应用数学和力学, 第 29 卷 第 4 期
2008 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 29, No. 4, Apr. 15, 2008

文章编号: 1000-0887(2008) 04-0409-23

Navier-Stokes 方程的全离散 Jacobi-球面调和谱方法*

黄　伟[1], 郭本瑜[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 上海师范大学 数学系; 上海高校科学计算重点实验室;
上海高校计算科学 E-研究院, 上海 200234)

(戴世强推荐)

摘要: 提出了一种用于球内 Navier-Stokes 方程的全离散 Jacobi-球面调和谱方法, 并证明了它的广义稳定性和收敛性. 数值结果表明了该方法的有效性. 该方法也可应用于球形区域中的其它问题.

关 键 词: 全离散 Jacobi-球面调和谱方法; 球内 Navier-Stokes 方程; 混合坐标
中图分类号: O174.41; O241.82; O357.1　　文献标识码: A

引　　言

Navier-Stokes 方程在研究不可压缩流体流动中起着重要的作用. 已有许多用于 Navier-Stokes 方程数值解的算法, 诸如有限差分法和有限元素法, 例如参见文献[1-5]和其中的参考文献. 在过去的 20 年中, 谱方法得到了快速发展. 谱方法的主要优点是具有高精度, 参见文献[6-11]. 也有作者提出了用于 Navier-Stokes 方程的谱格式, 参见文献[6, 12-16]. 然而, 所有这些谱格式只适合周期和半周期问题以及矩形区域上的问题. 众所周知, 当我们研究诸如球形区域中的浅水波、气象预报、地球内部流体流动、以及海洋科学和天体物理中某些方程时, 数值模拟球面上或球内流体的运动也是重要和令人感兴趣的, 参见文献[17-20]. 在这样的情形下, 通常的谱方法不再适用. 已有作者发展了球面调和逼近并将其应用于球面上偏微分方程的数值解, 参见文献[21-24], 但至今, 几乎还没有关于球内 Navier-Stokes 方程谱方法的公开发表的文献. 最近, 有作者发展了 Jacobi 逼近以及混合 Jacobi-球面调和逼近, 参见文献[25-28]. 这些工作为用谱方法求解球形区域内 Navier-Stokes 方程提供了可能.

在本文中, 我们考虑球内 Navier-Stokes 方程. 令 r、λ 和 θ 分别为半径、经度和纬度. 令 $\Omega = I \times S$, 其中 $I = \left\{ r \mid 0 \leqslant r < 1 \right\}$ 以及 $S = \left\{ (\lambda, \theta) \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi, -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \right\}$. 用

* 收稿日期: 2007-10-19; 修订日期: 2008-03-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771142); 上海市科委科技攻关资助项目(75105118); 上海市重点学科建设资助项目(T0401, J50101); 上海高校 E-研究院基金资助项目(E03004); 上海大学创新基金资助项目(A.10-0101-07-408)
作者简介: 黄伟(1960—), 男, 上海人, 副教授, 博士(联系人. Tel: +86-21-66133908(o); +86-21-59915200(h); E-mail: weihuang@mail.shu.edu.cn).

$\boldsymbol{U}(r,\lambda,\theta,t)$, $P(r,\lambda,\theta,t)$, $\boldsymbol{f}(r,\lambda,\theta,t)$ 和 $\boldsymbol{U}_0(r,\lambda,\theta)$ 分别表示速度向量、压力和密度之比、源项和初始状态．$\nu>0$ 是动力粘性．令 $T>0$．单位球内Navier-Stokes方程的形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}-\nu\Delta\boldsymbol{U}+\nabla P=\boldsymbol{f}, & \text{在 } \Omega\times(0,T] \text{ 内},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{U}=0, & \text{在 } \Omega\times[0,T] \text{ 内},\\ \boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}, & \text{在} \partial\Omega\times[0,T] \text{ 上},\\ \boldsymbol{U}(r,\lambda,\theta,0)=\boldsymbol{U}_0(r,\lambda,\theta), & \text{在 } \Omega \text{ 上}.\end{cases}\tag{1}$$

在实际计算中为避免构造散度自由的基函数的困难, 我们可以运用 Chorin[29] 和 T man[5] 创立的投影方法．Chorin[30] 也提出了人工压缩方法．按这种方法, 为取代不可压缩性我们考虑下列人工压缩方程:

$$\varepsilon\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0,\qquad \text{在 } \Omega\times(0,T] \text{ 内},\tag{2}$$

其中 $\varepsilon>0$ 适当小．我们也可参考文献[31] 的工作．尽管这样处理导致一个 $O(\varepsilon)$ 阶的附加逼近误差, 但我们不需要任何对压力的非物理边界条件, 例如条件 $\partial P/\partial n=0$ 就经常被强加在投影方法中．

我们将提出一种用于求解Navier-Stokes 方程连同方程(2) 的全离散Jacobi-球面调和谱方法．该方法具有几方面的优点．其一, 我们对空间自变量运用球面坐标, 从而避免在采用 Descartes 坐标情况下需要对在球面上的边界条件的逼近．其二, 我们对速度分量运用Descartes 坐标, 这可在本质上简化实际计算和数值分析．其三, 我们在半径方向采用 Jacobi 逼近, 可以克服由球面坐标引起的方程在 $r=0$ 处的奇异性所带来的困难．其四, 基于球面调和函数的正交性, 我们导出关于未知速度和压力的展开式系数所对应的离散方程组, 其非常适合于并行计算, 因而可节省许多工作量．其五, 得益于 Jacobi 逼近和球面调和逼近的快速收敛性, 即使在小模式下我们所提出的格式也能提供高精度的数值解．其六, 我们不需要任何对压力的人工边界条件, 而这种条件的引入会导致严重的数值误差．数值结果显示了该方法的有效性．

本文结构如下: 在第 1 节中, 我们引入混合 Jacobi-球面调和逼近．在第 2 节中, 我们构造用于方程(1) 连同(2) 的全离散 Jacobi-球面调和谱方法, 给出它的广义稳定性和收敛性的结果, 并提供若干数值结果．在第 3 节中, 我们证明前述的理论性结果．最后一节是结论．

1 混合 Jacobi-球面调和逼近

在本节中, 我们回顾文献[26] 所给出的混合 Jacobi-球面调和逼近．

1.1 若干带权 Sobolev 空间

令 $\alpha,\beta>-1$ 和 $\chi^{(\alpha,\beta)}(r)=(1-r)^{\alpha}r^{\beta}$．对整数 $s\geqslant 0$, 我们按常规定义带权 Sobolev 空间 $H^{s}_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)$, 其内积, 半范数和范数分别用 $(u,v)_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},I}$, $|v|_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},I}$ 和 $\|v\|_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},I}$ 表示．特别 $L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)=H^0_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)$, 其具有内积 $(u,v)_{\chi^{(\alpha,\beta)},I}$ 和范数 $\|v\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},I}$．此外 $\|v\|_{\infty,I}=\|v\|_{L^{\infty}(I)}$．另外定义

$${}^{0}H^{1}_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)=\left\{v \mid v\in H^{1}_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I) \text{ 并且 } v(1)=0\right\}.$$

在后续讨论中, 我们将考虑在某些非一致的带权 Sobolev 空间中的正交投影．为简便起见, 我们用 $\partial_r^m v$ 表示 $\partial^m v/\partial r^m$ 等．第 1 个这样的空间定义为

$$H^{s}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(I)=\left\{v \mid v \text{ 在} I \text{ 上可测并且 } \|v\|_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},A,I}<\infty\right\},$$

其配置下列的半范数和范数

$$|v|_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},A,I} = \|\partial_r^s v\|_{\chi^{(\alpha+s,\beta+s)},I}, \quad \|v\|_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},A,I} = \left(\sum_{k=0}^{s} |v|^2_{k,\chi^{(\alpha,\beta)},A,I}\right)^{1/2}.$$

令 $\alpha, \beta, \gamma, \delta > -1$. 第2个特定的空间定义为

$$H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(I) = \left\{ v \mid v \text{ 在 } I \text{ 上可测并且 } \|v\|_{1,\alpha,\beta,\gamma,\delta,I} < \infty \right\},$$

其中 $$\|v\|_{1,\alpha,\beta,\gamma,\delta,I} = \left(|v|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},I} + \|v\|^2_{\chi^{(\gamma,\delta)},I} \right)^{1/2}.$$

其次, 用 $D(S)$ 表示定义于球面 S 上, 关于变量 λ 具有周期 2π 并且在 $\theta = \pm\pi/2$ 处正则的所有无穷可微函数所组成的集合. 根据文献[32], 对任何 $v \in D(S)$, 当 $\theta \to \pm\pi/2$ 时, v 趋向于一个与变量 λ 无关的有限极限. 因而我们得到在 $\theta = \pm\pi/2$ 处 $\partial_\lambda v = 0$. 用 $D'(S)$ 表示 $D(S)$ 的对偶空间. 对任何 $v \in D'(S)$, 我们按通常方式定义它的广义导数, 见文献[23]. 此外记

$$\nabla_S v = \left(\frac{1}{\cos\theta}\partial_\lambda v, \partial_\theta v \right)^{\mathrm{T}}, \quad \Delta_S v = \frac{1}{\cos^2\theta}\partial_\lambda^2 v + \frac{1}{\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\partial_\theta v).$$

令 $\bar{v}$ 为 v 的共轭. 空间 $L^2(S) = \left\{ v \mid v \in D'(S) \text{ 并且 } \|v\|_S < \infty \right\}$, 其具有的内积和范数为

$$(u, v)_S = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(\lambda, \theta)\bar{v}(\lambda, \theta)\cos\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\lambda, \quad \|v\|_S = (v, v)_S^{1/2}.$$

空间 $H^1(S) = \left\{ v \mid v \in L^2(S), \nabla_S v \in [L^2(S)]^2 \right\}$, 其配置如下的半范数和范数:

$$|v|_{1,S} = \|\nabla_S v\|_S = \left(\left\| \frac{1}{\cos\theta}\partial_\lambda v \right\|_S^2 + \|\partial_\theta v\|_S^2 \right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{1,S} = \left(\|v\|_S^2 + |v|_{1,S}^2 \right)^{1/2}.$$

对任何整数 $k > 0$, 我们递归地定义空间

$$H^{2k}(S) = \left\{ v \mid v \in H^{2k-1}(S), \Delta_S^k v \in L^2(S) \right\},$$

$$H^{2k+1}(S) = \left\{ v \mid v \in H^{2k}(S), \nabla_S(\Delta_S^k v) \in [L^2(S)]^2 \right\},$$

其半范数和范数为

$$|v|_{2k,S} = \|\Delta_S^k v\|_S, \quad \|v\|_{2k,S} = \left(\|v\|^2_{2k-1,S} + |v|^2_{2k,S} \right)^{1/2},$$

$$|v|_{2k+1,S} = \|\nabla_S(\Delta_S^k v)\|_S, \quad \|v\|_{2k+1,S} = \left(\|v\|^2_{2k,S} + |v|^2_{2k+1,S} \right)^{1/2}.$$

此外, $\|v\|_{\infty,S} = \|v\|_{L^\infty(S)}$.

进一步, 对定义在 Ω 上的函数,

$$\nabla v = \left(\partial_r v, \frac{1}{r\cos\theta}\partial_\lambda v, \frac{1}{r}\partial_\theta v \right)^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta v = \frac{1}{r^2}\left(\partial_r(r^2\partial_r v) + \frac{1}{\cos^2\theta}\partial_\lambda^2 v + \frac{1}{\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\partial_\theta v) \right).$$

空间 $L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega) = L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I; L^2(S))$, 其具有下列的内积和范数:

$$(u, v)_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(r, \lambda, \theta)\bar{v}(r, \lambda, \theta)\cos\theta\,\chi^{(\alpha,\beta)}(r)\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}r,$$

$$\|v\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} = (v, v)^{1/2}_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}.$$

其次, 空间 $H^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega), \nabla v \in [L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)]^3 \right\}$ 和 ${}^0H^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega) = \left\{ v \mid v \in H^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega) \text{ 并且 } v(1, \lambda, \theta) = 0 \right\}$, 其具有下列的半范数和范数:

$$|v|_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} = \left(\|\partial_r v\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} + \left\| \frac{1}{r\cos\theta}\partial_\lambda v \right\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} + \left\| \frac{1}{r}\partial_\theta v \right\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} \right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} = \left(\|v\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} + |v|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} \right)^{1/2}.$$

我们定义空间 $H^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)=\left\{v \mid v\in H^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega),\ \Delta v\in L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)\right\}$，其配置下列的半范数和范数:

$$|v|_{2,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=\|\Delta v\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega},$$
$$\|v\|_{2,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=\left(\|v\|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}+|v|^2_{2,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\right)^{1/2}.$$

此外 $\|v\|_{\infty,\Omega}=\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$.

我们也定义非一致的带权 Sobolev 空间

$$H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)=\left\{v \mid v\in L^2_{\chi^{(\gamma,\delta)}}(\Omega),\ \nabla v\in [L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)]^3\right\},$$

其配置范数

$$\|v\|_{1,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega}=\left(|v|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}+\|v\|^2_{\chi^{(\gamma,\delta)},\Omega}\right)^{1/2}.$$

特别，${}^0H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)=\left\{v \mid v\in H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)\ \text{并且}\ v(1,\lambda,\theta)=0\right\}$.

为了在即将展开的讨论中描述逼近结果的需要，我们对整数 $s,q\geqslant 0$ 引入空间 $H^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)=H^s_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(I;L^2(S))\cap L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I;H^q(S))$，其配置如下的半范数和范数:

$$|v|_{H^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)}=\left(|v|^2_{H^s_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(I;L^2(S))}+|v|^2_{L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I;H^q(S))}\right)^{1/2},$$
$$\|v\|_{H^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)}=\left(\|v\|^2_{H^s_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(I;L^2(S))}+\|v\|^2_{L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I;H^q(S))}\right)^{1/2}.$$

我们也需要空间

$$B^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)=H^s_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(I;H^{q-1}(S))\cap H^{s-1}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(I;H^q(S)),\qquad s,q\geqslant 1,$$
$$B^{1,q}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)=H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(I;H^{q-1}(S))\cap L^2_{\chi^{(\gamma,\delta)}}(I;H^q(S)),\qquad q\geqslant 1,$$

它们的半范数和范数类似定义.

注记 1.1　s 和 q 为非整数时，我们可以按照文献[33]中的空间插值定义相应的空间.

1.2　正交系

I 上的 m 次 Jacobi 多项式由

$$(1-r)^\alpha r^\beta J_m^{(\alpha,\beta)}(r)=\frac{(-1)^m}{m!}\partial_r^m\left((1-r)^{\alpha+m}r^{\beta+m}\right)$$

定义. $J_m^{(\alpha,\beta)}$ 的集合是一个完备的 $L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)$- 正交系，因而，对任何 $v\in L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)$,

$$v(r)=\sum_{m=0}^{\infty}\hat{v}_m^{(\alpha,\beta)}J_m^{(\alpha,\beta)}(r),\quad \hat{v}_m^{(\alpha,\beta)}=\frac{1}{\gamma_m^{(\alpha,\beta)}}\int_0^1 v(r)J_m^{(\alpha,\beta)}(r)\chi^{(\alpha,\beta)}(r)\,\mathrm{d}r,$$

其中

$$\gamma_m^{(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+\beta+1)}.$$

令 $L_n(z)$ 为 n 次 Legendre 多项式，规一化的关联 Legendre 函数由

$$L_{l,n}(z)=\sqrt{\frac{(2n+1)(n-l)!}{2(n+l)!}}(1-z^2)^{l/2}\partial_z^l L_n(z),\qquad l\geqslant 0,\ n\geqslant |l|,$$
$$L_{l,n}(z)=L_{-l,n}(z),\qquad l<0,\ n\geqslant |l|$$

给出. 球面调和函数定义为

$$Y_{l,n}(\lambda,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\lambda}L_{l,n}(\sin\theta),\qquad n\geqslant |l|.$$

$Y_{l,n}$ 的集合是一个规一化的完备的 $L^2(S)$- 正交系. 因而，对任何 $v\in L^2(S)$,

$$v(\lambda,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=-n}^{n}\hat{v}_{l,n}Y_{l,n}(\lambda,\theta),\quad \hat{v}_{l,n}=\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}v(\lambda,\theta)Y_{l,n}(\lambda,\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda.$$

此外，$J_m^{(\alpha,\beta)}Y_{l,n}$ 的集合是一个完备的 $L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$- 正交系. 故对任何 $v\in L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$,

$$v(r,\lambda,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=-n}^{n}\hat{v}_{m,l,n}^{(\alpha,\beta)}J_m^{(\alpha,\beta)}(r)Y_{l,n}(\lambda,\theta),$$

其系数

$$\hat{v}_{m,l,n}^{(\alpha,\beta)}=\frac{1}{\gamma_m^{(\alpha,\beta)}}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}v(r,\lambda,\theta)J_m^{(\alpha,\beta)}(r)Y_{l,n}(\lambda,\theta)\cos\theta\chi^{(\alpha,\beta)}(r)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}r.$$

1.3 正交投影

令 M 和 N 为非负整数．$\mathscr{P}_M(I)$ 表示所有次数不超过 M 的代数多项式在 I 上的限制所组成的集合． 特别, ${}^0\mathscr{P}_M(I)=\left\{\phi\mid\phi\in\mathscr{P}_M(I)\text{ 并且 }\phi(1)=0\right\}$． 其次, $W_N(S)$ 表示由 $\tilde{W}_N(S)=\mathrm{span}\left\{Y_{l,n}\,\middle|\,|l|\leqslant n\leqslant N\right\}$ 中所有实值函数所组成的子集．我们令

$$W_{M,N}(\Omega)=\mathscr{P}_M(I)\otimes W_N(S),\quad {}^0W_{M,N}(\Omega)={}^0\mathscr{P}_M(I)\otimes W_N(S).$$

在下一节中, 我们将要运用两个重要的正交投影．为此, 我们引入下列双线性型:

$$a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega}(u,v)=(\nabla u,\nabla v)_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}+(u,v)_{\chi^{(\gamma,\delta)},\Omega},$$
$$\forall u,v\in H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega).$$

正交投影 $P_{M,N,\alpha,\beta,\Omega}: L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)\to W_{M,N}(\Omega)$, 满足

$$(P_{M,N,\alpha,\beta,\Omega}v-v,\phi)_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=0,\qquad\forall\phi\in W_{M,N}(\Omega).$$

正交投影 ${}^0P^1_{M,N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega}: {}^0H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)\to{}^0W_{M,N}(\Omega)$, 满足

$$a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega}({}^0P^1_{M,N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega}v-v,\phi)=0,\qquad\forall\phi\in{}^0W_{M,N}(\Omega).$$

1.4 向量函数空间

为了简化实际计算和数值分析, 我们在本项工作中将运用混合坐标． 确切地说, 我们将对速度分量运用 Descartes 坐标, 对空间自变量运用球面坐标．

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 Descartes 坐标: $x_1=r\cos\lambda\cos\theta$, $x_2=r\sin\lambda\cos\theta$, $x_3=r\sin\theta$． 用 $\boldsymbol{e}_j$ 表示在 x_j 方向上的单位向量, $v^{(j)}$ 表示速度在 x_j 方向上的分量． 此处, $v^{(j)}$ 是 r、λ 和 θ 的函数.

我们定义空间 $\boldsymbol{H}^s_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\mid v^{(j)}\in H^s_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega),j=1,2,3\right\}$, 其具有下列半范数和范数:

$$|\boldsymbol{v}|_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=\left(\sum_{j=1}^{3}|v^{(j)}|^2_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\right)^{1/2},$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=\left(\sum_{j=1}^{3}\|v^{(j)}\|^2_{s,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\right)^{1/2}.$$

特别, $\boldsymbol{H}^0_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)=\boldsymbol{L}^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$, 其范数 $\|\boldsymbol{v}\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=\|\boldsymbol{v}\|_{0,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}$, 内积 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}$ 如通常的那样． 我们也类似定义空间 ${}^0\boldsymbol{H}^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)$, ${}^0\boldsymbol{H}^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)$, $\boldsymbol{B}^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)$, $\boldsymbol{B}^{1,q}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)$ 以及它们的半范数和范数.

对于数量函数 v, 我们按通常方式定义空间 $W^{1,\infty}(\Omega)$, 其范数

$$\|v\|_{1,\infty,\Omega}=\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}=$$
$$\max\left(\|v\|_{\infty,\Omega},\ \|\partial_r v\|_{\infty,\Omega},\ \left\|\frac{1}{r\cos\theta}\partial_\lambda v\right\|_{\infty,\Omega},\ \left\|\frac{1}{r}\partial_\theta v\right\|_{\infty,\Omega}\right).$$

对于向量函数 $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{L}^\infty(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\mid v^{(j)}\in L^\infty(\Omega),j=1,2,3\right\},$$
$$\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\mid v^{(j)}\in W^{1,\infty}(\Omega),j=1,2,3\right\}.$$

接下来, 令

$$\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\mid v^{(j)}\in W_{M,N}(\Omega),\ j=1,2,3\right\},$$
$${}^{0}\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\mid v^{(j)}\in{}^{0}W_{M,N}(\Omega),\ j=1,2,3\right\}.$$

我们定义向量函数的正交投影为

$$Q_{M,N}\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{3}(Q_{M,N}v^{(j)})\boldsymbol{e}_j,\quad Q_{M,N}=P_{M,N,\alpha,\beta,\Omega}\text{ 或 }{}^{0}P^{1}_{M,N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega}.$$

2　全离散混合谱格式

在本节中, 我们提出用于方程(1)连同(2)的全离散混合 Jacobi-球面调和谱方法.

2.1　混合格式

为了使压力 P 固定, 我们要求对所有 $0\leqslant t\leqslant T$,

$$P(r,\lambda,\theta,t)\in L^2_{0,\chi^{(0,2)}}(\Omega)=\left\{v\mid v\in L^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega),\ (v,1)_{\chi^{(0,2)},\Omega}=0\right\}.$$

也为了描述的简便起见, 令

$$a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=\sum_{j=1}^{3}(\nabla w^{(j)},\nabla v^{(j)})_{\chi^{(0,2)},\Omega},\quad b(w,\boldsymbol{v})=(w,\nabla\cdot\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega},$$

$$J(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=\sum_{j=1}^{3}\left((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)w^{(j)}+\frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})w^{(j)}\right)\boldsymbol{e}_j.$$

显然, 若 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, 则 $J(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}$. 此外, 由文献[26]的命题 3.1～3.3, 当 $\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{0}$ 时

$$a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+(\Delta\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}=0,\quad b(w,\boldsymbol{v})+(\nabla w,\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}=0,\tag{3}$$

$$(J(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+(J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w})_{\chi^{(0,2)},\Omega}=0.\tag{4}$$

方程(1)的弱形式是求 $(\boldsymbol{U},P)\in\boldsymbol{L}^{\infty}(0,T;\boldsymbol{L}^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))\cap\boldsymbol{L}^2(0,T;{}^{0}\boldsymbol{H}^1_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))\times L^2(0,T;L^2_{0,\chi^{(0,2)}}(\Omega))$, 使

$$\begin{cases}(\partial_t\boldsymbol{U}(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+(J(\boldsymbol{U}(t),\boldsymbol{U}(t)),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\nu a(\boldsymbol{U}(t),\boldsymbol{v})-\\ \qquad b(P(t),\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega},\qquad\forall\boldsymbol{v}\in{}^{0}\boldsymbol{H}^1_{\chi^{(0,2)}}(\Omega),\ 0<t\leqslant T,\\ b(w,\boldsymbol{U}(t))=0,\qquad\forall w\in L^2_{0,\chi^{(0,2)}}(\Omega),\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ \boldsymbol{U}(r,\lambda,\theta,0)=\boldsymbol{U}_0(r,\lambda,\theta),\qquad\text{在 }\Omega\text{ 上}.\end{cases}\tag{5}$$

我们将构造全离散混合谱格式. 令 τ 为时间 t 方向的网格步长,

$$T_\tau=\left\{t=k\tau\mid k=0,1,2,\cdots,[T/\tau]\right\}.$$

我们使用记号 $v_t(t)=(v(t+\tau)-v(t))/\tau$. 容易看出

$$2(v_t(t),v(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega}=(\|v(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega})_t-\tau\|v_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}.\tag{6}$$

令 σ_1、σ_2、σ_3 为介于 0 和 1 间的参数, $\widetilde{W}_{M,N}(\Omega)=W_{M,N}(\Omega)\cap L^2_{0,\chi^{(0,2)}}(\Omega)$. 本文所论格式是求 $(\boldsymbol{u}(t),p(t))\in{}^{0}\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega)\times\widetilde{W}_{M,N}(\Omega)$, 使

$$\begin{cases}(\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+(J(\boldsymbol{u}(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{u}(t)),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\nu a(\boldsymbol{u}(t)+\\ \qquad\sigma_2\tau\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{v})-b(p(t)+\sigma_3\tau p_t(t),\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega},\\ \qquad\qquad\forall\boldsymbol{v}\in{}^{0}\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau,\\ \varepsilon(p_t(t),w)_{\chi^{(0,2)},\Omega}+b(w,\boldsymbol{u}(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{u}_t(t))=0,\\ \qquad\qquad\forall w\in\widetilde{W}_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau,\\ \boldsymbol{u}(r,\lambda,\theta,0)=\boldsymbol{u}_0(r,\lambda,\theta)={}^{0}P^{1}_{M,N,0,2,0,0,\Omega}\boldsymbol{U}_0(r,\lambda,\theta),\qquad\text{在 }\Omega\text{ 上},\\ p(r,\lambda,\theta,0)=p_0(r,\lambda,\theta)=P_{M,N,0,2,\Omega}P_0(r,\lambda,\theta),\qquad\text{在 }\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{7}$$

其中 P_0 可以由关系(见文献[4])

$$\Delta P_0(r,\lambda,\theta)=\nabla\cdot(\boldsymbol{f}(r,\lambda,\theta,0)-(\boldsymbol{U}_0(r,\lambda,\theta)\cdot\nabla)\boldsymbol{U}_0(r,\lambda,\theta))\qquad 在\ \Omega\ 上$$

确定. 若 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$, 则式(7)是显格式. 否则, 在每个时间节点处都需要通过求解一个线性方程组来计算 $\boldsymbol{u}$ 和 p 的值. 为了简便起见, 本文仅考虑 $1/2<\sigma_2,\sigma_3\leqslant 1$ 的情形. 我们记 $Q(\sigma_2,\sigma_3)=\sigma_2+\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3$. 显然, $Q(\sigma_2,\sigma_3)=2\sigma_2(1/2-\sigma_3)+\sigma_3$. 于是, 对任何固定的 $\sigma_3>1/2$, $Q(\sigma_2,\sigma_3)$ 随 σ_2 增加而严格减少. 因此, 若 $1/2<\sigma_2,\sigma_3\leqslant 1$, 则

$$0\leqslant 1-\sigma_3=Q(1,\sigma_3)\leqslant Q(\sigma_2,\sigma_3)<Q(1/2,\sigma_3)=1/2. \tag{8}$$

2.2 混合格式的稳定性

现在我们考虑格式(7)的稳定性. 由于格式(7)是一个非线性问题, 所以它不具有通常意义下的稳定性, 但它可以有文献[3, 12]中所描述的广义稳定性. 为了表明这一点, 我们假设 $\boldsymbol{u}_0$、p_0、$\boldsymbol{f}(t)$ 和式(7)的第2式的右端分别有误差 $\boldsymbol{u}_0$、p_0、$\boldsymbol{f}(t)$ 和 $g(t)$. 它们诱导出 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $p(t)$ 的误差, 分别用 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $p(t)$ 表示. 那么, 我们由式(7)可得到

$$\begin{cases}(\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+(J(\boldsymbol{u}(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}(t)),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\ \qquad(J(\boldsymbol{u}(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{u}(t)),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\nu a(\boldsymbol{u}(t)+\sigma_2\tau\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{v})-\\ \qquad b(p(t)+\sigma_3\tau p_t(t),\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega},\qquad\forall\boldsymbol{v}\in{}^0\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau,\\ \varepsilon(p_t(t),w)_{\chi^{(0,2)},\Omega}+b(w,\boldsymbol{u}(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{u}_t(t))=(g(t),w)_{\chi^{(0,2)},\Omega},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\forall w\in W_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau,\\ \boldsymbol{u}(r,\lambda,\theta,0)=\boldsymbol{u}_0(r,\lambda,\theta),\ p(r,\lambda,\theta,0)=p_0(r,\lambda,\theta),\qquad 在\ \Omega\ 上.\end{cases} \tag{9}$$

为了描述数值解的误差, 我们将使用记号

$$E(\boldsymbol{v},w,t)=E_1(\boldsymbol{v},w,t)+E_2(\boldsymbol{v},w,t)+E_3(\boldsymbol{v},t)/4,\qquad t\in T_\tau,$$

其中

$$\begin{aligned}E_1(\boldsymbol{v},w,t)=&\ \|\boldsymbol{v}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|w(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\ &\nu\tau(2\sigma_2\sigma_3-1/2)|\boldsymbol{v}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega},\\ E_2(\boldsymbol{v},w,t)=&\ \tau^2\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right)\sum_{t'\in T_\tau,\,t'<t}(\|\boldsymbol{v}_t(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|w_t(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}),\\ E_3(\boldsymbol{v},t)=&\\ &\nu\tau(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))\sum_{t'\in T_\tau,\,t'<t}(|\boldsymbol{v}(t')|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|\boldsymbol{v}(t'+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}).\end{aligned}$$

定解条件的平均误差用

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{v},w,\boldsymbol{y},z,t)=&\ \|\boldsymbol{v}\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|w\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\ &\nu\tau(2\sigma_2\sigma_3-1/2)|\boldsymbol{v}|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\\ &2\tau\sum_{t'\in T_\tau,\,t'<t}\left(\|\boldsymbol{y}(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{1}{\varepsilon}\|z(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\right)\end{aligned}$$

度量. 此外,

$$c_*(\boldsymbol{v})=\frac{25}{\nu(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}|||\boldsymbol{v}|||^2_\infty+1,\quad |||\boldsymbol{v}|||_\infty=\sup_{t\in T_\tau}\|\boldsymbol{v}(t)\|_{\infty,\Omega}.$$

我们有下列结果, 其证明将在下一节进行.

定理 2.1 令 $1/2<\sigma_2,\sigma_3\leqslant 1$ 和 $\tau\leqslant(2\sigma_3-1)/8$. 若 $\sigma_1=\sigma_3$ 或

$$\rho(\boldsymbol{u}_0,p_0,\boldsymbol{f},g,T)\,\mathrm{e}^{c_*(\boldsymbol{u})T}\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{\nu(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}{c_0(\sigma_1-\sigma_3)}\right)^2M^{-2}N^{-1},$$

则对所有 $t\in T_\tau$,

$$E(\boldsymbol{u},p,t)\leqslant\rho(\boldsymbol{u}_0,p_0,\boldsymbol{f},g,t)\mathrm{e}^{c_*(\boldsymbol{u})t},\tag{10}$$

其中 c_0 是出现在引理3.7中的一个正常数,见下一节.

2.3 混合格式的收敛性

接下来我们考虑格式(7)的收敛性. 为此,令 $\boldsymbol{U}^*(t)={}^0P^1_{M,N,0,2,0,0,\Omega}\boldsymbol{U}(t)$, $P^*(t)=P_{M,N,0,2,\Omega}P(t)$. 根据式(3)和${}^0P^1_{M,N,0,2,0,0,\Omega}$的定义,我们推出

$$a(\boldsymbol{U}(t),\boldsymbol{v})=a(\boldsymbol{U}^*(t)+\sigma_2\tau\boldsymbol{U}^*_t(t),\boldsymbol{v})+\sigma_2\tau(\Delta\boldsymbol{U}_t(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}-$$
$$(\boldsymbol{U}(t)+\sigma_2\tau\boldsymbol{U}_t(t)-\boldsymbol{U}^*(t)-\sigma_2\tau\boldsymbol{U}^*_t(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,0)},\Omega},\qquad \boldsymbol{v}\in{}^0\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega).$$

因此,由式(5)我们得到

$$\begin{cases}(\boldsymbol{U}^*_t(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+(J(\boldsymbol{U}^*(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{U}^*_t(t),\boldsymbol{U}^*(t)),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\ \quad\nu a(\boldsymbol{U}^*(t)+\sigma_2\tau\boldsymbol{U}^*_t(t),\boldsymbol{v})-b(P^*(t)+\sigma_3\tau P^*_t(t),\boldsymbol{v})=\\ \quad\left(\boldsymbol{f}(t)+\sum\limits_{j=1}^{4}\boldsymbol{G}_j(t),\boldsymbol{v}\right)_{\chi^{(0,2)},\Omega}+(\boldsymbol{G}_5(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,0)},\Omega}-b\left(\sum\limits_{j=6}^{7}G_j(t),\boldsymbol{v}\right),\\ \qquad\qquad\forall\boldsymbol{v}\in{}^0\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau,\\ \varepsilon(P^*_t(t),w)_{\chi^{(0,2)},\Omega}+b(w,\boldsymbol{U}^*(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{U}^*_t(t))=\left(\sum\limits_{j=8}^{10}G_j(t),w\right)_{\chi^{(0,2)},\Omega},\\ \qquad\qquad\forall w\in{}^0V_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau,\end{cases}\tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{G}_1(t)=\boldsymbol{U}^*_t(t)-\partial_t\boldsymbol{U}(t),$$
$$\boldsymbol{G}_2(t)=J(\boldsymbol{U}^*(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{U}^*_t(t),\boldsymbol{U}^*(t))-J(\boldsymbol{U}(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{U}_t(t),\boldsymbol{U}(t)),$$
$$\boldsymbol{G}_3(t)=\sigma_1\tau J(\boldsymbol{U}_t(t),\boldsymbol{U}(t)),$$
$$\boldsymbol{G}_5(t)=\nu(\boldsymbol{U}(t)+\sigma_2\tau\boldsymbol{U}_t(t)-\boldsymbol{U}^*(t)-\sigma_2\tau\boldsymbol{U}^*_t(t)),$$
$$\boldsymbol{G}_4(t)=-\nu\sigma_2\tau\Delta\boldsymbol{U}_t(t),\quad G_6(t)=P^*(t)+\sigma_3\tau P^*_t(t)-P(t)-\sigma_3\tau P_t(t),$$
$$G_7(t)=\sigma_3\tau P_t(t),\quad G_9(t)=\nabla\cdot(\boldsymbol{U}^*(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{U}^*_t(t)-\boldsymbol{U}(t)-\sigma_3\tau\boldsymbol{U}_t(t)),$$
$$G_8(t)=\varepsilon P^*_t(t),\quad G_{10}(t)=\sigma_3\tau\nabla\cdot(\boldsymbol{U}_t(t)).$$

再者,令 $\tilde{\boldsymbol{U}}(t)=\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{U}^*(t)$ 和 $\tilde{P}(t)=p(t)-P^*(t)$. 那么将式(7)与式(11)相减得出

$$\begin{cases}(\tilde{\boldsymbol{U}}_t(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+(J(\tilde{\boldsymbol{U}}(t)+\sigma_1\tau\tilde{\boldsymbol{U}}_t(t),\boldsymbol{U}^*(t)+\tilde{\boldsymbol{U}}(t)),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\ \quad(J(\boldsymbol{U}^*(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{U}^*_t(t),\tilde{\boldsymbol{U}}(t)),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\nu a(\tilde{\boldsymbol{U}}(t)+\sigma_2\tau\tilde{\boldsymbol{U}}_t(t),\boldsymbol{v})-\\ \quad b(\tilde{P}(t)+\sigma_3\tau\tilde{P}_t(t),\boldsymbol{v})=\\ \quad-\left(\sum\limits_{j=1}^{4}\boldsymbol{G}_j(t),\boldsymbol{v}\right)_{\chi^{(0,2)},\Omega}-(\boldsymbol{G}_5(t),\boldsymbol{v})_{\chi^{(0,0)},\Omega}+b\left(\sum\limits_{j=6}^{7}G_j(t),\boldsymbol{v}\right),\\ \qquad\qquad\forall\boldsymbol{v}\in{}^0\boldsymbol{W}_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau,\\ \varepsilon(\tilde{P}_t(t),w)_{\chi^{(0,2)},\Omega}+b(w,\tilde{\boldsymbol{U}}(t)+\sigma_3\tau\tilde{\boldsymbol{U}}_t(t))=-\left(\sum\limits_{j=8}^{10}G_j(t),w\right)_{\chi^{(0,2)},\Omega},\\ \qquad\qquad\forall w\in{}^0V_{M,N}(\Omega),\ t\in T_\tau.\end{cases}\tag{12}$$

此外,在 Ω 上 $\tilde{\boldsymbol{U}}(r,\lambda,\theta,0)=\boldsymbol{0}$ 以及 $\tilde{P}(r,\lambda,\theta,0)=0$.

令

$$E^*(\boldsymbol{v},w,t)=E_1(\boldsymbol{v},w,t)+E_2(\boldsymbol{v},w,t)+E_3(\boldsymbol{v},t)/8,\qquad t\in T_\tau.$$

我们有下列结果,其证明将在下一节进行.

定理 2.2 若 $\sigma_1=\sigma_3$, $1/2<\sigma_2$, $\sigma_3\leqslant 1$, $\tau\leqslant(2\sigma_3-1)/8$, $\boldsymbol{U}(1,\lambda,\theta)=\mathbf{0}$, 并且对 $s\geqslant 1$, $q\geqslant 0$, $s'>1$ 和 $q'>2$,

$$\boldsymbol{U}\in \boldsymbol{C}(0,T;\boldsymbol{H}^{s'}_{\chi^{(0,0)},A}(I,\boldsymbol{H}^{q'}(S)))\cap \boldsymbol{H}^{3s'/4}_{\chi^{(0,0)}}(I,\boldsymbol{H}^{q'}(S))\cap \boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega))\cap$$
$$\boldsymbol{H}^1(0,T;\boldsymbol{H}^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega)\cap \boldsymbol{B}^{1,q+1}_{0,2,0,0}(\Omega))\cap \boldsymbol{H}^2(0,T;\boldsymbol{L}^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega)),$$
$$\partial_r\boldsymbol{U}\in \boldsymbol{C}(0,T;\boldsymbol{B}^{s',q'+1}_{\chi^{(0,1)},A}(\Omega))\cap \boldsymbol{H}^1(0,T;\boldsymbol{B}^{s,1}_{\chi^{(0,1)},A}(\Omega)),$$
$$P\in C(0,T;H^{s,q}_{\chi^{(0,2)},A}(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2_{0,\chi^{(0,2)}}(\Omega)),$$

则对所有 $t\in T_\tau$,

$$E^*(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{U},p-P,t)\leqslant c^*\left(\frac{1}{\varepsilon}(M^{-2s}+N^{-2q}+\tau^2)+\varepsilon\right),$$

c^* 是一个正常数, 其依赖于 σ_2、σ_3、ν、T 以及 $\boldsymbol{U}$ 和 P 在所述空间中的范数.

如果 $\varepsilon=\mathscr{O}(M^{-s}+N^{-q}+\tau)$, 则我们可得到较好的收敛速度.

定理 2.3 假设 $\sigma_1\neq\sigma_3$ 并且定理 2.2 的其它条件都满足. 如果另有 $N=\mathscr{O}(M^{\gamma})$, $\varepsilon=\mathscr{O}(\tau)=\mathscr{O}(M^{-\lambda})$, $s>(\gamma+\lambda+2)/2$, $q>(\gamma+\lambda+2)/(2\gamma)$ 以及 $\lambda>\gamma+2$, 则对所有 $t\in T_\tau$,

$$E^*(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{U},p-P,t)\leqslant c^*(M^{-2s+\lambda}+M^{-2q\gamma+\lambda}+M^{-\lambda}),$$

c^* 的含义与定理 2.2 中的相同.

2.4 数值结果

现在我们用 $\sigma_1=0$ 和 $\sigma_2=\sigma_3=1$ 情形下的格式(7)数值求解(5). 取试验函数

$$\boldsymbol{U}=\nabla\times\varphi,$$
$$\varphi=\frac{1}{4}(r^2-1)^2[\mathrm{e}^{2x_1}\boldsymbol{e}_1+\mathrm{e}^{x_2}\boldsymbol{e}_2+\mathrm{e}^{0.5x_3}\boldsymbol{e}_3]\mathrm{e}^{0.1t},$$
$$P=\mathrm{e}^{r^2-1}(\sin(x_1)+\sin(1.5x_2)+\sin(2x_3))\mathrm{e}^{0.5t}.$$

为了确保计算数值误差的精确度以及计算诸如格式(7)中初始定解条件和右端项的展开式系数的精确度, 我们运用 $M=11$ 和 $N=63$ 下的 Gauss 型求积公式.

其次, 我们分别用 $r^{(\alpha,\beta)}_{M,m}$ 和 $\omega^{(\alpha,\beta)}_{M,m}$ 表示 $J^{(\alpha,\beta)}_{M+1}(r)$ 的零点和相应的 Christoffel 数. 此外, 令 $\omega_N=2\pi/(2N+1)$ 以及

$$(r_{M,m},\lambda_{N,l},\theta_{N,n})=(r^{(0,2)}_{M,m},l\omega_N,\arcsin(2r^{(0,0)}_{N,n}-1)),$$
$$\omega_{M,N,m,l,n}=2\omega^{(0,2)}_{M,m}\omega_N\omega^{(0,0)}_{N,n}.$$

我们用 $\boldsymbol{u}_{M,N}(t)$ 和 $p_{M,N}(t)$ 表示由格式(7)确定的数值解. $\boldsymbol{u}_{M,N}(t)$ 的数值误差由

$$e_{M,N}(\boldsymbol{u}(t))=\left(\sum_{m=0}^{M}\sum_{l=0}^{2N}\sum_{n=0}^{N}\omega_{M,N,m,l,n}|\boldsymbol{U}(r_{M,m},\lambda_{N,l},\theta_{N,n},t)-\right.$$
$$\left.\boldsymbol{u}_{M,N}(r_{M,m},\lambda_{N,l},\theta_{N,n},t)|^2\right)^{1/2}$$

描述. 符号 $e_{M,N}(p(t))$ 有类似的意义.

在图 1 和 2 中我们画出了 $t=1$ 时, 在 $\nu=10^{-3}$, $\varepsilon=10^{-7}$ 和 $\tau=\tau_j$ 下的平均数值误差 $e_{M,N}(\boldsymbol{u}(t))$ 和 $e_{M,N}(p(t))$ 随 $M=N$ 的变化, 其中 $\tau_1=2.5\times10^{-3}$, $\tau_2=5.0\times10^{-4}$, $\tau_3=1.0\times10^{-4}$, $\tau_4=2.0\times10^{-5}$. 数值结果表明, 即使在小模式的 M 和 N 下所述算法也提供了精度很高的数值解. 结果也表明随着 $M=N$ 的增大和 τ 的减小, 误差快速递减, 这正如定理 2.3 所预料的那样.

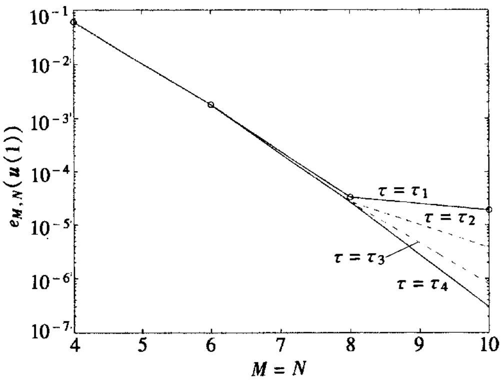

图 1 速度的数值误差

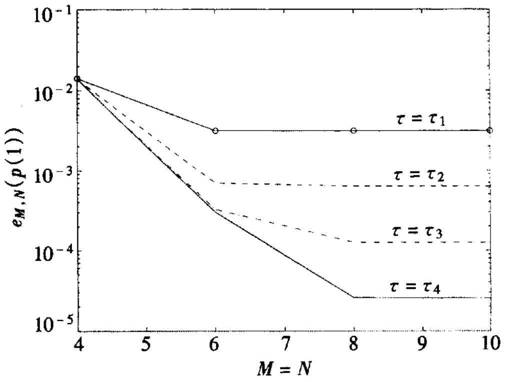

图 2 压力的数值误差

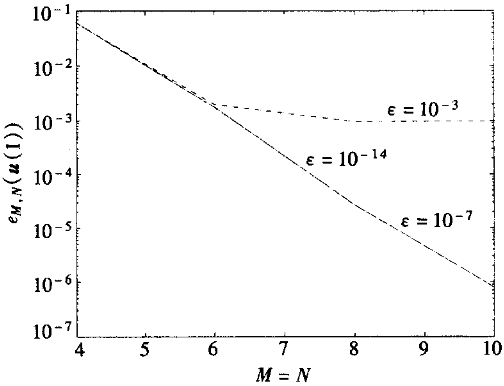

图 3 速度的数值误差

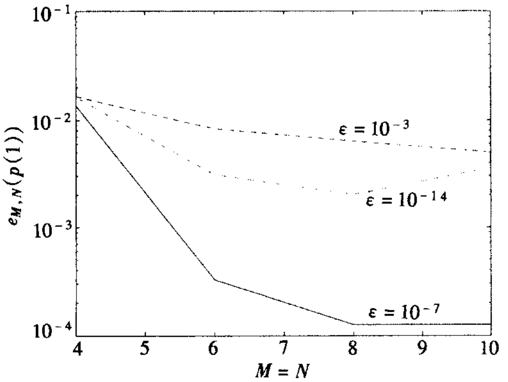

图 4 压力的数值误差

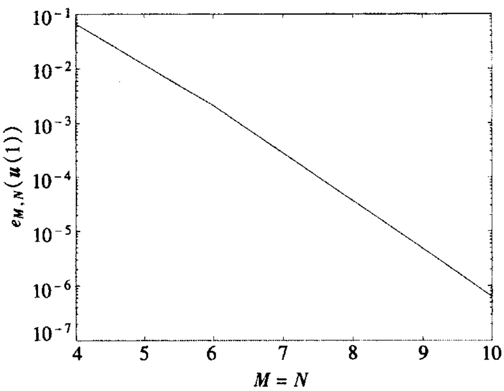

图 5 速度的数值误差

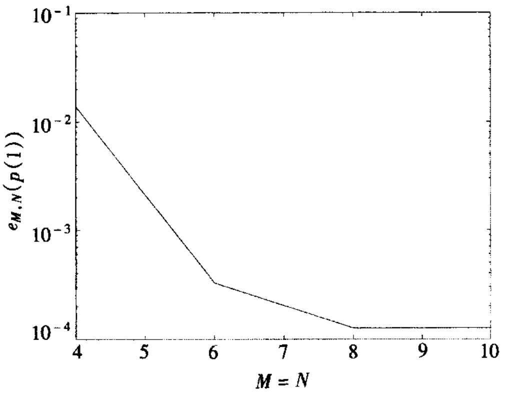

图 6 压力的数值误差

根据定理 2.3, 为了获得更好的收敛速度, 对于固定的 M、N 和 τ 我们应该选择合理的 ε 值. 在图 3 和 4 中, 通过变化 $M=N$ 和不同的小参数 ε, 我们比较了 $t=1$ 时在 $\nu=10^{-3}$ 及 $\tau=10^{-4}$ 下的数值误差 $e_{M,N}(\boldsymbol{u}(t))$ 和 $e_{M,N}(p(t))$. 我们发现, 对过大或者过小的 ε, 数值精度可能会降低, 这证明了误差估计的正确性.

在图 5 和 6 中我们画出了 $t=1$ 时, 在 $\nu=10^{-5}$, $\varepsilon=10^{-7}$, $\tau=10^{-4}$ 和不同 $M=N$ 下的数值误差 $e_{M,N}(\boldsymbol{u}(t))$ 和 $e_{M,N}(p(t))$. 结果表明, 即使对小粘性的情形我们的方法依然有效.

最后, 在图 7 和 8 中我们画出了 $0\leqslant t\leqslant 5$ 时, 在 $\nu=10^{-3}$, $\varepsilon=10^{-7}$, $\tau=10^{-4}$ 和不同 $M=$

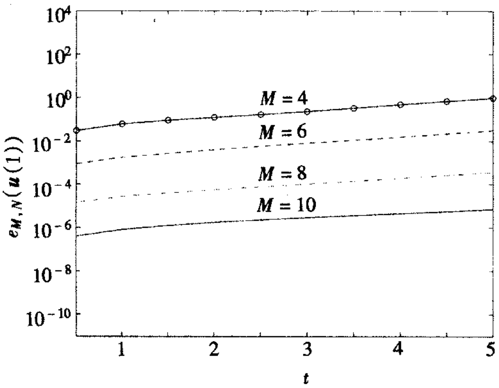

图 7　速度的数值误差

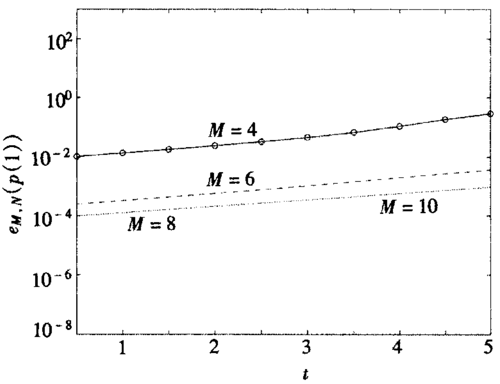

图 8　压力的数值误差

N 下的数值误差 $e_{M,N}(\boldsymbol{u}(t))$ 和 $e_{M,N}(p(t))$. 结果表明格式(7)相当稳定.

3　误差分析

本节中我们证明定理 2.1~2.3. c 将表示不依赖于任何函数, M 和 N 的正常数.

3.1　几个引理

首先我们构建几个引理.

引理 3.1　令

$$\alpha \leqslant \gamma + 2,\quad \beta \leqslant \delta + 2. \tag{13}$$

则对任何 $v \in H^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)$,

$$\| v \|_{\chi^{(\gamma,\delta)},I} \leqslant c \| v \|_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},I}.$$

特别, 当 $\alpha=\gamma=\delta=0$ 和 $\beta=2$ 时, $c=2\sqrt{2}$.

证明　根据文献[27]的引理 3.4, 对任何 $v \in H^1_{\chi^{(\alpha',\beta')}}(I)$, $1<\alpha' \leqslant \gamma+2$ 和 $1<\beta' \leqslant \delta+2$, 成立 $\| v \|_{\chi^{(\gamma,\delta)},I} \leqslant c \| v \|_{1,\chi^{(\alpha',\beta')},I}$. 若 $\alpha,\beta>1$, 那么我们直接得到了所要的结果. 若 $\alpha,\beta \leqslant 1$, 则我们取 $\alpha'=\gamma+2>1$ 和 $\beta'=\delta+2>1$. 因此,

$$\| v \|_{\chi^{(\gamma,\delta)},I} \leqslant c \| v \|_{1,\chi^{(\alpha',\beta')},I} \leqslant c \| v \|_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},I},$$

其蕴涵了所要的结果. 我们可以类似地处理其它情形.

其次, 我们来确定在 $\alpha=\gamma=\delta=0$ 且 $\beta=2$ 时常数 c 的值. 容易看出

$$v^2(r)r = \int_0^r \partial_s(v^2(s)s)\mathrm{d}s = \int_0^r v^2(s)\mathrm{d}s + 2\int_0^r v(s)\partial_s v(s)s\mathrm{d}s.$$

在区间(0,1)上分部积分上式, 我们推出

$$\int_0^1 v^2(r)r\mathrm{d}r = \left(r\int_0^r v^2(s)\mathrm{d}s\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 v^2(r)r\mathrm{d}r + \left(2r\int_0^r v(s)\partial_s v(s)s\mathrm{d}s\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 v(r)\partial_r v(r)r^2\mathrm{d}r.$$

因而,

$$\int_0^1 v^2(r)\mathrm{d}r = 2\int_0^1 v^2(r)r\mathrm{d}r + 2\int_0^1 v(r)\partial_r v(r)r(r-1)\mathrm{d}r. \tag{14}$$

此外, 通过运用 Cauchy 不等式, 我们从以上等式得到

$$\int_0^1 v^2(r)\mathrm{d}r \leqslant 2\left(\int_0^1 v^2(r)\mathrm{d}r\right)^{1/2}\left(\left(\int_0^1 v^2(r)r^2\mathrm{d}r\right)^{1/2} + \left(\int_0^1(\partial_r v(r))^2 r^2\mathrm{d}r\right)^{1/2}\right).$$

因此,

$$\|v\|_{\chi^{(0,0)},I}\leqslant 2(\|v\|_{\chi^{(0,2)},I}+|v|_{1,\chi^{(0,2)},I})\leqslant 2\sqrt{2}\|v\|_{1,\chi^{(0,2)},I}.$$ □

引理 3.2 令

$$\alpha\leqslant 0,\quad \gamma\geqslant 0,\quad \beta\leqslant\delta+2. \tag{15}$$

则对任何 $v\in {}^0H^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(I)$,

$$\|v\|_{\chi^{(\gamma,\delta)},I}\leqslant c|v|_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},I},$$

特别,当 $\alpha=\gamma=\delta=0$ 和 $\beta=2$ 时, $c=2$.

证明 根据引理 3.1, $\|v\|_{\chi^{(\gamma,\delta)},I}$ 有限. 因而,一般结果来自文献[25] 的注记 2.3. 我们接下来确定在 $\alpha=\gamma=\delta=0$ 和 $\beta=2$ 时的常数 c. 事实上,我们从条件 $v(1)=0$ 得到

$$\int_0^1 v^2(r)r\mathrm{d}r=\int_0^1\mathrm{d}r\int_1^r\partial_s(v^2(s)s)\mathrm{d}s=\left(r\int_1^r\partial_s(v^2(s)s)\mathrm{d}s\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1 r\partial_r(v^2(r)r)\mathrm{d}r=$$
$$-\int_0^1 v^2(r)r\mathrm{d}r-2\int_0^1 v(r)\partial_r v(r)r^2\mathrm{d}r.$$

由此

$$\int_0^1 v^2(r)r\mathrm{d}r+\int_0^1 v(r)\partial_r v(r)r^2\mathrm{d}r=0. \tag{16}$$

将式(16) 代入式(14) 并运用 Cauchy 不等式,我们得到

$$\int_0^1 v^2(r)\mathrm{d}r=-2\int_0^1 v(r)\partial_r v(r)r\mathrm{d}r\leqslant 2\left(\int_0^1 v^2(r)\mathrm{d}r\right)^{1/2}\left(\int_0^1(\partial_r v(r))^2r^2\mathrm{d}r\right)^{1/2},$$

其蕴涵了 $c=2$. □

引理 3.3(文献[25] 的定理 2.2) 对任何 $\phi\in\mathscr{P}_M(I)$ 和 $d\geqslant 0$,

$$\|\phi\|_{d,\chi^{(\alpha,\beta)},I}\leqslant cM^{2d}\|\phi\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},I}.$$

引理 3.4 对任何 $\phi\in W_N(S)$ 和正整数 $d_1\leqslant d_2$,

$$|\phi|_{d_2,S}\leqslant 2^{(d_2-d_1)/2}N^{d_2-d_1}|\phi|_{d_1,S}.$$

证明 该结果基于对任何正整数 d, 成立关系(参考文献[24])

$$|\phi|_{d,S}=\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=-n}^{n}(n^2+n)^d|\hat{\phi}_{l,n}|^2\right)^{1/2}. \tag{17}$$

□

引理 3.5 对任何 $\phi\in W_{M,N}(\Omega)$, $\beta>1$ 和 $0\leqslant d\leqslant 2$,

$$\|\phi\|_{d,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\leqslant c(M^2N)^d\|\phi\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}. \tag{18}$$

此外,对 $d=1,2$,

$$\|\phi\|_{d,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\leqslant cM^2N\|\phi\|_{d-1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}. \tag{19}$$

证明 $0\leqslant d\leqslant 1$ 下的结果是文献[26] 的定理2.2的结论,故只需要处理 $d>1$ 的情形. 首先我们考虑 $d=2$. 我们相继运用引理 3.3 和引理 3.1 推出

$$\left\|\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\phi)\right\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\leqslant cM^4(\|\partial_r\phi\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}+\|\phi\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta-2)},\Omega})\leqslant$$
$$cM^4\|\phi\|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}. \tag{20}$$

其次, $\phi(0,\lambda,\theta)$ 不依赖 λ 和 θ, 故在 $r=0$ 处 $\partial_\lambda\phi=\partial_\theta\phi=0$. 它结合引理3.4导致

$$\left\|\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\partial^2_\lambda\phi+\frac{1}{\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\partial_\theta\phi)\right)\right\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=\int_0^1\left|\frac{1}{r}\phi(r)\right|^2_{2,S}\chi^{(\alpha,\beta-2)}(r)\mathrm{d}r\leqslant$$
$$2N^2\int_0^1\left|\frac{1}{r}\phi(r)\right|^2_{1,S}\chi^{(\alpha,\beta-2)}(r)\mathrm{d}r=$$

$$2N^2\int_0^1\left|\frac{1}{r}(\phi(r)-\phi(0))\right|_{1,S}^2\chi^{(\alpha,\beta-2)}(r)\mathrm{d}r. \tag{21}$$

现在, 令

$$\phi(r,\lambda,\theta)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=-n}^{n}\phi_{l,n}(r)Y_{l,n}(\lambda,\theta),$$

$$\phi_{l,n}(r)=\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\phi(r,\lambda,\theta)Y_{l,n}(\lambda,\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda.$$

显然, $\phi_{l,n}$ 的实部和虚部都属于 $\mathscr{P}_M(I)$. 由于当 $r\to 0$ 时 $\phi_{l,n}(r)\to\phi_{l,n}(0)$, 我们得到

$$\frac{1}{r}(\phi(r,\lambda,\theta)-\phi(0,\lambda,\theta))=\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=-n}^{n}\phi^*_{l,n}(r)Y_{l,n}(\lambda,\theta), \tag{22}$$

其中 $\phi^*_{l,n}(r)=(\phi_{l,n}(r)-\phi_{l,n}(0))/r$ 且 $\phi^*_{l,n}$ 的实部和虚部都属于 $\mathscr{P}_{M-1}(I)$. 因此, 运用引理 3.1 和 3.3 得出

$$\|\phi^*_{l,n}\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta-2)},I}\leqslant c\|\phi^*_{l,n}\|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},I}\leqslant cM^4\|\phi^*_{l,n}\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},I}. \tag{23}$$

从而, 式(17) 和式(20) ~ (23) 的组合导致

$$\begin{aligned}\|\phi\|^2_{2,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}&\leqslant cM^4\|\phi\|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}+2N^2\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=-n}^{n}(n^2+n)\|\phi^*_{l,n}\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta-2)},I}\leqslant\\ &cM^4\|\phi\|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}+c(M^2N)^2\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=-n}^{n}(n^2+n)\|\phi^*_{l,n}\|^2_{\chi^{(\alpha,\beta)},I}=\\ &cM^4\|\phi\|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}+c(M^2N)^2\int_0^1\left|\frac{1}{r}(\phi(r)-\phi(0))\right|^2_{1,S}\chi^{(\alpha,\beta)}(r)\mathrm{d}r\leqslant\\ &c(M^2N)^2\|\phi\|^2_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}.\end{aligned}$$

这蕴涵了式(19) 的情形 $d=2$. 此外, $\|\phi\|_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\leqslant cM^2N\|\phi\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}$, 见文献[26] 的定理 2.2. 因此,

$$\|\phi\|_{2,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\leqslant c(M^2N)^2\|\phi\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}. \tag{24}$$

最后, 对 $1<d<2$, 我们将空间 $H^d_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)=H^{(d-1)2+(2-d)1}_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$ 看作在空间 $H^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$ 和 $H^1_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$ 之间的插值. 那么, 利用式(18) 和(24) 我们得到

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{d,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}&\leqslant c\|\phi\|^{d-1}_{2,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\|\phi\|^{2-d}_{1,\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}\leqslant\\ &c(M^2N)^{2(d-1)+(2-d)}\|\phi\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}=c(M^2N)^d\|\phi\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega}.\end{aligned}$$ □

引理 3.6 对任何 $v\in H^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega)$,

$$\|v\|^2_{\infty,\Omega}\leqslant c\|v\|_{2,\chi^{(0,2)},\Omega}\|v\|_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

该引理是 Gagliardo-Nirenberg 型不等式, 其将在本文的附录中证明.

引理 3.7 对任何 $\phi\in W_{M,N}(\Omega)$,

$$\|\phi\|_{\infty,\Omega}\leqslant cMN^{1/2}\|\phi\|_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

若另有 $\phi\in{}^0W_{M,N}(\Omega)$, 则

$$\|\phi\|_{\infty,\Omega}\leqslant cMN^{1/2}|\phi|_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

证明 运用引理 3.5 和 3.6, 我们推出

$$\|\phi\|_{\infty,\Omega}\leqslant c\|\phi\|^{1/2}_{2,\chi^{(0,2)},\Omega}\|\phi\|^{1/2}_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant cMN^{1/2}\|\phi\|_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

若另有 $\phi\in{}^0W_{M,N}(\Omega)$, 则我们由引理 3.2 得到 $\|\phi\|_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant 2|\phi|_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}$. 第 2 个结果即刻随以上两个估计式产生. □

引理 3.8(文献[26] 的定理 2.3) 对任何 $v\in H^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)$ 和整数 $s,q\geqslant 0$,

$$\| P_{M,N,\alpha,\beta,\Omega} v - v \|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Omega} \leqslant c(M^{-s} + N^{-q}) | v |_{H^{s,q}_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Omega)}.$$

引理 3.9(文献[26]的定理 2.5) 令

$$\alpha = \gamma = 0, \quad 1 < \beta \leqslant \delta + 2, \tag{25}$$

则对任何 $v \in {}^0H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega) \cap B^{1,q}_{\alpha,\beta,\gamma,\beta-2}(\Omega), \partial_r v \in B^{s-1,1}_{\chi^{(\alpha,\beta-1)},A}(\Omega)$ 和整数 $s \geqslant 2, q \geqslant 1$,

$$\| {}^0P^1_{M,N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega} v - v \|_{1,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega} \leqslant$$
$$c(M^{1-s} + N^{1-q})(| v |^2_{B^{1,q}_{\alpha,\beta,\gamma,\beta-2}(\Omega)} + | \partial_r v |^2_{B^{s-1,1}_{\chi^{(\alpha,\beta-1)},A}(\Omega)})^{1/2}.$$

引理 3.10(文献[26]的定理 2.7) 令

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \delta \leqslant 2, \quad 1 < \beta \leqslant \min(\delta + 2, 2). \tag{26}$$

则对任何满足 $v(1, \lambda, \theta) = 0$ 的 $v \in H^s_{\chi^{(0,0)},A}(I, H^q(S)) \cap H^{3s/4}_{\chi^{(0,0)}}(I, H^q(S)), \partial_r v \in B^{s,q+1}_{\chi^{(\alpha,\beta-1)},A}(\Omega)$, 以及 $s > 1, q > 2$,

$$\| {}^0P^1_{M,N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega} v \|_{\infty,\Omega} \leqslant$$
$$c(\| \partial_r v \|_{B^{s,q+1}_{\chi^{(\alpha,\beta-1)},A}(\Omega)} + \| v \|_{H^s_{\chi^{(0,0)},A}(I,H^q(S))} + \| v \|_{H^{3s/4}_{\chi^{(0,0)}}(I,H^q(S))}).$$

注记 3.1 为了使引理 3.10 中的 ${}^0P^1_{M,N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Omega} v$ 有意义, 有必要要求 $v \in H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\Omega)$, 此要求可以由条件(26) 保证.

注记 3.2 前面各引理的结果对向量函数也成立. 不过此情形下出现在这些引理中的数量函数的空间、半范数和范数要用相应的向量函数的空间、半范数和范数代替.

以下引理是文献[3]中引理 3.2 的一种特殊情形.

引理 3.11 令 $E(t)$ 为 T_τ 上的非负函数, $R(t)$ 为 T_τ 上的非减函数, $H(t) = H(E(t))$ 是与 $E(t)$ 相关的函数. 常数 $A_1 > 0, A_2 \geqslant 0$. 假设满足

(i) 若 $E(t) \leqslant A_2$, 则 $H(t) \leqslant 0$;

(ii) 对所有 $t \in T_\tau$, $E(t) \leqslant R(t) + \tau \sum_{t' \in T_\tau, t' < t} (A_1 E(t') + H(t'))$;

(iii) 对某个 $t' \in T_\tau$, $R(t') e^{A_1 t'} \leqslant A_2$.

则对所有 $t \in T_\tau$ 且 $t \leqslant t'$, 成立

$$E(t) \leqslant R(t) e^{A_1 t}.$$

3.2 定理 2.1 的证明

现在我们证明定理 2.1. 令 η 是一正常数, 且 $\eta < \sigma_2 + \sigma_3$. 我们在式(9) 的第 1 和第 2 式中分别取 $\boldsymbol{v} = 2(\boldsymbol{u}(t) + \sigma_3 \tau \boldsymbol{u}_t(t))$ 和 $w = 2(p(t) + \sigma_3 \tau p_t(t))$, 并将导出的两等式相加. 从而利用式(4) 和(6) 计算得到

$$\begin{aligned}
&(\| \boldsymbol{u}(t) \|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} + \varepsilon \| p(t) \|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega})_t + 2\tau(\sigma_3 - 1/2)(\| \boldsymbol{u}_t(t) \|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} + \\
&\quad \varepsilon \| p_t(t) \|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}) + \nu\tau(\sigma_2 + \sigma_3 - \eta)(| \boldsymbol{u}(t) |^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})_t + \\
&\quad \nu(2 - \eta) | \boldsymbol{u}(t) |^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega} + \nu\eta | \boldsymbol{u}(t + \tau) |^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega} - \\
&\quad \nu\tau^2 Q(\sigma_2, \sigma_3) | \boldsymbol{u}_t(t) |^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega} = \\
&\quad \sum_{j=1}^4 F_j(t) + 2(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t) + \sigma_3 \tau \boldsymbol{u}_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega} + \\
&\quad 2(g(t), p(t) + \sigma_3 \tau p_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega},
\end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$F_1(t) = 2\tau(\sigma_1 - \sigma_3)(J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{u}_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega},$$
$$F_2(t) = 2\tau(\sigma_1 - \sigma_3)(J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{u}_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega},$$

$$F_3(t)=2(J(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)),\boldsymbol{u}(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{u}_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega},$$
$$F_4(t)=2\sigma_3\tau(J(\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{u}(t)),\boldsymbol{u}(t)+\sigma_1\tau\boldsymbol{u}_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

在即将进行的讨论中, Q_1 和 Q_2 表示某些正常数,其值将在后面确定.

现在我们估计 $F_j(t)$. 首先运用分部积分推出 $F_1(t)=A_1(t)+A_2(t)$, 其中

$$A_1(t)=\tau(\sigma_1-\sigma_3)((\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega},$$
$$A_2(t)=-\tau(\sigma_1-\sigma_3)((\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_t(t),\boldsymbol{u}(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

显然

$$A_1(t)\leqslant Q_1\tau\|\boldsymbol{u}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{4Q_1}\tau\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega},$$

$$\begin{aligned}A_2(t)\leqslant{}&\frac{1}{2}Q_2\nu\tau^2|\boldsymbol{u}_t(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\\&\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2Q_2\nu}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\&Q_2\nu(|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|\boldsymbol{u}(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+\\&\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2Q_2\nu}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}F_1(t)\leqslant{}&Q_2\nu(|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|\boldsymbol{u}(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+\\&Q_1\tau\|\boldsymbol{u}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{4Q_1}\tau\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\\&\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2Q_2\nu}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}.\end{aligned}$$

按照以上相同的方式,我们运用引理3.7可证实

$$\begin{aligned}F_2(t)\leqslant{}&Q_2\nu(|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|\boldsymbol{u}(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+\\&Q_1\tau\|\boldsymbol{u}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{4Q_1}\tau\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\\&\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2Q_2\nu}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\&Q_2\nu(|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|\boldsymbol{u}(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+Q_1\tau\|\boldsymbol{u}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\&\frac{c_0^2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{4Q_1}\tau M^2N|\boldsymbol{u}(t)|^4_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\\&\frac{c_0^2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2Q_2\nu}M^2N\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}.\end{aligned}$$

类似,

$$\begin{aligned}F_3(t)\leqslant{}&3Q_2\nu|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{1}{3Q_2\nu}|||\boldsymbol{u}|||^2_\infty\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\&Q_2\nu\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{1}{4Q_2\nu}|||\boldsymbol{u}|||^2_\infty\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\&6Q_2\nu|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{7}{12Q_2\nu}|||\boldsymbol{u}|||^2_\infty\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_4(t)\leqslant{}&\frac{1}{2}Q_2\nu\tau^2|\boldsymbol{u}_t(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{2}{Q_2\nu}|||\boldsymbol{u}|||^2_\infty\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\&Q_1\tau\|\boldsymbol{u}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{1}{4Q_1}\tau|||\boldsymbol{u}|||^2_\infty\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\end{aligned}$$

$$Q_2\nu(|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|u(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+Q_1\tau\|u_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+$$
$$\frac{3}{4Q_1}\tau|||u|||^2_\infty|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{2}{Q_2\nu}|||u|||^2_\infty\|u(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

此外,

$$2(f(t),u(t)+\sigma_3\tau u_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega}+2(g(t),p(t)+\sigma_3\tau p_t(t))_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant$$
$$\|u(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+Q_1\tau\|u_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\left(1+\frac{\tau}{Q_1}\right)\|f(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+$$
$$\varepsilon\|p(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+4Q_1\varepsilon\tau\|p_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{\tau}{4Q_1}\right)\|g(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega},$$

$$\nu\tau^2Q(\sigma_2,\sigma_3)|u_t(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant$$
$$2\nu Q(\sigma_2,\sigma_3)(|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|u(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}).$$

将前面的这些估计式代入式(27),我们得到

$$(\|u(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|p(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega})_t+\tau(2(\sigma_3-1/2)-$$
$$4Q_1)(\|u_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|p_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega})+\nu\tau(\sigma_2+\sigma_3-$$
$$\eta)(|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})_t+\nu(\eta-3Q_2-2Q(\sigma_2,\sigma_3))|u(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+$$
$$\nu\left(2-\eta-9Q_2-2Q(\sigma_2,\sigma_3)-\frac{c_0^2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2Q_2\nu^2}M^2N(\|u(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\right.$$
$$\left.\frac{Q_2\nu}{2Q_1}\tau|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})\right)|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant$$
$$\left(\frac{25}{12Q_2\nu}|||u(t)|||^2_\infty+1\right)\|u(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+$$
$$\frac{1}{Q_1}|||u(t)|||^2_\infty\tau|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|p(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+$$
$$\left(1+\frac{\tau}{Q_1}\right)\|f(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{\tau}{4Q_1}\right)\|g(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}.\tag{28}$$

基于式(8),我们可取

$$\eta=\frac{1}{2}+Q(\sigma_2,\sigma_3),\quad Q_1=\frac{1}{4}\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right),\quad Q_2=\frac{1}{12}(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3)).$$

显然, $1-2Q(\sigma_2,\sigma_3)=(2\sigma_2-1)(2\sigma_3-1)$. 因而,可以验证

$$2(\sigma_3-1/2)-4Q_1=\sigma_3-1/2,\quad \sigma_2+\sigma_3-\eta=2\sigma_2\sigma_3-1/2,$$
$$\eta-3Q_2-2Q(\sigma_2,\sigma_3)=(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))/4,$$
$$2-\eta-9Q_2-2Q(\sigma_2,\sigma_3)=3(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))/4.$$

此外,由于 $1/2<\sigma_2,\sigma_3\leqslant 1$, 我们看到

$$\frac{Q_2}{2Q_1}=\frac{(2\sigma_2-1)(2\sigma_3-1)}{6(\sigma_3-1/2)}=\frac{2}{3}\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{2}{3}\left(2\sigma_2\sigma_3-\frac{1}{2}\right)<2\sigma_2\sigma_3-\frac{1}{2}.$$

结合以上这些关系, 式(28)表示为

$$(E_1(u,p,t))_t+\tau(\sigma_3-1/2)(\|u_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|p_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+$$
$$\frac{\nu}{4}(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))(|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|u(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+$$
$$\frac{\nu}{2}\left(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3)-\frac{12c_0^2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\nu^2(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}M^2NE_1(u,p,t)\right)|u(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant$$
$$c_*(u)E_1(u,p,t)+\left(1+\frac{8\tau}{2\sigma_3-1}\right)\|f(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{2\tau}{2\sigma_3-1}\right)\|g(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}. \tag{29}$$

将此不等式关于 $t\in T_\tau$ 相加并运用条件 $\tau\leqslant(2\sigma_3-1)/8$, 我们得到

$$E(\boldsymbol{u},p,t)\leqslant\rho(\boldsymbol{u}_0,p_0,\boldsymbol{f},g,t)+\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}(c_*(\boldsymbol{u})E(\boldsymbol{u},p,t')+h(t')), \tag{30}$$

其中

$$h(t)=-\frac{\nu}{2}\left(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3)-\frac{12c_0^2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\nu^2(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}M^2NE(\boldsymbol{u},p,t)\right)|\boldsymbol{u}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}.$$

最后将引理 3.11 应用到式(30)我们便完成了证明, 这里对应引理 3.11, $E(t)=E(\boldsymbol{u},p,t)$, $H(t)=h(t)$, $R(t)=\rho(\boldsymbol{u}_0,p_0,\boldsymbol{f},g,t)$, $A_1=c_*(\boldsymbol{u})$, 对于情形 $\sigma_1=\sigma_3$ 取 $A_2=+\infty$, 其它情形取 $A_2=\frac{1}{12}\left(\frac{\nu(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}{c_0(\sigma_1-\sigma_3)}\right)^2M^{-2}N^{-1}$.

3.3 定理 2.2 和 2.3 的证明

现在来证明定理 2.2 和 2.3. 通过对式(9)和(12)的比较, 我们可按照推导式(29)的相同方式得到

$$\begin{aligned}
&(E_1(\boldsymbol{U},P,t))_t+\tau(\sigma_3-1/2)(\|\boldsymbol{U}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|P_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega})+\\
&\quad\frac{\nu}{4}(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))(|\boldsymbol{U}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|\boldsymbol{U}(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+\\
&\quad\frac{\nu}{2}\left(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3)-\frac{12c_0^2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\nu^2(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}M^2NE_1(\boldsymbol{U},P,t)\right)|\boldsymbol{U}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\
&\quad c_*(\boldsymbol{U}^*)E_1(\boldsymbol{U},P,t)+\left(1+\frac{8\tau}{2\sigma_3-1}\right)\left\|\sum_{j=1}^4\boldsymbol{G}_j(t)\right\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\
&\quad\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{2\tau}{2\sigma_3-1}\right)\left\|\sum_{j=8}^{10}G_j(t)\right\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}-\\
&\quad 2(\boldsymbol{G}_5(t),\boldsymbol{U}(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{U}_t(t))_{\chi^{(0,0)},\Omega}+2b\left(\sum_{j=6}^7G_j(t),\boldsymbol{U}(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{U}_t(t)\right).
\end{aligned} \tag{31}$$

为简便起见, 我们令 $Q_3=(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))/112$. 运用引理 3.2, 我们导出

$$\begin{aligned}
&-2(\boldsymbol{G}_5(t),\boldsymbol{U}(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{U}_t(t))_{\chi^{(0,0)},\Omega}\leqslant\\
&\quad 4Q_3\nu\|\boldsymbol{U}(t)\|^2_{\chi^{(0,0)},\Omega}+Q_3\nu\tau^2\|\boldsymbol{U}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,0)},\Omega}+\frac{5}{4Q_3\nu}\|\boldsymbol{G}_5(t)\|^2_{\chi^{(0,0)},\Omega}\leqslant\\
&\quad 16Q_3\nu|\boldsymbol{U}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+8Q_3\nu(|\boldsymbol{U}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|\boldsymbol{U}(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+\\
&\quad\frac{5}{Q_3\nu}|\boldsymbol{G}_5(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}.
\end{aligned}$$

可以看出

$$\begin{aligned}
&2b\left(\sum_{j=6}^7G_j(t),\boldsymbol{U}(t)+\sigma_3\tau\boldsymbol{U}_t(t)\right)\leqslant\\
&\quad 4Q_3\nu\|\nabla\cdot\boldsymbol{U}(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+Q_3\nu\tau^2\|\nabla\cdot\boldsymbol{U}_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\
&\quad\frac{5}{4Q_3\nu}\left\|\sum_{j=6}^7G_j(t)\right\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\
&\quad 12Q_3\nu|\boldsymbol{U}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+6Q_3\nu(|\boldsymbol{U}(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\\
&\quad|\boldsymbol{U}(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+\frac{5}{2Q_3\nu}\sum_{j=6}^7\|G_j(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}.
\end{aligned}$$

由于 $\tau\leqslant(2\sigma_3-1)/8$, 式(31)可以简化为

$$
\begin{aligned}
&(E_1(U,P,t))_t+\tau(\sigma_3-1/2)(\|U_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\varepsilon\|P_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega})+\\
&\quad\frac{\nu}{8}(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))(|U(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+|U(t+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega})+\\
&\quad\frac{\nu}{4}\left(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3)-\frac{24c_0^2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\nu^2(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}M^2NE_1(U,P,t)\right)|U(t)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\
&\quad c_*(U^*)E_1(U,P,t)+(\rho^*(t))_t,
\end{aligned}\tag{32}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\rho^*(t)=\;&\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\left(8\sum_{j=1}^{4}\|G_j(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\frac{6}{\varepsilon}\sum_{j=8}^{10}\|G_j(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\right)+\\
&\frac{5}{2Q_3\nu}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\left(2|G_5(t')|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+\sum_{j=6}^{7}\|G_j(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\right).
\end{aligned}
$$

采用与定理2.1的证明最后部分相同的论述,我们得出结论:若 $\sigma_1=\sigma_3$, 或

$$
\rho^*(T)e^{c_*(U^*)T}\leqslant\frac{1}{24}\left(\frac{\nu(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}{c_0(\sigma_1-\sigma_3)}\right)^2M^{-2}N^{-1},\tag{33}
$$

则对所有 $t\in T_\tau$,

$$
E^*(U,P,t)\leqslant\rho^*(t)e^{c_*(U^*)t}.\tag{34}
$$

至此,剩下要估计 $\rho^*(T)$ 和 $c_*(U^*)$. 在 $\sigma_1\neq\sigma_3$ 的情形下,我们也需要检验定理2.3的诸条件是否能确保式(33)的正确性. 首先,我们熟知

$$
v_t(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\partial_\xi v(\xi)d\xi,\quad v_t(t)-\partial_t v(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\int_t^{t'}\partial_\xi^2 v(\xi)d\xi dt'.\tag{35}
$$

运用上式和Cauchy不等式,我们推出对于 $s\geqslant1,\ q\geqslant0$,

$$
\begin{aligned}
&\|G_1(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant2\|U_t(t)-\partial_tU(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+2\|U_t^*(t)-U_t(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}=\\
&\quad2\left\|\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\int_t^{t'}\partial_\xi^2U(\xi)d\xi dt'\right\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+2\left\|\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\partial_\xi(U^*(\xi)-U(\xi))d\xi\right\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\
&\quad\tau\int_t^{t+\tau}\|\partial_\xi^2U(\xi)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}d\xi+\frac{2}{\tau}\int_t^{t+\tau}\|\partial_\xi(U^*(\xi)-U(\xi))\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}d\xi.
\end{aligned}
$$

既然 $\|v\|_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\|v\|_{\chi^{(0,0)},\Omega}$, 我们运用引理3.9可得到

$$
\begin{aligned}
8\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_1(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\;&8\tau^2\|U\|^2_{H^2(0,T;L^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))}+\\
&c(M^{-2s}+N^{-2q})(\|U\|^2_{H^1(0,T;B^{1,q+1}_{0,2,0,0}(\Omega))}+\|\partial_rU\|^2_{H^1(0,T;B^{s,1}_{\chi^{(0,1)},A}(\Omega))}).
\end{aligned}
$$

其次,我们有

$$
\begin{aligned}
\|G_2(t)\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\;&4\|((U^*(t)-U(t))\cdot\nabla)(U(t)+\sigma_1\tau U_t(t))\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\
&4\|(U^*(t)\cdot\nabla)(U^*(t)+\sigma_1\tau U_t^*(t)-U(t)-\sigma_1\tau U_t(t))\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\
&2\|(\nabla\cdot(U^*(t)-U(t)))(U^*(t)+\sigma_1\tau U_t^*(t))\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\\
&2\|(\nabla\cdot U(t))(U^*(t)+\sigma_1\tau U_t^*(t)-U(t)-\sigma_1\tau U_t(t))\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}.
\end{aligned}
$$

因而,结合引理3.9和3.10,我们导出对于 $s'>1,\ q'>2$,

$$
\begin{aligned}
&8\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_2(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}\leqslant\\
&\quad c(\|U^*\|^2_{C(0,T;L^\infty(\Omega))}+\|U\|^2_{C(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))})\|U-U^*\|^2_{C(0,T;H^1_{0,2,0,0}(\Omega))}\leqslant\\
&\quad c(M^{-2s}+N^{-2q})(\|U\|^2_{C(0,T;B^{1,q+1}_{0,2,0,0}(\Omega))}+\|\partial_rU\|^2_{C(0,T;B^{s,1}_{\chi^{(0,1)},A}(\Omega))})\times\\
&\quad(\Theta(U,s',q')+\|U\|_{C(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))})^2,
\end{aligned}
$$

其中

$$\Theta(U, s', q') = \|\partial_r U\|_{C(0,T;B^{s',q'+1}_{\chi^{(0,1)},A}(\Omega))} + \|U\|_{C(0,T;H^{s'}_{\chi^{(0,0)},A}(I,H^{q'}(S)))} + \|U\|_{C(0,T;H^{3s'/4}_{\chi^{(0,0)}}(I,H^{q'}(S)))}.$$

运用式(35),容易得到

$$8\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_3(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant c\tau^2\|U\|^2_{C(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\|U\|^2_{H^1(0,T;H^1_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))},$$

$$8\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_4(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant 8\nu^2\tau^2\|U\|^2_{H^1(0,T;H^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))},$$

$$\frac{5}{2Q_3\nu}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_7(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant \frac{5}{2Q_3\nu}\tau^2\|P\|^2_{H^1(0,T;L^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))},$$

$$\frac{6}{\varepsilon}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_{10}(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant \frac{18}{\varepsilon}\tau^2\|U\|^2_{H^1(0,T;H^1_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))}.$$

再运用引理 3.9 得出

$$\begin{aligned}\frac{5}{Q_3\nu}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}|G_5(t')|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant{}& \\ &\frac{10\nu}{Q_3}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}((1-\sigma_2)^2|U(t')-U^*(t')|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}+ \\ &\sigma_2^2|U(t'+\tau)-U^*(t'+\tau)|^2_{1,\chi^{(0,2)},\Omega}) \leqslant \\ &\frac{c}{Q_3}(M^{-2s}+N^{-2q})(\|U\|^2_{C(0,T;B^{1,q+1}_{0,2,0,0}(\Omega))}+\|\partial_r U\|^2_{C(0,T;B^{s,1}_{\chi^{(0,1)},A}(\Omega))}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{6}{\varepsilon}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_9(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant{}& \\ &\frac{c}{\varepsilon}(M^{-2s}+N^{-2q})(\|U\|^2_{C(0,T;B^{1,q+1}_{0,2,0,0}(\Omega))}+\|\partial_r U\|^2_{C(0,T;B^{s,1}_{\chi^{(0,1)},A}(\Omega))}).\end{aligned}$$

按相同的方式,我们运用引理 3.8 得到

$$\frac{5}{2Q_3\nu}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_6(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant \frac{c}{Q_3\nu}(M^{-2s}+N^{-2q})\|P\|^2_{C(0,T;H^{s,q}_{\chi^{(0,2)},A}(\Omega))}.$$

由于 $H^{0,0}_{\chi^{(0,2)},A}(\Omega)=L^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega)$,我们运用式(35)和引理 3.8 推出

$$\begin{aligned}\frac{6}{\varepsilon}\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}\|G_8(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega} \leqslant{}& \\ &12\varepsilon\tau\sum_{t'\in T_\tau,t'<t}(\|P_t(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}+\|P_t^*(t')-P_t(t')\|^2_{\chi^{(0,2)},\Omega}) \leqslant \\ &12\varepsilon\|P\|^2_{H^1(0,T;L^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))}+c\varepsilon\|P\|^2_{H^1(0,T;H^{0,0}_{\chi^{(0,2)},A}(\Omega))} \leqslant \\ &c\varepsilon\|P\|^2_{H^1(0,T;L^2_{\chi^{(0,2)}}(\Omega))}.\end{aligned}$$

最后,由引理 3.10,

$$c_*(U^*) \leqslant \frac{c}{\nu(1-2Q(\sigma_2,\sigma_3))}\Theta^2(U,s',q')+1.$$

前述的诸估计式连同式(34)蕴涵了如果定理 2.2 的条件都满足,则 $\rho^*(T)=\mathscr{O}(\varepsilon^{-1}(M^{-2s}+N^{-2q}+\tau^2)+\varepsilon)$,从而

$$E^*(U,P,t) \leqslant c^*\left(\frac{1}{\varepsilon}(M^{-2s}+N^{-2q}+\tau^2)+\varepsilon\right).$$

我们可以运用引理 3.8 和 3.9 估计 $E^*(U^*-U,P^*-P,t)$. 这样,即刻就有定理 2.2 的结论.

若$N=\mathcal{O}(M^{\gamma})$和$\varepsilon=\mathcal{O}(\tau)=\mathcal{O}(M^{-\lambda})$, 则$M^2N=\mathcal{O}(M^{\gamma+2})$且$\rho^*(T)=\mathcal{O}(M^{-2s+\lambda}+M^{-2q\gamma+\lambda}+M^{-\lambda})$. 若另有$s>(\gamma+\lambda+2)/2$, $q>(\gamma+\lambda+2)/(2\gamma)$以及$\lambda>\gamma+2$, 则$\rho^*(T)=o(M^{-2}N^{-1})$, 因而条件(33)满足. 以上陈述连同与前面相同的理由可导致定理2.3的结论.

4 结 论

在本文中, 我们提出了一种用于球内Navier-Stokes方程的全离散Jacobi-球面调和谱方法, 该方法具有几方面的优点. 1) 我们对空间自变量运用了球面坐标, 从而避免了在球面上边界条件的逼近. 2) 我们计算了Descartes坐标下的速度分量, 因而只要求解一个简单的数量函数方程组. 这在本质上简化了计算和分析. 3) 由球面调和函数的正交性, 我们导出了关于速度和压力的展开式系数的离散方程组, 其适合于并行计算. 4) 得益于正交逼近的快速收敛性, 即使在小模式下我们也得到了高精度的数值结果. 5) 我们构造了带人工压缩的混合谱格式, 因而不对压力强制任何人工边界条件.

所提出的方法也可应用到许多其它重要问题, 例如, 用于球隙间Navier-Stokes方程的Galerkin方法(参考文献[34]), 可压缩流体在球形区域内的流动, 地球内部的流体运动以及天体物理中的某些问题等. 为了估计数值误差, 我们在本文中发展了一些技巧, 这些技巧可用于分析球形区域上非线性问题的各种谱方法.

附 录

本附录用于证明引理3.6. 令$\boldsymbol{R}^3$为三维Euclidean空间, 区域$D\subseteq\boldsymbol{R}^3$. 对任何整数$s\geqslant 0$, $H^s(D)$表示通常的Sobolev空间, 具有半范数$|u|_{H^s(D)}$和范数$\|u\|_{H^s(D)}$.

命题A.1 对任何$u\in H^2(\boldsymbol{R}^3)$,

$$\|u\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}^3)}\leqslant\frac{4}{\pi}|u|_{H^2(\boldsymbol{R}^3)}|u|_{H^1(\boldsymbol{R}^3)}.$$

证明 令$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}\in\boldsymbol{R}^3$为任何定点. 变量$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm T}\in\boldsymbol{R}^3$, 且

$$y_1=x_1+r\cos\lambda\cos\theta,\quad y_2=x_2+r\sin\lambda\cos\theta,\quad y_3=x_3+r\sin\theta.$$

其次, 我们记$w(r,\lambda,\theta)=u(\boldsymbol{y})$. 令$R$为任何正常数. 则对$0\leqslant r\leqslant R$,

$$u^2(\boldsymbol{x})=u^2(\boldsymbol{y})-(u^2(\boldsymbol{y})-u^2(\boldsymbol{x}))=w^2(r,\lambda,\theta)-\int_0^r\partial_\xi(w^2(\xi,\lambda,\theta))\mathrm{d}\xi\leqslant$$
$$w^2(r,\lambda,\theta)+2\left(\int_0^R w^2(r,\lambda,\theta)\mathrm{d}r\right)^{1/2}\left(\int_0^R(\partial_r w(r,\lambda,\theta))^2\mathrm{d}r\right)^{1/2}.$$

在球$B(R)=\{(r,\lambda,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi, -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$上积分以上不等式, 并将Cauchy不等式应用到此结果的右端, 我们推出

$$u^2(\boldsymbol{x})\leqslant\frac{3}{4\pi R^3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R w^2(r,\lambda,\theta)r^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta+$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R w^2(r,\lambda,\theta)\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R(\partial_r w(r,\lambda,\theta))^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}.\qquad\text{(A1)}$$

为了处理(A1)的最后那项, 我们引入$\eta=r/R$和$z(\eta,\lambda,\theta)=w(r,\lambda,\theta)$. 显然, $\partial_\eta z(\eta,\lambda,\theta)=R\partial_r w(r,\lambda,\theta)|_{r=R\eta}$. 因此, 运用引理3.1得出

$$\int_0^R w^2(r,\lambda,\theta)\mathrm{d}r=R\int_0^1 z^2(\eta,\lambda,\theta)\mathrm{d}\eta\leqslant 8R\int_0^1(z^2(\eta,\lambda,\theta)+(\partial_\eta z(\eta,\lambda,\theta))^2)\eta^2\mathrm{d}\eta=$$
$$8\int_0^R(R^{-2}w^2(r,\lambda,\theta)+(\partial_r w(r,\lambda,\theta))^2)r^2\mathrm{d}r.$$

在以上不等式中令$R\to\infty$, 我们得到

$$\int_0^\infty w^2(r,\lambda,\theta)\mathrm{d}r\leqslant 8\int_0^\infty(\partial_r w(r,\lambda,\theta))^2r^2\mathrm{d}r.$$

进一步,在(A1)中令 $R \to \infty$, 我们得到

$$u^2(\boldsymbol{x}) \leqslant \frac{4}{\pi}\left(\int_{\boldsymbol{R}^3}(\partial_r w(r,\lambda,\theta))^2 \mathrm{d}V\right)^{1/2}\left(\int_{\boldsymbol{R}^3}(\partial_r^2 w(r,\lambda,\theta))^2 \mathrm{d}V\right)^{1/2}. \tag{A2}$$

另一方面,直接计算给出

$$\partial_r w = \cos\lambda\cos\theta\partial_{y_1}u + \sin\lambda\cos\theta\partial_{y_2}u + \sin\theta\partial_{y_3}u,$$

$$\partial_r^2 w = \cos^2\lambda\cos^2\theta\partial_{y_1}^2 u + \sin^2\lambda\cos^2\theta\partial_{y_2}^2 u + \sin^2\theta\partial_{y_3}^2 u + 2\cos\lambda\sin\lambda\cos^2\theta\partial_{y_1}\partial_{y_2}u + 2\cos\lambda\cos\theta\sin\theta\partial_{y_1}\partial_{y_3}u + 2\sin\lambda\cos\theta\sin\theta\partial_{y_2}\partial_{y_3}u.$$

因此,

$$|\partial_r w| \leqslant \left((\cos^2\lambda\cos^2\theta + \sin^2\lambda\cos^2\theta + \sin^2\theta)\sum_{j=1}^{3}(\partial_{y_j}u)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{3}(\partial_{y_j}u)^2\right)^{1/2},$$

$$|\partial_r^2 w| \leqslant \left((\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta)\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{y_j}\partial_{y_k}u)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{y_j}\partial_{y_k}u)^2\right)^{1/2}.$$

将这两个估计式代入(A2),我们得到对任何 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$,

$$u^2(\boldsymbol{x}) \leqslant \frac{4}{\pi}|u|_{H^2(\boldsymbol{R}^3)}|u|_{H^1(\boldsymbol{R}^3)}.$$ □

命题 A.2 对任何 $u \in H^2(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leqslant c\|u\|_{H^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{A3}$$

证明 首先,令 $u \in C^2(\Omega)$. 由文献[35]的引理 5.2,存在函数 $z \in C_0^2(\boldsymbol{R}^3)$ 使在 Ω 上 $z = u$, 并且

$$\|z\|_{H^s(\boldsymbol{R}^3)} \leqslant c\|u\|_{H^s(\Omega)}, \qquad s = 0, 1, 2. \tag{A4}$$

运用(A4)并将命题 A.1 应用到函数 z, 我们可证实

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leqslant \|z\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^3)}^2 \leqslant \frac{4}{\pi}|z|_{H^2(\boldsymbol{R}^3)}|z|_{H^1(\boldsymbol{R}^3)} \leqslant c\|u\|_{H^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

其次,令 $u \in H^2(\Omega)$. 由文献[36]的定理 3.18,存在空间 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ 中的序列 $\{z_n\}$ 使当 $n \to \infty$ 时 $\|z_n|_\Omega - u\|_{H^2(\Omega)} \to 0$, 其中 $z_n|_\Omega$ 表示 z_n 到 Ω 的限制. 既然 $\{z_n|_\Omega\}$ 是 $H^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列且所有 $z_n|_\Omega$ 满足(A3),我们可断定 $\{z_n|_\Omega\}$ 也是 $C(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列. 在(A3)中取 $u = z_n|_\Omega$ 并令 $n \to \infty$, 我们得到(A3)对任何 $u \in H^2(\Omega)$ 成立. □

命题 A.3 对任何 $u \in H^2(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leqslant c(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

证明 对任何 $u \in C^\infty(\Omega)$, 范数 $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ 等价于范数 $(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$(参考文献[37]的定理 21). 再运用文献[36]的定理 3.18,我们知道该等价性对任何 $u \in H^2(\Omega)$ 也正确. 这样,所要的结果由命题 A.2 得到. □

引理 3.6 的证明 令 $v(r,\lambda,\theta) = u(r\cos\lambda\cos\theta, r\sin\lambda\cos\theta, r\sin\theta)$. 容易看出

$$\|v\|_{\chi^{(0,2)},\Omega} = \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|v\|_{1,\chi^{(0,2)},\Omega} = \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \|\Delta v\|_{\chi^{(0,2)},\Omega} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

那么,引理 3.6 的结论来自命题 A.3.

[参 考 文 献]

[1] Girault V, Raviart P A. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations[M]. Lecture Notes in Mathematics. **794**. Berlin: Springer-Verlag, 1979.

[2] GUO Ben-yu. Difference method for fluid dynamics-numerical solution of primitive equations[J]. Scientia Sinica, Series A, 1981, **24**(3): 297-312.

[3] 郭本瑜. 偏微分方程的差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[4] Roache P J. Computational Fluid Dynamics[M]. 2nd Ed. Albuquerque: Hermosa Publishers, 1976.

[5] T man R. Navier-Stokes Equations[M]. Amsterdam: North-Holland, 1977.

[6] Bernardi C, Maday Y. Spectral methods[A]. In: Ciarlet P G, Lions J L, Eds. Handbook of Numerical Analysis. Vol **5**. Techniques of Scientific Computing[C]. Amsterdam: Elsevier, 1997, 209-486.

[7] Boyd J P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
[8] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. Spectral Methods in Fluid Dynamics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
[9] Funaro P. Polynomial Approximations of Differential Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
[10] Gottlieb D, Orszag S A. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications [M]. Philadelphia: SIAM-CBMS, 1977.
[11] GUO Ben-yu. Spectral Methods and Their Applications [M]. Singapore: World Scientific, 1998.
[12] GUO Ben-yu. Spectral method for Navier-Stokes equations[J]. Scientia Sinica, Series A, 1985, **28** (11): 1139-1153.
[13] GUO Ben-yu, MA He-ping. Combined finite element and pseudospectral method for the two-dimensional evolutionary Navier-Stokes equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1993, **30**(4): 1066-1083.
[14] Hald O H. Convergence of Fourier methods for Navier-Stokes equations[J]. J Comput Phys, 1981, **40** (2): 305-317.
[15] Maday Y, Quarteroni A. Spectral and pseudospectral approximations of the Navier-Stokes equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1982, **19**(4): 761-780.
[16] MA He-ping, GUO Ben-yu. Combined finite element and pseudospectral method for the three-dimensional Navier-Stokes equations[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 1992, **13**(3): 350-367.
[17] Boyd J P. The choice of spectral functions on a sphere for boundary and eigenvalue problems: a comparison of Chebyshev, Fourier and associated Legendre expansion[J]. Mon Weather Rev, 1978, **106**(8): 1184-1191.
[18] Efstathiou G. A model of supernova feedback in galaxy formation[J]. Mon Not R Astron Soc, 2000, **317**(3): 697-719.
[19] Haltiner G J, Williams R T. Numerical Prediction and Dynamical Meteorology [M]. New York: John Wiley & Sons, 1980.
[20] Williamson D L, Drake J B, Hack J J, et al. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry[J]. J Comput Phys, 1992, **102**(1): 211-224.
[21] Bramble J H, Pasciak J E. A boundary parametric approximation to linearized scalar potential magnetostatic field problem[J]. Appl Numer Math, 1985, **1**(6): 493-514.
[22] CAO Wei-ming, GUO Ben-yu. A pseudospectral method for vorticity equations on spherical surface [J]. Acta Math Appl Sinica, 1997, **13**(2): 176-187.
[23] GUO Ben-yu. A spectral method for the vorticity equation on the surface[J]. Math Comp, 1995, **64** (211): 1067-1079.
[24] GUO Ben-yu, CAO Wei-ming. A spectral method for the fluid flow with low Mach number on the spherical surface[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, **32**(6): 1764-1777.
[25] GUO Ben-yu. Jacobi approximations in certain Hilbert spaces and their applications to singular differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2000, **243**(2): 373-408.
[26] GUO Ben-yu, HUANG Wei. Mixed Jacobi-spherical harmonic spectral method for Navier-Stokes equations[J]. Appl Numer Math, 2007, **57**(8): 939-961.
[27] GUO Ben-yu, WANG Li-lian. Jacobi interpolation approximations and their applications to singular differential equations[J]. Adv in Comput Math, 2001, **14**(3): 227-276.
[28] GUO Ben-yu, WANG Li-lian. Jacobi approximations in non-uniformly Jacobi-weighted Sobolev spaces[J]. J Approx Theory, 2004, **128**(1): 1-41.
[29] Chorin A J. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**(6): 928-931.
[30] Chorin A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations[J]. Math Comp, 1968, **22**(104): 745-762.

[31] Lions J L. On the numerical approximation of some equations arising in hydrodynamics[A]. In: Birkhoff G, Varga R S, Eds. Numerical Solution of Field Problems in Continuum Physics, SIAM-AMS Proceedings Ⅱ[C]. Providence, Rhode Island: AMS, 1970, 11-23.
[32] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics[M]. Vol **1**. New York: Interscience Publisher, 1953.
[33] Bergh J, L├fstr┕m J. Interpolation Spaces, an Introduction[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
[34] Dumas G, Leonard A. A divergence-free spectral expansions method for three-dimensional flow in spherical-gap geometries[J]. J Comput Phys, 1994, **111**(2): 205-219.
[35] Friedman A. Partial Differential Equations[M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.
[36] Adams R A. Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.
[37] 陈恕行. 偏微分方程概论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.

Fully Discrete Jacobi-Spherical Harmonic Spectral Method for Navier-Stokes Equations

HUANG Wei[1], GUO Ben-yu[2]
(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China;
2. Department of Mathematics, Shanghai Normal University;
Scientific Computing Key Laboratory of Shanghai Universities;
Division of Computational Science of E-Institute of Shanghai Universities;
Shanghai 200234, P.R.China)

Abstract: A fully discrete Jacobi-spherical harmonic spectral method was provided for the Navier-Stokes equations in a ball. Its stability and convergence were proved. Numerical results show the efficiency of this approach. The proposed method is also applicable to other problems in spherical geometry.

Key words: fully discrete Jacobi-spherical harmonic spectral method; Navier-Stokes equations in a ball; mixed coordinates