant\\&\quad\langle N_2(\hat{u},\hat{u}),g(\hat{x})-g(y)\rangle,\qquad\forall g(y)\in K.\end{aligned}$$

因此 $(\hat{x},\hat{u},\hat{v})\in\Omega$ 为一般混合隐似平衡问题(1)的一个解.

由(12)式知, 对任意的 $(x,u,v)\in\Omega$, 有

$$\|x_{n+1}-\hat{x}\|\leqslant\|x_n-\hat{x}\|,\qquad\forall n=0,1,2,\cdots.$$

由此可得, 当 $n\to\infty$时, $x_n\to\hat{x}$. T 是H 上的M- 连续的, 由(11) 式知, 当 $n\to\infty$时,

$$\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant(1+1/(n+1))M(T(x_{n+1}),T(x_n))\to 0.$$

则对任意的 $n\in\mathbf{N}$, 当 $n\to\infty$时,

$$\|u_n-\hat{u}\|\leqslant\|u_{n+1}-u_n\|+\|u_{n+1}-u_{n+2}\|+\cdots+\|u_{n_{i_j}}-\hat{u}\|\to 0.$$

因此当 $n\to\infty$时, $u_n\to\hat{u}$. 同理当 $n\to\infty$时, $v_n\to\hat{v}$. □

[参 考 文 献]

[1] Blum E, Oetti W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Student, 1994, **63**: 123-145.

[2] Giannessi F, Maugeri A. Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems[M]. New York: Plenum Press, 1995.

[3] Moudafi A. Mixed equilibrium problems: sensitivity analysis and algorithmic aspect[J]. Comput Math Appl, 2002, **44**(8/9): 1099-1108.

[4] Ding X P. Iterative algorithm of solutions for generalized mixed implicit equilibrium-like problems[J]. Appl Math Comput, 2005, **162**(2): 799-809.

[5] 丁协平. 非紧广义凸空间内的拟平衡问题[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 578-584.

[6] Ding X P. Quasi-equilibrium problems with applications to infinite optimization and constrained games in general topological spaces[J]. Appl Math Lett, 2000, **13**(1): 21-26.

[7] Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] Noor M A. Some predictor-corrector algorithms for multi-valued variational inequalities[J]. J Optim Theory Appl, 2001, **108**(3): 659-671.

[9] Noor M A. A predictor-corrector algorithms for general variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 2001, **14**(1): 53-58.

[10] Noor M A. Solvability of multivalued general mixed variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 2001, **261**(2): 390-402.

[11] Noor M A. Iterative methods for generalized variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 2002, **15**(1): 77-82.

[12] Noor M A. Mixed quasi variational inequalities[J]. Appl Math Comput, 2003, **146**(2/3): 553-578.

[13] Ding X P. Predictor-corrector iterative algorithms for solving nonlinear mixed variational-like inequalities[J]. J Sichuan Normal Univ, 2003, **26**(1): 1-5.

[14] Ding X P. Predictor-corrector iterative algorithms for solving generalized mixed variational-like inequalities[J]. Appl Math Comput, 2004, **152**(3): 855-865.

[15] Noor M A. Generalized variational-like inequalities[J]. Math Comput Modelling, 1998, **27**(3): 93-101.

[16] Panagiotoupoulos P D, Stavroulakis G E. New types of variational principles based on the notion of quasi-differentiability[J]. Acta Mech, 1992, **94**(3/4): 171-194.

[17] Huang N J, Liu Y P, Tang Y Y, et al. On the generalized set-valued strongly nonlinear implicit variational inequalities[J]. Comput Math Appl, 1999, **37**(1): 29-36.

[18] Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions [M]. New York: Springer-Verlag, 1984.

[19] Border K C. Fixed Point Theorems With Applications to Economics and Game Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[20] Noor M A. Multivalued general equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 2003, **283**(1): 140-149.

Iterative Algorithm of Solutions for Multivalued General Mixed Implicit Equilibrium-Like Problems

ZANG Xiao-yan, DENG lei

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, P.R. China)

Abstract: The multivalued general mixed implicit equilibrium-like problems are introduced and studied. For solving these problems, a new predictor-corrector iterative algorithm was suggested and analyzed by using the auxiliary principle technique. The convergence of the suggested algorithm in weaker conditions was also proved.

Key words: multivalued general mixed implicit equilibrium-like problem; partially relaxed N-eta-g-strongly monotonicity; g-partially relaxed strongly monotonicity